

Министерство образования Республики Беларусь
БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. И. Никитин

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ
В СТРОИТЕЛЬНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ
ЗАДАЧАХ**

Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
строительно-технологических специальностей
высших учебных заведений

Брест 2001

УДК 691.001.57:519.87(075.8)

ББК 38.3я73

Н 62

Рецензенты:

кафедра «Строительные конструкции, основания и фундаменты» Белорусского государственного университета транспорта (зав. кафедрой профессор, доктор технических наук И. А. Кудрявцев);

директор Республиканского унитарного научно-исследовательского и опытно-конструкторского предприятия «Научно-технический центр», кандидат технических наук А. Я. Найчук.

В. И. Никитин

Н 62. Моделирование на вычислительный эксперимент в строительно-технологических задачах: Учебное пособие. – Брест: БГТУ, 2001. – 167 с.

ISBN 985-6584-24-8.

В пособии изложены особенности моделирования технологических процессов в производстве строительных материалов, изделий и конструкций. Рассмотрены вопросы построения экспериментально-статистических моделей для количественных и качественных факторов с использованием планов регрессионного и дисперсионного анализа. Основное внимание уделено разработке заливочной технологии изготовления слоистых конструкций с помощью математического моделирования и вычислительного эксперимента на ЭВМ, результаты которого доведены до уровня пригодного для выполнения инженерных расчетов.

УДК 691.001.57:519.87(075.8)

ББК 38.3я73

ISBN 985-6584-24-8

© Никитин В. И., 2001

© Издательство БГТУ, 2001

ВВЕДЕНИЕ

Научно-технический прогресс в производстве строительных материалов и конструкций ставит перед технологами новые все более сложные задачи, которые часто имеют междисциплинарный характер и для их успешного решения необходимо шире использовать новые методы исследования и возможности вычислительной техники.

В настоящее время электронно-вычислительные машины (ЭВМ) внедряются практически во все сферы человеческой деятельности, делая ее более эффективной. Самая обширная область применения ЭВМ связана с теми сторонами человеческой деятельности, для осуществления которых требуются вычисления, многовариантные расчеты, математический анализ. Это нашло отражение и в их названии – ЭВМ, компьютер (англ. computer – вычислитель).

На базе современных ЭВМ появилась возможность более полного использования информационного ресурса общества, объединения формальных и неформальных методов анализа (математического и инженерного стилей мышления) и решения сложнейших научно-технических задач, в том числе и технологических, сама постановка которых недавно считалась нереальной.

Сложившаяся практика решения строительно-технологических задач показывает, что в условиях возрастающего значения фактора времени требуемый объем сведений об исследуемом явлении или технологическом процессе эффективнее всего формировать с помощью вычислительного эксперимента, выполняемого на ЭВМ с использованием разработанной математической модели реального объекта (явления, процесса). При таком подходе процесс решения задачи можно условно представить в виде ряда последовательно реализуемых элементов «объект – модель – алгоритм – программа – анализ результатов вычислений – управление объектом». Определяющую роль в данной цепочке элементов играет математическая модель, которая с двумя последующими элементами образует триаду «модель – алгоритм – программа», составляющую основу вычислительного эксперимента.

Неизбежный при реализации этой триады выбор того или иного численного метода во многом зависит от типа используемых математических моделей и ограничений, накладываемых возможностями имеющейся вычислительной техники.

Решение строительно-технологических задач на базе математических

моделей в последнее тридцатилетие развилось в научное направление, уменьшающее использование физического или малоквалифицированного умственного труда. Методическое значение и практическая ценность этого направления в условиях всеобщей компьютеризации быстро возрастает.

При построении математических моделей могут быть использованы как экспериментальные данные, так и результаты теоретических исследований. Эта исходная информация должна быть надежной и доброкачественной, в противном случае не удастся построить хорошую математическую модель, которая бы правильно отражала качественную и количественную стороны моделируемого объекта. Изучение же плохой модели вряд ли приведет к получению полезных практических результатов и станет всего лишь математическим упражнением. Следует отметить, что навыки выполнения этих упражнений с использованием готовых моделей (часто абстрактного содержания) студенты-технологи приобретают в ранее изучаемых курсах «Математики» и «Информатики».

С задачей построения хорошей математической модели в первую очередь может справиться инженер, понимающий изучаемый объект и основной смысл применяемого математического аппарата, или математик, разобравшийся с физической и технической сущностью решаемой задачи. Решение строительно-технологических задач является делом инженеров-технологов, а не математиков. Поэтому курс «Численные методы и решение строительно-технологических задач на ЭВМ», завершающий вузовскую математическую подготовку, должен в первую очередь ставить своей целью формирование у инженеров-технологов знаний, позволяющих описать изучаемые объекты на языке математики, т.е. построить их математические модели. Основные особенности и подходы к решению этой задачи излагаются в первой главе пособия.

Из всего разнообразия математических моделей в учебной литературе для студентов строительно-технологического профиля основное внимание уделяется рассмотрению экспериментально-статистических моделей. В свою очередь экспериментально-статистические модели представлены преимущественно наиболее простым типом регрессионных моделей в виде полиномов невысоких степеней, учитывающих обычно только количественные факторы. Тем не менее полиномиальные модели могут быть весьма полезными при решении технологических задач. Некоторые вопросы построения этих моделей кратко рассмотрены во второй главе пособия.

В практической деятельности инженеру-технологу часто приходится иметь дело с качественными факторами. Однако особенности построения экспериментально-статистических моделей для качественных факторов не нашли достаточно полного отражения в учебной литературе для студентов-технологов. То же самое можно сказать и в отношении имитационного моделирования, которое с точки зрения решения строительно-технологических задач в настоящее время представляется нам наиболее перспективным научным направлением. Поэтому автор стремился хотя бы частично восполнить пробел в области построения экспериментально-статистических моделей для качественных факторов (см. гл.3) и имитационных моделей для последующего вычислительного эксперимента (см. гл.4).

Учебное пособие направлено не только на повышение общенаучной подготовки инженеров-технологов и формирование знаний в области современных методов моделирования, но и на выработку нового стиля мышления и навыков построения математических моделей на примере решения конкретных строительно-технологических задач, которые доведены до уровня пригодного для выполнения инженерных расчетов и взяты из практики автора и его учеников. Ряд приведенных вычислительных процедур подкреплен примерами и читатель, проработав пример с карандашом в руке или на компьютере, может лучше уяснить себе идею метода, его достоинства и недостатки.

При подготовке пособия учтен опыт, накопленный автором при чтении курсов лекций по основам научных исследований и истории науки и техники для студентов строительных специальностей Брестского государственного технического университета (БГТУ), а также лекций по методам моделирования, прочитанных для преподавателей и аспирантов БГТУ и Политехники Белостокской (Польша).

Этот опыт показал, что для успешного усвоения материала предлагаемого учебного пособия среднестатистическому потенциальному читателю следует настраивать себя на длительную и серьезную работу.

ВВЕДЕНИЕ В МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ КАК СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1.1. Моделирование как метод экспериментального и теоретического исследования систем

В процессе познания и практического овладения реальной действительностью человечество неосознанно и чисто интуитивно применяло моделирование ещё на заре истории науки и техники. Однако лишь в последние несколько десятилетий моделирование стремительно выросло и приобрело статус специально разрабатываемого метода научного исследования, выполняющего важную методологическую функцию. Ныне трудно назвать такую область науки и техники, в которой в той или иной степени не использовались бы или, по крайней мере, не могли быть использованы универсальные методы моделирования. Особенно это относится к исследованию (анализу), проектированию (синтезу) и управлению сложных систем, к которым все больше и больше обращаются во всех областях современной науки и техники.

Чаще всего в науке и технике система определяется как совокупность элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, которая образует определенную целостность, единство. Система в целом обладает новыми качествами, не свойственными отдельным ее элементам. Поэтому использование привычного метода наложения (суперпозиции) при изучении систем часто оказывается неэффективным и требуются специальные методы и приемы. Понятие системы имеет чрезвычайно широкую область применения и его достаточно полное понимание предполагает построение семейства соответствующих определений – как содержательных, так и формальных.

В наиболее общем случае на языке теории множеств система S может быть определена как отношение:

$$S \subset X \times Y, \quad (1.1)$$

где множество X называется входным, а множество Y – выходным объектом системы. В реальных системах эти множества конечны. Отношение вида (1.1) принято называть системой «вход-выход» или «черным ящиком». В каждой предметной области содержание понятия системы обычно раскрыва-

ется с учетом особенностей решаемых задач и накопленного при их решении опыта. В случае решения строительно-технологических задач технологический процесс как управляемую систему целесообразно представлять по принципу «вход-выход» /9, 36/. Простейшая схема /42/ управляемой системы изображена на рис. 1.1. Двойными стрелками показаны информационные связи внутри системы. Система как единое целое выделена из окружающей среды и в то же время связана с ней через контролируемые (наблюдаемые) входы x_i и выходы y_j , а также неконтролируемые (ненаблюдаемые) возмущающие воздействия среды.

Входные переменные или факторы (лат. factor – делающий) x_i , в число которых включаются и параметры состояния системы $x_{s,i}$, образуют k -мерный



Рис. 1.1. Принципиальная схема управляемой системы (двойными стрелками показаны информационные связи внутри системы)

вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$. Этот вектор можно изменять внутри области факторного пространства, границы которой $x_{i \min} \leq x_i \leq x_{i \max}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) определяются объективными особенностями данного фактора или нормативом. Факторы могут разделяться на количественные и качественные. Количественные факторы (температура, давление, время, концентрация и т.п.) оцениваются некоторыми числами с помощью соответствующих числовых шкал. Качественным факторам (партии сырья, способы перемешивания, аппараты, исполнители и т.д.) не соответствует некоторая числовая шкала, однако уровни этих факторов можно обозначить символами, например в виде чисел натурального ряда. Количественные факторы в своей области определения обычно изменяются непрерывно, а изменение качественных факторов носит дискретный характер. Факторы определяют состояние входных материальных и энергетических потоков, а также условия протекания процессов в аппаратах. В отдельный подблок рекомендуется /36/ выделять конструктивно-эксплуатационные факторы, обособленные от заводского производства, но влияющие на формирование показателей его эффективности.

Выходные переменные или отклики y_j образуют m -мерный вектор поведения системы $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, изменяющийся в пределах $y_{j \min} \leq y_j \leq y_{j \max}$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Целенаправленное изменение (поддержание) этого вектора при воздействии внешней среды в каждый момент времени осуществляется за счет управления k входов. Отклики характеризуют качество конечной продукции процесса, эффективность его функционирования как на отдельных операциях, так и в целом. На практике основные требования к технологическим процессам формируются именно как требования к выходным переменным, выступающим в роли меры эффективности процесса.

При решении технологических задач наиболее важным выходным показателем обычно является качество продукции, определяемое как совокупность свойств, обуславливающих пригодность продукции для удовлетворения потребностей в соответствии с ее назначением. Свойства строительных материалов и изделий, как правило, оценивают путем количественного измерения результатов испытаний в соответствии со стандартами, которые в ряде случаев несовершенны и оставляют место для неопределенностей в оценках. Тем не менее, такие измерения позволяют решить проблему формирования и формализации цели, задающей требуемый (желаемый) результат.

С позиций системной классификации, технологические процессы обычно

рассматриваются как технические системы, т.е. такие системы, в которых поставленные цели могут быть полностью достигнуты за счет протекания физических, физико-химических, тепловых и других явлений /45/. Считается, что в технических системах роль человека минимальна и заключается в определении и поддержании условий, наиболее благоприятных для протекания таких явлений.

Естественные причинно-следственные связи между входными x_i , и выходными y_j переменными системы (технологического процесса) могут быть отражены некоторым числом уравнений, конкретный вид которых на первых этапах исследования обычно неизвестен, поэтому запишем их пока в общем виде в неявной форме

$$F(x, y) = 0. \quad (1.2)$$

При решении практических задач стремятся не только установить и отобразить зависимости (1.2), но и представить их в явной форме относительно выходных переменных

$$y_j = \Phi_j(x), \quad j=1, \dots, m. \quad (1.3)$$

Для этого необходимо получить и переработать достаточный объем информации об изучаемой системе. Основным способом получения информации о реальной или проектируемой технической системе является моделирование.

Важнейшей основой метода моделирования является модель, под которой понимается объект любой природы, который способен замещать исследуемый объект так, что его изучение даёт новую информацию об этом объекте /30/. Разрабатываются специальные теории, выясняющие закономерности отношения между оригиналом и моделью. Этот момент подчеркивается в определениях модели и моделирования.

Модель – объект (например, явление, процесс, система, установка, знаковое образование), находящийся в отношении подобия к моделируемому объекту. Моделирование – исследование моделируемого объекта, базирующееся на его подобии модели и включающее построение модели, изучение её и перенос полученных сведений на моделируемый объект. Таким образом, в основе моделирования лежит идея подобия. В соответствии с /30/: подобие – взаимно-однозначное соответствие между двумя объектами, при котором функции перехода от параметров, характеризующих один из объектов, к параметрам другого объекта известны.

Моделирование наиболее эффективно тогда, когда с помощью модели проще и экономичнее изучить свойства и отношения оригинала, чем при его

непосредственном рассмотрении, или имеется возможность получения таких данных, которые не получить другим путем. Многообразие моделей и методов исследования, которые на практике взаимодействуют и переплетаются, порождает сложную проблему выбора подходящих процедур моделирования. В значительной степени этот выбор определяется профессиональной подготовкой исследователя и целями, которые он хочет достичь в результате проведения исследования, особенностями объекта моделирования и типом применяемых моделей.

Проблеме моделирования посвящена обширная научная литература, в которой отражено большое разнообразие подходов к классификации моделей и методов моделирования. Общеизвестно [27] различать материальное (предметное) и идеальное моделирование (см. рис.1.2). Предметное моделирование, предполагающее использование некоторого материального объекта, делят на физическое, аналоговое и натурное. В первом случае обеспечивается аналогия физической природы оригинала и модели, а во втором – сходство протекающих в них процессов. При натурном моделировании исследование проводится на реальном объекте.

Идеальное моделирование основывается на мысленной идеализированной аналогии оригинала и его модели, а по глубине формализации делится на знаковое и интуитивное. По способу представления знаковых моделей различают математическое, логическое и графическое моделирование. Математическое моделирование можно разделить на аналитическое и алгоритмическое. При аналитическом моделировании предполагается использование математической модели в форме алгебраических, дифференциальных, интегральных и других уравнений, допускающих получение точного решения с помощью однозначной вычислительной процедуры. Если математическая модель не допускает точного решения (такая ситуация характерна при моделировании сложных систем), то используют алгоритмический подход, реализующий поиск приближенного решения с помощью различных рекуррентных методов и итеративных процедур.

При моделировании процессов функционирования сложных систем в качестве одной из форм математического моделирования можно выделить имитационное моделирование (лат. *imitatio* – подражание), позволяющее путем вычислительного эксперимента воспроизводить процесс функционирования системы во времени. При этом имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и

последовательности протекания во времени, что позволяет по исходным данным получить сведения о состоянии процесса в определенные моменты времени /35/. Процесс имитации обычно реализуется на ЭВМ и в нужном месте может быть приостановлен для проведения материального или интуитивного моделирования с использованием промежуточных данных, полученных при машинной имитации. Таким образом, при имитационном моделировании используются практически все методы моделирования, отмеченные на рис. 1 2.

Имитационное моделирование открывает широкие возможности для более полного учета всех существенных факторов. Однако при высокой сложности реального процесса его адекватная имитационная модель также становится достаточно сложной и реализация имитационного исследования может оказаться очень длительной. В этих условиях целесообразно использовать методы теории планирования эксперимента с целью организации рационального вычислительного эксперимента.

Интуитивное моделирование осуществляется на описательном (вербальном) уровне, отражая лишь качественно общие тенденции развития изучаемых явлений. Такой подход осуществляется с целью формирования эвристики относительно взаимоотношений между основными элементами изучаемой системы и выдвижения различного рода гипотез. По способу формирования эвристик выделяют следующий ряд форм интуитивного моделирования: мысленный эксперимент /17/, операционные игры /27/, метод сценариев /5/ и др. При моделировании технических систем мысленный эксперимент и операционные игры уже нашли широкое распространение. Метод сценариев менее распространен в практике. Однако в перспективе (при соответствующей методологической доработке) он может занять ведущее место среди форм интуитивного моделирования.

Приведенная классификация (см. рис.1.2) методов моделирования не исчерпывает все возможные классификационные признаки и не может претендовать на полноту и завершенность. Такая задача относится к области методологии науки вообще, и поэтому является делом философов и логиков. Тем не менее, для решаемых в данной работе задач упомянутой классификации вполне достаточно.

Среди рассмотренных форм моделирования при описании и изучении сложных технических систем обычно используется физическое и математическое (главным образом в аналитической форме) моделирование.

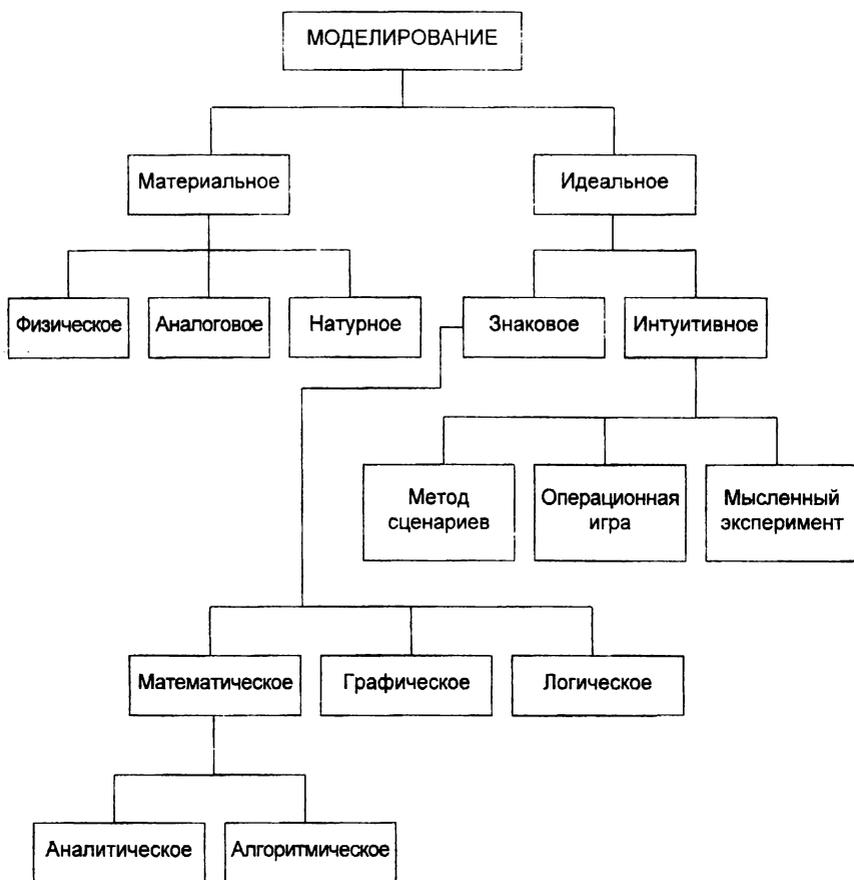


Рис.1.2. Классификация методов моделирования

При физическом моделировании в качестве модели исследуемого процесса используется (создается) другой физически существующий процесс, сохраняющий полностью или хотя бы частично физическую или физико-химическую природу моделируемого процесса и позволяющий достичь поставленной цели при меньших затратах ресурсов (дешевле, быстрее, безопаснее и т.п.), чем при использовании оригинала. Такая реально существующая модель может быть охарактеризована своими входными x_m и выходными y_m переменными.

Из определений модели и моделирования следует, что при создании модели должны быть установлены функции взаимосвязи переменных объекта исследования и его модели:

$$x=x(x_m), y=y(y_m). \quad (1.4)$$

Соотношения (1.4) должны количественно фиксировать условия подобия и обеспечивать возможность по результатам испытания модели без существенной ошибки определить (рассчитать) интересующие исследователя параметры оригинала и оптимизировать его уже на стадии проектирования. Такое свойство модели часто называют традуктивностью (лат. *traductio* – перенесение) /15/. При этом можно обойтись без математического описания объекта исследования, которое при его слабой изученности может вообще отсутствовать. Как правило, традуктивность моделирования обеспечить гораздо труднее, чем экономичность.

Нахождение зависимостей (1.4) является задачей теории подобия и моделирования. Строго говоря, только после решения этой задачи созданную физическую модель можно считать моделью объекта исследования и далее переходить к практическому экспериментированию на ней, перенося полученную информацию на оригинал.

Принцип подобия и физическое моделирование оправдывает себя для сравнительно простых процессов, описываемых, например, законами классической механики, когда удастся обойтись ограниченным числом критериев подобия, количественно фиксирующих условия подобия. Однако и среди относительно бедных своим разнообразием механических явлений встречаются такие, для которых нет еще уравнений движения. Для сложных систем часто вообще не удастся установить критерии подобия или их число получается слишком большим, и они становятся одновременно несовместимыми. Следует учитывать и другой недостаток, связанный со сравнительно большими затратами времени и средств на проведение экспериментов.

При математическом моделировании мысленное представление (мысленная модель) об объекте исследования описывается языком математики в виде уравнений, неравенств, алгоритмов, логических условий, таблиц и других математических структур. Полученное описание (математическая модель) реализуется в виде программы для ЭВМ. Результаты вычислений на ЭВМ сопоставляются с имеющейся априорной информацией и при положительной оценке распространяются на оригинал. На сегодняшний день такая схема моделирования становится наиболее общим подходом к изучению

сложных технических систем.

В общем виде математическую модель процесса можно представить некоторой системой уравнений

$$y_j = f_j(x_1, \dots, x_k, \underline{b_1, \dots, b_p}), \quad j = 1, \dots, m, \quad (1.5)$$

где (x_1, \dots, x_k) – вектор контролируемых факторов;

(b_1, \dots, b_p) – вектор параметров, характеризующих свойства данной конкретной системы.

Задача построения математической модели является ключевым этапом математического моделирования и заключается в отыскании конкретного вида уравнений (1.5). В состав модели достаточно включить лишь значимые факторы. Совокупное влияние неучтенных факторов будет носить случайный характер и обычно называется шумом, который необходимо учитывать при решении большинства технологических задач.

При моделировании технических систем встречаются математические модели отдельных явлений и технологических процессов. Модели технологических процессов, как правило, рассматриваются как сложные системы и при описании разбиваются на подсистемы – отдельные явления.

На сегодня нет единой общепринятой классификации математических моделей. В различных областях их применения вводятся различные классификационные признаки. Например, в качестве классификационного признака можно использовать метод моделирования. По этому признаку почти каждому методу соответствует определенный класс моделей, имеющий то же название, что и метод моделирования. Так, математическому моделированию соответствуют математические модели, которые могут быть аналитическими, алгоритмическими или имитационными. Деление моделей на аналитические и имитационные является в известной степени искусственным. На практике часто встречаются всевозможные комбинации различных знаковых моделей (графоаналитические, логико-математические и др.).

Важным классификационным признаком моделей является мощность множества состояний исследуемой системы. По этому признаку модели делят на статические и динамические. Если система не меняет своего состояния в течении времени и, следовательно, множество состояний является единичным, то соответствующую модель называют статической. Модель называется динамической, если множество состояний неединичное и состояния могут меняться во времени. Процесс смены состояний называют движением

системы. Динамические модели делят на модели с дискретным (множество состояний конечно) и непрерывным множеством состояний.

По характеру предсказаний модели делят на детерминированные и стохастические. Первые употребляются на практике для описания реальных явлений с позиций детерминизма (изменение состояния системы происходит под воздействием только причинно-следственных связей). При таком описании можно однозначно предсказать движение системы, имея информацию о ее начальном состоянии. Стохастические модели используются для описания явлений с учетом воздействия случайных факторов и делятся на вероятностные и статистические. Вероятностные модели классифицируют обычно как случайные процессы, разделяя их на процессы с дискретным и непрерывным временем. Статистические модели формируются по схеме эксперимента со случайным исходом. По виду алгоритма статистической обработки они делятся на модели регрессионного, дисперсионного или корреляционного анализа, параметрического оценивания и т.д.

Считается [42], что в области строительного материаловедения и технологии целесообразно выделить пять основных типов математических моделей, различных по своей природе:

- модели, базирующиеся на фундаментальных законах природы и описываемые уравнениями математической физики;
- концептуальные модели, отражающие на естественном и математическом языке совокупность профессиональных гипотез, идеализирующих поведение изучаемой системы;
- экспериментально-статистические модели, описывающие с известной точностью связь между входом и выходом системы на основе экспериментальных данных анализа ее внутренней структуры;
- модели исследования операций как совокупности действий, направленных на достижение поставленной цели и начинающих входить в практику решения строительно-технологических задач;
- имитационные модели, включающие в единую программу для ЭВМ модели любых типов, объединенные правилами взаимоперехода.

Построение достаточно полного математического описания сложной системы в целом в виде функций (1.5) – очень трудоемкая задача. Преодолевая трудности на пути построения этой модели необходимо учитывать следующее важное обстоятельство. Происходящая сейчас теоретизация и математизация наук, совершенствование и широкое использование ЭВМ делают

математическое моделирование одним из самых перспективных и эффективных методов исследования сложных систем. Без него немислимо создание прогрессивных технологий, развитие различных областей знаний. Например, физика, являющаяся признанным лидером естествознания, своим успехам и совершенству во многом обязана математике, ставшей её естественным языком, позволяющим формализовать физические явления, строить системы моделей и получать физические выводы с помощью математического моделирования. В последние годы на стыке машинной математики и физики возникла новая научная дисциплина – вычислительная физика, демонстрирующая продуктивность математических моделей в науке.

При использовании ЭВМ увеличиваются возможности алгоритмического воспроизведения процессов реальной системы. Эта отличительная особенность резко расширяет класс моделируемых объектов, позволяя строить более полные модели-имитаторы и осуществлять мягкое моделирование там, где известна лишь общая качественная картина процесса. Имитационные модели позволяют учитывать такие факторы, которые часто невозможно учесть при физическом и других методах моделирования. В ходе имитационного исследования специалисты получают новые знания и опыт, развивают интуицию и всё это снова передают имитационной модели, делая её более точной и полной. Все это упрощает или снимает проблему переноса результатов моделирования на реальные объекты.

Если сложность реального объекта не позволяет построить его математическую модель, то в ряде случаев можно выделить наиболее трудно поддающуюся математическому описанию часть физического объекта и включить её в имитационную модель. Тогда модель реализуется, с одной стороны, на базе средств вычислительной техники, а с другой – имеется реальная часть объекта /35/. Следует еще раз обратить внимание на то, что при проведении имитационного исследования могут использоваться практически все рассмотренные нами методы моделирования.

Необходимо отметить, что методы физического и математического моделирования нельзя противопоставить друг другу. Не имеет смысла считать, что один из этих методов лучше или хуже другого. Целесообразность применения того или другого из них определяется особенностями той или иной конкретной задачи, решение которой полезно организовывать, руководствуясь некоторой общей схемой и принципами моделирования.

1.2. Схема и принципы моделирования

По определению в схеме моделирования выделяется три основных последовательных этапа: построение модели, ее изучение и перенос полученной информации на моделируемый объект. По-видимому, не может существовать универсальной рецептурной схемы моделирования. В зависимости от целей моделирования, характера изучаемого объекта и используемых методов моделирования в схеме моделирования могут выделяться дополнительные этапы. При математическом моделировании технических систем с использованием ЭВМ выстраивается наиболее общая схема моделирования, которая условно разделяется на шесть этапов /45/. С формальной и практической точек зрения имеет смысл обсудить содержание этих последовательных этапов.

Этап 1 – определение цели моделирования

Под целью моделирования понимается идеальное представление желаемого (требуемого) результата, достигаемого в пределах некоторого интервала времени. Желаемый результат (цель) задается в виде перечня значений параметров целеполагания, которые могут быть выходами системы y_j . При решении оптимизационных задач должно быть сформулировано некоторое правило выбора, определяемое с помощью критерия, отражающего наши представления о цели. В некоторых случаях такой критерий может быть задан в виде функционала на пространстве входных и выходных переменных системы. Этот функционал обычно называют целевой функцией и включают в состав модели. Проблема цели является одной из основных проблем при моделировании, поэтому одна из основных задач этого этапа – получение необходимой информации для однозначного формулирования и формализации понятия цели как необходимого компонента постановки задачи.

Этап 2 – составление списка входных переменных

На этом этапе выполняется составление достаточно полного списка входных переменных (факторов x_i) системы и их ранжировка по степени влияния на выходные переменные (отклики y_j). Количество переменных в этом списке, прежде всего зависит от уровня сложности, на котором ставится задача. Чем выше уровень сложности задачи, тем полнее список рассматриваемых переменных, тем лучше обеспечены возможности априорного

(лат. a priori – из предшествующего) анализа, уточняющего постановку задачи. Для каждой переменной выясняется возможный диапазон варьирования и обсуждаются все обстоятельства ее наблюдаемости и измеряемости. Далее с помощью различных процедур (экспертное оценивание, регрессионный и дисперсионный анализы, метод случайного баланса, последовательный отсеивающий эксперимент и т.д.) выявляются наиболее существенные переменные, которые потом обычно и используются при построении математической модели. По-видимому, нижняя граница числа рассматриваемых переменных близка к верхней границе числа включаемых в модель.

Этап 3 – математическое описание процесса

Построение математического описания (математической модели) процесса заключается в определении необходимых уравнений связи между входными и выходными переменными конкретного объекта. Для ее решения можно воспользоваться двумя различными с методологической точки зрения подходами.

При первом подходе необходимо анализировать структуру моделируемого объекта и мысленно выполнять его декомпозицию (расчленение) на конкретное число подсистем (элементарных явлений), допускающих математическое описание. Далее создаются математические модели подсистем и выясняются взаимодействия между ними. Глубина декомпозиции не имеет строгих рамок и может оказаться, что модель системы будет объединять взаимодействующие модели подсистем различного уровня. В процессе построения модели обычно стремятся к тому, чтобы на нижнем уровне декомпозиции функционирование подсистем описывалось законами физики, химии и т.д. В результате получается некоторая система уравнений (дифференциальных, алгебраических и т.п.), описывающая объект исследования с точностью до некоторых коэффициентов, определяемых с помощью специального эксперимента. Это коэффициенты теплопроводности, вязкости, диффузии, константы реакций и т.д. В уравнениях (1.5) они названы параметрами модели и их необходимо знать с достаточной точностью. В противном случае можно не получить правильных представлений о моделируемом процессе. При рассмотренном подходе построение математической модели выполняется преимущественно на теоретической основе. Этот подход предлагается называть структурным /15/.

Второй подход, который часто называют методом черного ящика, яв-

ляется эмпирическим. Его целесообразно использовать прежде всего при исследовании очень сложных и плохо изученных процессов. В этом случае отказываются от попыток анализировать структуру системы и механизмы протекающих в ней явлений. Для получения соотношений (1.5) между входными и выходными переменными системы выполняется определенное число опытов, результаты которых аппроксимируются подходящими уравнениями. Эти эмпирические уравнения и будут математической моделью изучаемой системы.

При решении той или иной практической задачи ни абсолютно структурное, ни абсолютно эмпирическое описание процесса невозможны. В любом реальном случае полное описание системы, как бы хорошо она ни была изучена, нельзя построить на чисто теоретической основе. Какие-то характеристики создаваемой математической модели все равно придется определять из опытов. С другой стороны, структура интересующей нас системы не может быть скрыта от нас полностью. Какие-то представления о ее структуре мы всегда имеем. Без этого вряд ли удалось бы разобраться со входами и выходами системы. Полученное эмпирическое уравнение обязательно отражает, хотя и в неявной форме, и структуру, и механизм процесса. Иногда анализ эмпирического уравнения прямо приводит к раскрытию механизма процесса.

Чаще всего подход к решению сколько-нибудь серьезной реальной задачи можно охарактеризовать как в основном структурным или эмпирическим. При выборе компромиссного соотношения между уровнями структурности и эмпиричности разрабатываемых моделей целесообразно оценить сильные и слабые стороны обоих подходов.

Модель, полученная при структурном подходе, позволяет выявить основные характерные черты сложной системы, понять ее поведение и построить гипотезы или даже теории, которые могут объяснить это поведение. Кроме высокой информативности такая модель имеет широкую область применения, прогностическую мощность и легкую трансформируемость при решении разнообразных задач. К недостаткам данного вида моделирования относится трудоемкость составления хорошего математического описания системы и его сложность. По мере детализации модели сложность ее математического аппарата может оказаться такой, что последующая реализация модели будет практически невозможна даже при имеющихся успехах в развитии прикладной математики и вычислительной техники. Подобные труд-

ности связаны с тем, что при составлении модели оперируют с величинами непрерывной природы, а ЭВМ может оперировать только с дискретными величинами (числами). Для перехода к дискретному представлению изучаемых моделей были созданы сложнейшие теории разностных аппроксимаций.

Основное достоинство эмпирического подхода – простота. Особенно существенно оно может проявиться при изучении очень сложных процессов. Получить эмпирические уравнения, как правило, бывает проще, чем создать хорошую теорию сложных процессов. Однако на основе эмпирических зависимостей задача экстраполяции решается значительно хуже, чем при структурном подходе. Если в пределах изменения переменных, изученных в опытах, предсказать поведение системы можно достаточно точно, то за пределами изученной области можно допустить серьезную ошибку. Сложно предсказать изменение параметров процесса при переходе от малой лабораторной установки к большому промышленному объекту (проблема масштаба).

Знание сильных и слабых сторон обоих подходов облегчает выбор наиболее эффективного пути построения математического описания изучаемой системы на рациональном уровне сложности, определяемом требованиями конкретного случая. Иногда целесообразно использовать простейшую из моделей, обеспечивающих необходимую точность. Бывает и так, что из двух возможных моделей выбирается несколько более сложная, зато более ясная физически. Дать непогрешимый рецепт на все случаи жизни невозможно.

Этап 4 – алгоритмизация и программная реализация модели

С целью использования математической модели для выполнения вычислительного эксперимента на ЭВМ необходимо построить соответствующий вычислительный алгоритм, позволяющий получить решение задачи за допустимое время. При этом следует руководствоваться положением о том, что все известные до сих пор алгоритмы при современном состоянии науки, в принципе реализуемы в автоматических машинах. Кроме того, при построении вычислительного алгоритма принципиальным моментом является тот факт, что степень точности решения уравнений построенной математической модели должна отвечать степени точности отражения этой моделью реального изучаемого процесса.

Очевидно, что для каждой задачи, точнее – класса задач, имеется свой предпочтительный алгоритм. Если среди известных вычислительных алго-

ритмов, обслуживающих широкий класс задач, нет подходящих для решаемой задачи, то всегда можно подыскать или сконструировать специальный алгоритм, воспроизводящий функционирование моделируемой системы.

Вычислительный алгоритм реализуется в виде программы для ЭВМ, которую удобно представлять в виде схемы. Эта схема представляет собой интерпретацию логической схемы моделирующего (вычислительного) алгоритма разработчиком программы с использованием конкретных программно-технических средств. Очень важно, чтобы программа обеспечивала проведение вычислений на ЭВМ в диалоговом режиме, позволяющем использовать эвристические процедуры и опыт специалистов при уточнении самой модели. Для наглядности в программе могут быть предусмотрены блоки графической интерпретации. Триада «модель-алгоритм-программа» реализует долгий и трудный путь от объекта к компьютеру и все её звенья должны выполняться на одинаково высоком уровне. Необходимо отметить, что современное понятие вычислительного алгоритма включает его программную реализацию.

Этап 5 – проверка адекватности модели

При проверке адекватности (лат. *adaequatus* – приравненный, равный) математической модели выясняется степень ее соответствия моделируемому объекту. Для этого результаты, полученные путем вычислительного эксперимента на построенной модели, сопоставляются с данными физического эксперимента и теоретическими представлениями, и выясняется степень их совпадения.

Если заданная степень точности обеспечивается, то математическая (машинная) модель считается адекватной или идентичной моделируемому процессу и с ее помощью удастся получить достоверную информацию для обоснования различных научно-технических решений. По ряду причин модель может оказаться неадекватной. В этом случае приходится возвращаться к предыдущим этапам и уточнять математическую модель. Таким образом, процесс построения математической модели часто носит итеративный характер.

Естественное стремление иметь максимально точное описание моделируемого объекта в конце концов может привести к получению сложной модели, проверка адекватности которой требует большой работы. Чаще всего простота или сложность математической модели связаны с тем, сколько в

нее входит параметров-коэффициентов, учитывающих те или иные особенности объекта и определяемых обычно экспериментально. Чем больше параметров входит в модель, тем подробнее удастся охарактеризовать реальный объект и тем точнее его описать. Однако при этом возрастает чувствительность к ошибкам опытов. Чем больше параметров, тем более объемный и точный эксперимент требуется, чтобы достаточно точно оценить эти параметры. Если модель построена на основе структурного подхода, а эксперимент не очень точен, то возникает специфическая опасность потери физического смысла. С утратой физического смысла начинает проявляться еще одна отрицательная особенность многопараметрических моделей: ненадежность экстраполяции. Модель, которая хорошо описывает реальный объект в области, изученной экспериментально в достаточно узких пределах, как правило, становится очень неточной уже при небольшом выходе за ее пределы. Разумеется, та же особенность присуща и чисто эмпирическим моделям.

Этап 6 – проведение вычислительного эксперимента

Вычислительный эксперимент на ЭВМ с помощью математической модели проводится с целью изучения объекта моделирования в выбранной области факторного пространства и решения различных инженерных задач на основе полученной информации. Такой эксперимент на ЭВМ по составленным программам во много похож на обычный физический эксперимент. На компьютере в изучаемом диапазоне изменения значений переменных проводят серии планируемых расчетов, которые отражают значения выходов (откликов) изучаемой системы в виде таблиц, графиков, диаграмм, схем и т.д. Если в число варьируемых переменных входит время, то появляется возможность проанализировать и сформулировать выводы о характеристиках функционирования моделируемой системы на всех этапах ее жизненного цикла и выбрать оптимальную траекторию развития. При этом многократно уменьшаются материальные и трудовые затраты, присущие традиционным экспериментальным подходам, дающим, как правило, лишь крупинцы нужной информации. Путем машинного экспериментирования можно не только описать и объяснить поведение моделируемой системы, но и создать условия для перехода к ее управлению и прогнозированию. По результатам вычислительного эксперимента можно построить упрощенные математические модели (приближенные формулы и номограммы), позволяющие выполнять инженерные расчеты и ускорять итеративные вычисления на ЭВМ.

* * *

В зависимости от особенностей конкретной задачи, используемых моделей и методов моделирования удельный вес и значимость рассмотренных этапов в общей схеме моделирования может меняться в довольно широком диапазоне. В некоторых случаях отдельные этапы могут даже исключаться. На всех этапах исследования нужно уметь формулировать цепочку вопросов, ведущих к тому уровню понимания предмета, который доступен для решения той или иной практической задачи. Характеризуя схему моделирования в целом, необходимо учитывать, что от постановки задачи моделирования до интерпретации полученных результатов существует большая группа сложных научно-технических проблем. При этом широкое применение находит математический аппарат.

Было бы неправильно считать, что все проблемы инженерной деятельности можно решить, достигнув достаточно высокого уровня математического обеспечения. В инженерной практике на первом месте стоят реальные задачи, а не методы, используемые для их решения. Кроме того, формализация любой инженерной задачи сама по себе не является формализованной процедурой; это процесс существенно творческий, изобретательский, где собственно математика не играет существенной роли. И, наконец, полученный при решении задачи результат, вполне корректный с математической точки зрения, не приобретает абсолютного значения в рамках содержательной постановки задачи. Таким образом, математика в моделировании занимает особое, хотя и подчиненное, место и играет важную, но далеко не решающую роль.

* * *

Несомненно, моделирование систем – сложный, трудоемкий процесс, имеющий ярко выраженный творческий характер. Поэтому дать пригодные во всех случаях рекомендации по моделированию невозможно. Однако практикой выработаны принципы моделирования, придерживаясь которых осуществляют построение соответствующих моделей /27/.

Принцип информационной достаточности

Очевидно, что построение модели изучаемой системы невозможно при полном отсутствии информации и лишено смысла при наличии полной ин-

формации о ней. Существует некоторый критический уровень априорных сведений о системе (уровень информационной достаточности), при достижении которого в принципе можно создать адекватную модель. Прежде всего, этот уровень определяется наличием информации об элементах системы и о существенных связях между ними. В понятие информационной достаточности входят также сведения о месте и роли системы в деятельности метасистемы (внешнее дополнение). Без всего этого моделирование лишено целенаправленности и не приведет к получению новой информации о системе.

Принцип параметризации.

При построении модели системы описание процесса функционирования некоторых относительно изолированных подсистем можно не проводить, если эти подсистемы охарактеризовать определенным параметром (возможно векторным), который может зависеть от обстановки (ситуации), складывающейся в моделируемой системе. Зависимость параметра от ситуации в общей модели задают в виде формулы, графика или таблицы. Принцип параметризации позволяет иногда в значительной мере сократить объем и продолжительность исследования. Однако надо иметь в виду, что параметризация снижает адекватность полученной модели и должна использоваться осмотрительно.

Принцип агрегирования

В ряде случаев сложную систему можно структурно представить состоящей из агрегатов (подсистем), для адекватного математического описания которых оказываются пригодными некоторые стандартные математические модели и схемы. В частных случаях это могут быть модели, описываемые системой дифференциальных уравнений или каноническими формами, системы массового обслуживания, конечные и вероятностные автоматы и т.п. Далее агрегаты объединяются в единую модель. Принцип агрегирования дает возможность в рамках единой имитационной системы достаточно гибко перестраивать имитационную модель в зависимости от задач исследования.

Принцип осуществимости

Создаваемая модель должна обеспечивать достижение поставленной цели исследования с вероятностью, существенно отличающейся от нуля, и за конечное время. Обычно задают некоторое пороговое значение P_0 вероятно-

сти достижения цели моделирования $P_{ц}(\tau)$, а также приемлемую границу τ_0 времени достижения этой цели τ .

Считают модель осуществимой, если одновременно выполнены неравенства $P_{ц}(\tau) \geq P_0$ и $\tau \leq \tau_0$. При нарушении хотя бы одного из указанных неравенств модель неосуществима.

Принцип рационального использования факторного пространства

Этот принцип отражает основные идеи статистической теории планирования эксперимента. Различные методы моделирования предполагают планирование активного физического и вычислительного эксперимента. В пространстве управляемых переменных (в факторном пространстве) точки, отображающие условия опытов (реализаций), следует выбирать в соответствии с определенным оптимальным планом эксперимента. При фиксированном числе опытов оптимальный план приводит к наибольшему объему информации об изучаемом объекте, полученной из эксперимента. Если зафиксировать объем получаемой информации, то оптимальное планирование эксперимента позволит сократить до минимума число опытов.

Принцип множественности моделей

Любая конкретная модель учитывает не все факторы, действующие в изучаемой системе, и отражает лишь некоторые стороны реального процесса. Для более полного познания действительности необходим ряд моделей («веер» моделей), позволяющий с разных сторон и с разной степенью детальности (в зависимости от цели исследования) отражать изучаемый процесс. Этот принцип может быть рационально реализован в имитационной системе, которая позволяет достаточно гибко подходить к формированию моделей.

* * *

Таковы в общих чертах основные элементы современной методологии и технологии математического моделирования систем с использованием ЭВМ. Согласно этой логике решение поставленных задач нужно проводить поэтапно и итеративно с применением разнообразных формальных и неформальных методов.

При разработке общих вопросов моделирования в схему моделирования без какого бы то ни было усилия укладываются любые проявления целе-

направленной познающей деятельности. Однако никакой методологический анализ общих вопросов моделирования, играющий большую эвристическую роль, никогда не сможет заменить собой специальных работ в той или иной конкретной предметной области, каждая из которых наряду с общими чертами имеет специфические особенности и тенденции развития. Поэтому целесообразность создания методологии и процедур моделирования в каждой конкретной области исследования очевидна.

При формировании методологии моделирования какой-либо конкретной предметной области основные принципы и этапы моделирования систем необходимо наполнить конкретным содержанием, отражающим особенности рассматриваемых объектов исследования на различных стадиях их создания и применения. Эти особенности оказывают существенное влияние на выбор методов моделирования и стратегии всего исследования.

Практика моделирования в технологии строительных материалов и изделий показывает, что эта предметная область также имеет свои особенности и для успешного решения реальных задач недостаточно знать общие схемы и рецепты. Нужно найти свой собственный путь, так как анализ каждой сложной системы – это уникальная проблема, требующая не только разносторонней культуры, но и изобретательности и таланта.

Желательно, чтобы этот путь обеспечивал достижение выбранной цели с минимальными затратами имеющихся ресурсов. Поэтому целесообразно проанализировать накопленный опыт моделирования в технологии строительных материалов и изделий, оценить его сильные и слабые стороны с тем, чтобы при решении конкретных задач число ошибок методологического характера свести к минимуму.

1.3. Практика моделирования в технологии строительных материалов, изделий и конструкций

Технология строительных материалов и изделий как система знаний формировалась индуктивным путем (от простого к сложному). Наиболее простым способом получения информации, необходимой для принятия решений, являлись наблюдения и экспериментальные исследования, опыт изготовления материалов и изделий и их применения в строительстве. Не утратил своего значения эмпирический уровень познания в относительно целостном процессе научного исследования и в настоящее время, позволяя во многих случаях просто и оперативно получать конкретные знания для удов-

летворения потребностей практики.

В рассматриваемой предметной области этому в значительной мере способствует развитие материальных средств познания (технизация) и то, что изучение свойств материалов и их взаимосвязей базируется на испытаниях большого количества однотипных образцов, удовлетворяющих принципам простоты и повторяемости эксперимента. Изготовление образцов выполняется на реально существующих установках (физических моделях), как правило, в лабораторных условиях. С помощью такого физического экспериментирования удастся не только выяснить осуществимость того или иного технологического процесса и создать первые представления об изучаемой сложной системе, но и довольно часто решить конкретную технологическую задачу.

Значение результатов эксперимента может быть более существенным, если имеется возможность опираться на теорию подобия и моделирования. Однако при физическом моделировании технологии строительных материалов и конструкций пока еще не удалось установить необходимого и достаточного числа критериев подобия и делаются лишь первые попытки в этом направлении в области цементных бетонов. Поэтому в настоящее время для облегчения перехода от лабораторных исследований к промышленным пользуются словесными условиями подобия и соотношениями, вытекающими из мысленных представлений об объекте исследования. Такие соотношения делают результаты моделирования более обобщающими.

Основополагающим и общепризнанным принципом в технологии строительных материалов и изделий является учение о связи состава и внутреннего строения материала с его свойствами. Руководствуясь этим принципом, технологи проникают в физику происходящих в сложной системе процессов и, в основном на качественном уровне, создают определенную информационную базу для принятия инженерных решений, имея лишь приблизительное представление о средних интегральных показателях скоростей процессов структурообразования и степеней их завершенности к определенным технологическим или эксплуатационным периодам.

Сложный комплекс взаимосвязанных процессов и явлений различной природы, протекающих в полиминеральных и многокомпонентных плохо изученных системах, часто исключает возможность структурного (аналитического) подхода к построению описания технологического процесса как системы на языке классической математики, например в виде системы ал-

гебраических, дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений. К тому же практикой развития этого подхода установлено, что аналитические методы и модели, достаточно хорошо описывающие физику и механизмы явлений, составляющих технологический процесс, во многих случаях оказывались мало пригодными для объяснения конкретных данных, получаемых в условиях промышленного производства /16/. В такой ситуации при отказе от использования новых подходов более предпочтительным оказывается экспериментальный метод исследования зависимостей между величинами, характеризующими технологический процесс.

Если в технологии строительных материалов и изделий все же допустить возможность построения достаточно полных математических моделей на основе структурного подхода, то остается открытым вопрос о возможности реализации этих моделей с помощью численных методов на ЭВМ за обозримое время. Так, при решении относительно простой с нашей точки зрения задачи лазерно-плазменной обработки материала в атмосфере азота исследователи оказались на грани возможностей современной вычислительной техники /34/. Следует также учитывать, что модели, реализуемые на пределе возможностей больших ЭВМ, вряд ли смогут быть использованы заводскими технологами для анализа и управления технологическим процессом в реальном времени. Требуются более простые и конкретные модели, позволяющие конструировать экономичные вычислительные алгоритмы и получать решение практических задач с достаточной точностью за допустимое время.

В настоящее время на основе экспериментальных данных и развитых представлений о строении материалов установлен ряд зависимостей между их основными свойствами и наиболее существенными факторами, которые используются в технологических расчетах для отыскания приближенных оценок. В этом отношении можно отметить цементные бетоны, которые благодаря многолетним и многочисленным исследованиям оказались наиболее полно изученными. Тем не менее, происходящие при производстве бетонов физико-химические, термодинамические и другие процессы изучены не столь глубоко, чтобы на основе теоретических бетоноведческих положений всегда можно было дать этим процессам количественную оценку и определить расчетным путем, как повлияет изменение технологических факторов на качество конечной продукции /4/. Поэтому используемые в технологических расчетах зависимости в большинстве своем получены эксперименталь-

ным путем.

Таким образом, в технологии строительных материалов и изделий основным методом познания был и остается физический эксперимент, который должен проводиться в соответствии с рекомендациями современной теории планирования эксперимента, открывающей путь к многофакторному экспериментально-статистическому моделированию с применением ЭВМ, экономии времени и средств, увеличению надежности и достоверности результатов.

Создание современной теории эксперимента следует рассматривать как появление парадигмы (греч. *παραδείγμα* – образец) в экспериментальных исследованиях, характеризующей зрелость научного направления. Концепция планирования эксперимента для многих областей знаний стала вполне естественной. Открылась возможность для массового получения довольно простых экспериментально-статистических моделей, описывающих конкретные рецептурно-технологические ситуации.

Успехи планирования эксперимента прежде всего связываются /28/ с тем, что оно требует высокой степени формализации – это заставляет исследователя стремиться к четкому логическому осмыслению всей процедуры исследования даже в очень размытых ситуациях. Искусству формализации должен прежде всего учиться специалист в предметной области, поскольку за него никто лучше задачу не поставит. Вероятно поэтому наиболее интересные примеры применения математической теории эксперимента были получены не математиками, ознакомившимися с физико-химией или технологией, а теми из химиков-технологов, кто владеет теорией эксперимента и достаточно глубоко учитывает физику изучаемых явлений и процессов при формализации задачи.

В технологии строительных материалов и изделий накоплен значительный опыт применения методов математического планирования исследований, а статистический аппарат регулярно используется во многих публикациях, количество и разнообразие которых затрудняет составление полного аналитического обзора. К сожалению, большое количество работ не всегда указывает на их высокое качество, так как часто при планировании эксперимента и интерпретации его результатов недостаточно полно и правильно учитываются особенности объекта исследования и имеющиеся информационные ресурсы. Не случайно поэтому предлагаются /36/ количественные оценки эффективности результатов моделирования, которые в какой-то мере

могут поставить барьер на пути работ, дискредитирующих идеи и методы математической теории эксперимента как по постановке, так и по уровню выполнения.

В настоящее время разработана, теоретически обоснована и внедряется в научно-исследовательскую и производственную практику вероятностно-статистическая концепция анализа и оптимизации инженерных решений в области строительного материаловедения и технологии, в которой системный подход и многофакторное моделирование на основе алгоритмизированного планирования синтезируется с физико-химической механикой и общей теорией композиционных материалов /36/.

Эта концепция в определенной мере отражает современную методологию экспериментального исследования и ориентирована на построение упрощенных экспериментально-статистических моделей, аппроксимирующих опытные данные, собранные на предметно-физических моделях в лабораторных условиях по планам эксперимента для различных регрессионных задач. Именно для лабораторного эксперимента сформировался наиболее обширный класс методов планирования и анализа его результатов. Следует подчеркнуть, что лабораторный эксперимент может не накладывать существенных ограничений на выбор модели и плана эмпирического исследования. Поэтому в случае необходимости имеется возможность усложнить постановку задачи и более полно учитывать особенности объекта исследования, используя новые классы моделей и синтезируя специальные планы эксперимента.

В технологических исследованиях, которые обычно имеют практическую направленность и не обязательно дают полное объяснение механизма явлений, чаще всего используются полиномиальные модели для количественных факторов. Эти модели просты и универсальны, как по форме, так и по алгоритмам построения, и позволяют с заданной точностью описать поведение системы. С помощью полиномиальных моделей расчетным путем могут решаться разнообразные задачи. Общие принципы решения типовых задач по одной или нескольким полиномиальным моделям сформулированы в работах /10, 36/.

Логическим выводом по аналогии результаты лабораторного исследования переносятся на промышленный объект, ради которого и выполнялось моделирование. Рассуждения по аналогии при таком переносе всегда связаны с риском ошибки и в истории познания не было недостатков в предосте-

режениях относительно аналогий.

Построенные полиномиальные модели, описывающие процесс в локальной области факторного пространства, являются по сути мгновенными статистическими фиксациями лабораторных ситуаций, которые не учитывают всех связей и отношений, существующих в производственных условиях. Поэтому может оказаться, что решения комплекса научных проблем на стадии лабораторных исследований недостаточно для того, чтобы заложить основы промышленной технологии производства изделий с качественно новыми характеристиками.

На актуальность перехода от результатов лабораторных исследований к промышленным обращается внимание, например в работе /16/ и многих других работах. Риск от аналогичности модели и сложности, связанные с его уменьшением, подробно рассмотрены в работе /36/, из которой следует, что для того, чтобы использовать полученные модели в заводских условиях в целях оптимизации и управления требуется их корректировка на основе промышленных экспериментов. При этом эксперимент, проводимый во время производственного процесса на действующем предприятии, может рассматриваться как натурное моделирование, отвечающее непосредственно задачам самого производства, его развития и совершенствования /8/. Однако отдельные публикации не дают достаточно полного представления об особенностях экспериментирования на действующем промышленном оборудовании. Эти особенности выявляются только после многолетней целенаправленной работы по мере накопления опыта в конкретном направлении.

Производственные условия значительно усложняют проблему экспериментирования, и реализация многих сложных планов эксперимента, используемых при лабораторном моделировании, при оптимизации заводской технологии часто практически невозможна и не всегда целесообразна. Тем более что оптимизировать технологический процесс раз и навсегда нельзя, и необходимы непрерывные или периодические управляющие воздействия, направленные на отслеживание ускользающего оптимума.

Немало трудностей возникает и при проведении лабораторного моделирования. Например тогда, когда не полностью сформулированы цели исследования, не очерчены границы факторного пространства, не сформированы критерии эффективности и имеются другие неопределенности, связанные с неполнотой наших знаний. В таких случаях, характерных для реальных проблем, затрудняется постановка задачи, и само исследование проводится с

целью постановки задачи. Да и при достаточно четкой (стандартной) постановке задачи возможности исследователя всегда ограничены (существует дефицит различных ресурсов), а тем более тогда, когда среди множества входных и выходных переменных имеются трудноизмеряемые.

Из-за трудностей измерения или оценивания показателей, характеризующих технологический процесс и свойства изделий, традиционными эмпирическими и теоретическими методами в сжатые сроки сложно или невозможно сформировать достаточные информационные ресурсы (научные основы) для принятия обоснованных решений. Может оказаться, что в подобной ситуации для решения задачи целесообразнее всего воспользоваться имитационным моделированием.

Перспективность применения имитационного моделирования в задачах технологии отмечается в многочисленных научных публикациях, например в /33/. Идеи имитационного моделирования начинают проникать и в учебную литературу для студентов строительско-технологических специальностей. В подтверждение этому следует упомянуть учебник /42/, авторы которого коснулись принципов имитационного моделирования и поделились опытом решения методом Монте-Карло задач анализа устойчивости рецептурно-технологических решений, принимаемых по экспериментально-статистическим моделям, а также показали возможность использования этого метода при моделировании структуры и свойств композиционных материалов. Однако эти примеры не позволяют студентам-технологам получить полноценного представления о практике имитационного моделирования при решении технологических задач. Возможно, такая ситуация объясняется сложностью моделирования задач технологии, отсутствием постановок задач, математических моделей, доведенных до диалоговых систем имитации, и опыта их создания. Накопленный автором опыт построения и использования имитационных моделей при разработке технологии рассмотрен в главе 4.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

2.1. Выбор вида модели

В предыдущей главе уже отмечалось, что при решении практических задач инженеру-технологу необходимо знать зависимость компонент y_j вектора выходных переменных (откликов)

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \quad (2.1)$$

от компонент x_i вектора входных переменных (факторов)

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (2.2)$$

рассматриваемой технологической системы (объекта). Математическое описание этой зависимости в общем виде может быть представлено выражением (1.5).

В технологических исследованиях для получения приближённого математического описания зависимости откликов от факторов часто наиболее перспективен эмпирический подход. В этом случае задача сводится к проведению эксперимента на изучаемом объекте в N точках факторного пространства, координаты которых определяют условия опытов и задаются значениями компонент вектора (2.2). В каждом опыте фиксируются случайные значения откликов, которые затем используются для построения и анализа статистических моделей, оценивающих зависимость откликов от факторов.

Среди статистических моделей, различающихся по алгоритму обработки опытных данных (см. разд. 1.1), в инженерной практике наиболее широко используются регрессионные модели вида

$$y = b \cdot f(x). \quad (2.3)$$

Здесь $b = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ (2.4)

– вектор неизвестных параметров модели,

$$f(x) = (f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)) \quad (2.5)$$

– вектор заданных функций входных переменных (2.2).

При построении модели вида (2.3) прежде всего необходимо составить себе какое-то представление о компонентах вектора (2.5). Исходя из принципа информационной достаточности (см. разд. 1.2) с этой задачей справиться тем легче, чем больше априорных сведений об изучаемом объекте имеется. Необходимый объём знаний, предшествующий эксперименту, позволит либо сразу

задать структуру модели, либо определиться с классом функций для компонент вектора (2.5). Могут быть приняты функции вида: $\sin \alpha x_i$, $\cos \alpha x_i$, $\operatorname{tg} \alpha x_i$, $\ln x_i$, $\exp(\alpha + \beta x_i)$, $1/(\alpha + \beta x_i)$ и т.д., причём величины α и β в этих функциях предполагаются известными. Практически это, наверное, можно сделать тогда, когда об изучаемом объекте исследователь имеет хотя бы смутное представление общетеоретического характера. При недостаточном объёме априорной информации модель может быть представлена с помощью полиномов от переменных x_i .

Если при k факторах аппроксимировать (лат. *approximo* – приближаюсь) выражение (2.3) полиномом первой степени (линейная модель, которая описывает плоскость в пространстве размера $k+1$), то оценка \hat{y} для y находится по формуле

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_i x_i + \dots + b_k x_k. \quad (2.6)$$

Здесь получаем следующее выражение для компонент вектора (2.5):

$$f(x) = (1, x_1, \dots, x_i, \dots, x_k).$$

Однако необходимой точности решений с помощью упрощенного описания (2.6) в технологических задачах добиваются редко. Поэтому модель должна учитывать прежде всего нелинейность влияния факторов на выход и явление синергизма (греч. *synergētikós* – совместный, согласованно действующий), т.е. не прямо пропорциональное приращение выхода при одновременном изменении двух и более факторов. Нелинейность проще всего учесть добавлением к полиному (2.6) ещё к слагаемым $b_{ii} x_i^2$, которые будут учитывать влияние x_i на y по квадратичной параболе. Синергизм двух факторов учитывается взаимодействиями $b_{ij} x_i x_j$, число которых $k(k-1)/2$. Добавление этих элементов к линейному полиному (2.6) приводит к модели в виде полного полинома второй степени

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i \leq k} b_i x_i + \sum_{i < j \leq k} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i \leq k} b_{ii} x_i^2. \quad (2.7)$$

Если все квадратичные элементы $b_{ii} = 0$, то будет получен неполный полином второй степени. Добавляя к (2.7) элементы, учитывающие тройные взаимодействия b_{ijl} , получим неполный полином третьей степени и т. д. Этот степенной ряд в общем случае бесконечен, но на практике ограничиваются конечным числом его членов, аппроксимируя тем самым неизвестную функцию (2.3) полиномом некоторой степени.

Достоинства полиномиальных моделей и их довольно широкое использование при решении строительно-технологических задач уже отмечались (см. разд. 1.3). Тем не менее необходимо отметить их большое значение ещё и в связи с тем, что с помощью полиномов любая непрерывная и «гладкая» функция может быть описана как угодно точно за счёт повышения степени полинома. Однако с увеличением степени полинома значительно увеличивается число параметров модели, оцениваемых по опытным данным, что приводит к весьма существенным затратам на дополнительный эксперимент и усложняет анализ полученной модели. Поэтому обычно используют полиномы не выше третьей степени.

Следует отметить, что требуемой точности описания изучаемой системы можно добиться за счёт использования различных по своей структуре эмпирических моделей (веер моделей). Выбор «наилучшей» модели является одной из наиболее сложных задач моделирования. Здесь нельзя получить однозначных ответов, так как для реализации такого выбора нет однозначной статистической процедуры и субъективные суждения оказываются составной частью любой используемой процедуры. Целесообразно выбирать модель из числа удовлетворяющих требуемой точности, руководствуясь принципом простоты описания. Если модель строится в виде полинома, то из возможного множества полиномов предпочтение нужно отдавать полиному, имеющему наименьшую степень и количество членов.

В настоящее время существует большое число подходов, алгоритмов и программ, связанных с выбором «наилучшего» уравнения регрессии. Подробное изложение некоторых из них имеется, например, в книге /13/.

Если вектор (2.5) задан, а модель (2.3) линейна относительно коэффициентов (в данной главе рассматриваются только такие модели), то при наличии результатов N опытов (выборки) могут быть найдены оценки \hat{b}_i коэффициентов модели, а затем проверены статистические гипотезы об адекватности модели и значимости найденных коэффициентов. Всё это выполняется с помощью одного из методов математической статистики, который называется регрессионным анализом. Этот метод рассматривается в обширной научной и учебной литературе, а также входит в программное обеспечение современных ЭВМ. Поэтому инженеру-технологу, имеющему вузовскую подготовку в области математической статистики, не составит большого труда использовать регрессионный анализ при решении задач, связанных с анализом опытных данных.

Следует помнить, что регрессионный анализ, как и любой статистический метод, применим при определённых предположениях, постулатах (лат. *postulatum* – требование). Рассмотрим следующие три основных постулата:

1) компоненты y_j вектора (2.1) – случайные величины с нормальным законом распределения;

2) дисперсия (лат. *dispersio* – рассеяние) в определении случайной величины y_j не зависит от её абсолютной величины;

3) компоненты x_i вектора (2.2) – неслучайные непрерывные величины, измеряемые с пренебрежимо малой ошибкой по сравнению с ошибкой в определении величин y_j .

По отношению к этим и любым другим постулатам нас интересуют два вопроса: как проверить выполнимость постулата и к чему приводит его нарушение?

На практике сложнее всего проверить выполнение первого постулата, так как процедуры, с помощью которых осуществляется эта проверка, требуют многократного повторения (десятки раз) каждого опыта в запланированном эксперименте. Планировать эксперимент по такой схеме в инженерных задачах обычно не реально. Поэтому при отсутствии априорных сведений о законе распределения случайной величины y приходится принимать первый постулат на веру. В дальнейшем по мере накопления и обработки опытных данных этот постулат можно проверить. Если в результате анализа опытных данных не окажется явных противоречий, то нет оснований отвергать принятый постулат.

При нарушении нормальности становится невозможным корректное установление вероятностей, с которыми справедливы те или иные высказывания. Поэтому нужно очень внимательно относиться к возможным нарушениям первого постулата. Когда данный постулат явно не соблюдается, то приходится прибегать к другим методам обработки опытных данных (метод максимума правдоподобия, непараметрического оценивания и др.), на которых мы не будем останавливаться.

Выполнимость второго постулата о статистической однородности дисперсий различных опытов проверяется довольно просто с помощью различных статистических критериев (например, критерия Кохрена). Неоднородность дисперсий часто косвенно указывает на то, что не соблюдается и первый постулат. При отсутствии однородности дисперсий можно

использовать преобразования y ($\ln y$, e^y , \sqrt{y} , y^{-1} и т.д.), которые основаны на содержательных гипотезах и делают дисперсии однородными. Однако такие преобразования могут затруднить интерпретацию модели, что вынуждает от них отказаться и решать задачу с неоднородными дисперсиями. Это приводит к использованию других математических процедур, которые здесь не рассматриваются.

Нарушение третьего постулата затрудняет реализацию запланированного эксперимента и поэтому обычно легко обнаруживается исследователем. При несоблюдении этого постулата следует отказаться от модели регрессионного анализа и использовать модели корреляционного, конъюнктного или дисперсионного анализа. Модели дисперсионного анализа будут рассмотрены в гл.3.

Кроме рассмотренных требований к входным и выходным переменным накладывается ещё условия на оценки \hat{b}_i , коэффициентов регрессии. Обратим внимание на то, что оценки \hat{b}_i , получаемые на основе обработки случайных результатов опытов, представляют собой некоторый случайный вектор. Точность оценок \hat{b}_i в общем случае зависит не только от дисперсии ошибок опытов (воспроизводимости эксперимента), но и от выбранной структуры модели и точек постановки опытов (плана эксперимента). Таким образом, нужно так спланировать эксперимент и обработать его результаты, чтобы найти наилучшие в определённом смысле оценки \hat{b}_i .

2.2. Метод наименьших квадратов, элементы планирования и статистического анализа эксперимента

При обработке результатов эксперимента всегда имеется риск не извлечь из них всей необходимой информации и прийти к выводам, которые не следуют из опытных данных. Не перейти разумную степень риска помогают статистические методы обработки данных. Изложение этих методов не входит в задачи данной работы. Однако коснуться особенностей одного из них необходимо с точки зрения построения рассматриваемого класса моделей. Среди разнообразных статистических методов обработки результатов эксперимента в нашем случае наиболее широко используется метод наименьших квадратов (МНК).

Разбираться с этим методом начнём с самого простого однофакторного случая. Пусть между откликом y и фактором x_1 , имеет место линейная связь.

Тогда её можно записать в виде уравнения прямой линии (уравнения регрессии)

$$y = b_0 + b_1 x_1. \quad (2.8)$$

Чтобы вычислить коэффициенты b_0 и b_1 проводят эксперимент, результаты которого могут вступать в некоторое противоречие с выдвинутой гипотезой относительно линейной связи. Не все опытные точки лежат строго на прямой линии. Это противоречие объясняется тем, что наши опыты прежде всего связаны с ошибками. Поэтому имеет место разность между опытным и вычисленным по уравнению регрессии значениями y в u -той точке эксперимента

$$y_u - b_0 - b_1 x_{1u} = e_u. \quad (2.9)$$

Величину отклонения e_u часто называют невязкой или остатком.

Невязка возникает из-за ошибки эксперимента и из-за неадекватности (непригодности) модели. Эти две причины смешаны и без дополнительной информации нельзя сказать, какая из них преобладает. Обычно с помощью повторных опытов оценивают ошибку эксперимента, а затем проверяют адекватность модели. В дальнейшем эти вопросы будут обсуждаться.

Сейчас мы хотели бы найти коэффициенты уравнения прямой линии, которая бы проходила через множество опытных точек с наименьшими отклонениями. Это желание (цель) может быть формализовано различным образом.

Для того, чтобы найти наилучшие оценки коэффициентов регрессии почти 200 лет назад Гаусс предложил такое условие

$$Q = \sum_{u=1}^N e_u^2 \Rightarrow \min, \quad (2.10)$$

которое приводит к методу наименьших квадратов.

В уравнении (2.8) два коэффициента. Значит для их отыскания нужно иметь два уравнения. Применяя метод наименьших квадратов, получим необходимые уравнения.

Перепишем (2.10) иначе

$$Q = \sum_{u=1}^N e_u^2 = \sum_{u=1}^N (y_u - b_0 - b_1 x_{1u})^2 \Rightarrow \min. \quad (2.11)$$

Минимум функции (2.11), если он существует, находим приравниванием нулю частных производных:

$$\frac{\partial Q}{\partial b_0} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial b_1} = 0.$$

После дифференцирования и простейших преобразований получим так называемую систему нормальных уравнений метода наименьших квадратов:

$$\begin{cases} Nb_0 + \sum_{u=1}^N x_u b_1 = \sum_{u=1}^N y_u, \\ \sum_{u=1}^N x_u b_0 + \sum_{u=1}^N x_u^2 b_1 = \sum_{u=1}^N y_u x_u. \end{cases} \quad (2.12)$$

Из этой системы уравнений с помощью определителей получаем окончательные формулы для вычисления коэффициентов регрессии

$$\begin{cases} b_0 = \frac{\sum_{u=1}^N y_u \sum_{u=1}^N x_{1u}^2 - \sum_{u=1}^N y_u x_{1u} \sum_{u=1}^N x_{1u}}{N \sum_{u=1}^N x_{1u}^2 - \left(\sum_{u=1}^N x_{1u} \right)^2}, \\ b_1 = \frac{N \sum_{u=1}^N y_u x_{1u} - \sum_{u=1}^N y_u \sum_{u=1}^N x_{1u}}{N \sum_{u=1}^N x_{1u}^2 - \left(\sum_{u=1}^N x_{1u} \right)^2}. \end{cases} \quad (2.13)$$

По ряду причин при дальнейшем изложении материала целесообразно пользоваться алгеброй матриц, которая является довольно универсальным языком современной науки и техники.

Перепишем рассмотренную процедуру МНК для однофакторного случая на матричном языке. В этой процедуре участвуют три множества элементов: элементы, задающие условия различных опытов; элементы, отражающие их результаты, и неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

В матричной форме можно записать

$$XB=Y, \quad (2.14)$$

где Y – матрица результатов эксперимента

$$Y_{(N \times 1)} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix},$$

B – матрица неизвестных коэффициентов

$$B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix},$$

X – расчётная матрица

$$X_{(N \times 2)} = \begin{bmatrix} X_{01} & X_{11} \\ X_{02} & X_{12} \\ \vdots & \vdots \\ X_{0N} & X_{1N} \end{bmatrix}.$$

Будем полагать, что элементы матрицы Y получены при проведении всех опытов без повторений или с одинаковым числом повторений. В последнем случае для расчёта оценок коэффициентов в качестве элементов матрицы Y используются средние значения повторных опытов. В матрице X условия опытов (план эксперимента) задаёт второй столбец, а первый столбец это вектор-столбец фиктивной переменной x_0 , которая принимает во всех опытах значение +1. Первый столбец введён для удобства вычисления коэффициентов. Это значит, что исходное уравнение (2.8) переписано так: $y = b_0 x_0 + b_1 x_1$.

Умножив обе части (2.14) слева на матрицу X^T , транспонированную по отношению к матрице X . Получим систему нормальных уравнений МНК

$$(X^T X)B = X^T Y. \quad (2.15)$$

Так как строки транспонированной матрицы получаются из столбцов исходной, то матрица X^T имеет вид

$$X_{(2 \times N)}^T = \begin{bmatrix} X_{01} & X_{02} & \cdots & X_{0N} \\ X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1N} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Матрица $(X^T X)$ называется информационной матрицей Фишера или матрицей системы нормальных уравнений (иногда её ещё называют матрицей моментов плана). В нашем случае она имеет размер (2×2) .

Чтобы записать элементы вектора B в явном виде найдём матрицу $(X^T X)^{-1}$, обратную матрице $(X^T X)$, и умножим на неё слева обе части выражения (2.15):

$$(X^T X)^{-1} (X^T X)B = (X^T X)^{-1} X^T Y. \quad (2.17)$$

Обратная матрица $(X^T X)^{-1}$, содержащая информацию о статистических характеристиках модели, играет ведущую роль при анализе получаемых моделей и их интерпретации. Эта матрица часто называется ковариационной.

Произведение обратной матрицы на прямую даёт единичную матрицу

$$E = (X^T X)^{-1} (X^T X),$$

которая в алгебре матриц играет ту же роль, что и единица в алгебре чисел. Элементы главной диагонали единичной матрицы состоят из единиц, а остальные элементы равны нулю.

В результате вместо (2.17) можем записать

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y. \quad (2.18)$$

Это и есть решение, вид которого не меняется и для многофакторного случая.

Если выполнены предпосылки регрессионного анализа, то полученные с помощью МНК оценки коэффициентов обладают некоторыми оптимальными в статистическом смысле свойствами: состоятельностью, несмещённостью, эффективностью и достаточностью. Оценка \hat{b} является состоятельной, если при увеличении объёма выборки она приближается к истинному значению коэффициента b ; несмещенной, если математическое ожидание её равно оцениваемому значению коэффициента; эффективной, если оценка характеризуется минимальной дисперсией; достаточной, если она включает максимум информации о коэффициенте.

Следует отметить, что решение системы нормальных уравнений возможно только тогда, когда матрица $(X^T X)$ невырождена. Определитель невырожденной матрицы не равен нулю, т. е. $\det(X^T X) \neq 0$. Вырожденная матрица, определитель которой равен нулю, не имеет обратной. Чтобы избежать вырождения матрицы $(X^T X)$ среди столбцов матрицы X не должно быть столбцов, являющихся линейными комбинациями других столбцов. Это требование обычно включают в систему постулатов регрессионного анализа и для его удовлетворения нужно соответствующим образом планировать эксперимент.

Напомним, что формула (2.18) справедлива только при проведении всех опытов без повторений или с одинаковым числом повторений. На практике опыты могут повторяться и не одинаковое число раз. Это вносит некоторые изменения в схему обработки данных. В связи с этим уточним запись формулы (2.18).

Для учёта информации о неодинаковой повторяемости опытов введём так называемую матрицу весов P размера $N \times N$, элементы главной диагонали которой равны числу повторных опытов соответствующих строк матрицы X

$$P = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n_N \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Результаты опытов следует задавать матрицей-столбцом средних арифметических значений отклика для каждого u -го опыта:

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \vdots \\ \bar{y}_N \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Тогда вместо формулы (2.18) для расчёта коэффициентов регрессии можно пользоваться уравнением, вывод которого приведён, например, в работе [1]:

$$B = (X^T P X)^{-1} (X^T P \bar{Y}). \quad (2.21)$$

После получения МНК-оценки модели следует её обычный статистический анализ, который прежде всего состоит из проверки гипотезы об адекватности построенной модели и проверки гипотезы о значимости её коэффициентов. Совокупность МНК и этих двух процедур и составляют понятие регрессионного анализа.

Напомним, что процедура проверки статистической гипотезы предусматривает сопоставление некоторых критериев, вычисляемых по опытными данным, со значениями этих критериев, представленными в табличной форме и определёнными в предположении, что проверяемая гипотеза верна при выбранном уровне значимости α (степень риска). Уровню значимости соответствует доверительная вероятность $1 - \alpha$. Если, например, уровень значимости выбирают равным 0,05 (что характерно для инженерных задач), то это означает, что допускается вероятность неверного решения 5% и доверительная вероятность верного – 95%.

При наличии МНК-оценки модели для каждой u -той опытной точки по аналогии с (2.9) можно найти остаток (невязку), объясняемый неадекватностью модели и ошибкой эксперимента. Затем по всем опытам вычислить сумму квадратов остатков, которая характеризует точность модели. Будем называть её остаточной суммой квадратов и обозначать $S_{\text{ост}}$. Эта количественная мера зависит от числа коэффициентов в модели. Если число коэффициентов увеличивать и оно станет равным числу опытов, то получим $S_{\text{ост}}=0$.

Поэтому в качестве характеристики точности модели предпочитают использовать так называемую остаточную дисперсию или дисперсию адекватности

$$s_{ад}^2 = \frac{S_{ост}}{\nu_1} = \frac{\sum_{u=1}^N (y_u - \hat{y}_u)^2}{\nu_1}, \quad (2.22)$$

где y_u и \hat{y}_u – значения отклика в u -том опыте, соответственно определённое экспериментально и рассчитанное по полученному уравнению регрессии; ν_1 – число степеней свободы, определяемое как

$$\nu_1 = N - p, \quad (2.23)$$

где p – число параметров модели (включая b_0), вычисленных по результатам N опытов.

Для проверки гипотезы об адекватности модели необходимо сопоставить полученную точность модели ($s_{ад}^2$) с величиной, характеризующей ошибку эксперимента. В качестве такой величины используют оценку дисперсии отклика y , которую будем называть дисперсией воспроизводимости эксперимента и обозначать s_y^2 . Эта дисперсия может быть известна и до начала эксперимента. Например, из литературы или собственных опытов. Чаще всего её оценивают в процессе самого эксперимента, повторяя (дублируя) опыты. Сделать это можно в одном, нескольких или во всех опытах планируемого эксперимента.

Результаты испытаний образцов-близнецов (из одного замеса, одновременная обработка в одинаковых условиях и т. д.) нельзя рассматривать как повторные опыты. Образцы для повторных опытов должны заново проходить все операции, связанные с их изготовлением. Более подробно данный вопрос рассмотрен, например, в работе В.А.Вознесенского /9/.

В зависимости от характера дублирования опытов используются различные формулы для определения дисперсии воспроизводимости.

В эксперименте может несколько раз дублироваться только один u -тый опыт. Тогда дисперсия подсчитывается по формуле

$$s_y^2 = s_{yu}^2 = \frac{\sum_{q=1}^{n_u} (y_{uq} - \bar{y}_u)^2}{\nu_u}, \quad (2.24)$$

где y_{uq} – результат q -того повторения u -того опыта; \bar{y}_u – среднее арифметическое значение всех n_u повторений u -того опыта; $\nu_u = n_u - 1$ – число степеней свободы u -того опыта.

Заметим, что перед вычислением \bar{y}_u имеет смысл исключить возможные промахи с помощью соответствующих статистических критериев (см., например, /1/).

Если каждый опыт в эксперименте повторялся n раз, то мы приходим к формуле

$$s_y^2 = \frac{\sum_{u=1}^N s_{yu}^2}{N} = \frac{\sum_{u=1}^N \sum_{q=1}^n (y_{uq} - \bar{y}_u)^2}{N(n-1)}. \quad (2.25)$$

Для этой дисперсии степень свободы $\nu_2 = N(n-1)$.

Прежде чем пользоваться формулой (2.25), необходимо проверить однородность ряда из N полученных дисперсий. Для случаев, когда каждый опыт повторялся одинаковое число раз, можно воспользоваться G – критерием Кохрена. При этом рассматриваются дисперсии всех опытов и находится наибольшая s_{\max}^2 , которая делится на сумму всех дисперсий

$$G^{\text{расч}} = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{u=1}^N s_{yu}^2}. \quad (2.26)$$

Гипотеза об однородности дисперсий принимается, если

$$G^{\text{расч}} < G^{\text{табл}}, \quad (2.27)$$

где $G^{\text{табл}}$ – G -критерий, взятый из таблицы в зависимости от уровня значимости α , числа степеней свободы $\nu_u = n-1$ и числа опытов (дисперсий) N . Фрагмент таблицы значений G -критерия достаточный для примеров данной работы приведён в приложении 1.

Рассмотрим теперь случай неравномерного дублирования опытов. Прежде всего по формуле (2.24) подсчитывают дисперсии каждого опыта. Затем определяют дисперсию воспроизводимости эксперимента из выражения

$$s_y^2 = \frac{\sum_{u=1}^N \nu_u s_{yu}^2}{\sum_{u=1}^N \nu_u}. \quad (2.28)$$

Знаменатель этого отношения определяет число степеней свободы дисперсии.

При этом однородность ряда дисперсий проверяют по критерию Бартлетта (см., например, /1/).

Сейчас имеется возможность сопоставить точность полученной модели с ошибкой эксперимента и проверить гипотезу об адекватности модели. Эту гипотезу чаще всего проверяют с помощью F-критерия (критерия Фишера). Его расчётное значение находится из отношения дисперсий

$$F_{\nu_1, \nu_2}^{\text{расч}} = \frac{s_{\text{ад}}^2}{s_y^2}, \quad (2.29)$$

определённых при соответствующих степенях свободы ν_1 и ν_2 .

Гипотезу об адекватности модели принимают тогда, когда рассчитанное значение F-критерия не превышает табличного (см. приложение 2) для выбранного уровня значимости α и степеней свободы числителя ν_1 и знаменателя ν_2 .

Следует отметить, что в зависимости от способа дублирования опытов дисперсию $s_{\text{ад}}^2$ в формуле (2.29) рассчитывают по-разному.

При отсутствии в эксперименте повторных опытов $s_{\text{ад}}^2$ определяется по формуле (2.22).

При дублировании только одного опыта, например u -того,

$$s_{\text{ад}}^2 = \frac{n_u (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2 + \sum_{u=2}^N (y_u - \hat{y}_u)^2}{\nu_1}. \quad (2.30)$$

При неравномерном дублировании опытов

$$s_{\text{ад}}^2 = \frac{\sum_{u=1}^N n_u (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2}{\nu_1}. \quad (2.31)$$

При равномерном дублировании опытов

$$s_{\text{ад}}^2 = \frac{n_u \sum_{u=1}^N (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2}{\nu_1}. \quad (2.32)$$

Во всех случаях число степеней свободы ν_1 для дисперсии $s_{\text{ад}}^2$ определяется по формуле (2.23.)

Ещё один этап обработки данных связан с проверкой гипотезы о статистической значимости коэффициентов модели. Для этого прежде всего рассчитывают дисперсии оценок коэффициентов, необходимые для проверки гипотезы значимости

$$s_{b_i}^2 = c_{ii} s_y^2, \quad (2.33)$$

где c_{ii} – диагональные элементы матрицы $(X^T X)^{-1}$ или $(X^T P X)^{-1}$.

Затем для коэффициента b_i устанавливается доверительный интервал

$$\Delta_{b_i} = t^{\text{табл}} \cdot s_{b_i}, \quad (2.34)$$

где t – критерий Стьюдента, находящийся из соответствующих таблиц (см. приложение 3), для выбранного уровня значимости α (обычно 0,05) и числа степеней свободы ν при определении дисперсии s_y^2 ; $s_{b_i} = \sqrt{s_{b_i}^2}$ – средне-квадратическая ошибка.

Коэффициент b_i считается статистически значимым (значимо отличающимся от нуля), если его абсолютная величина превышает величину доверительного интервала

$$|b_i| \geq \Delta_{b_i}. \quad (2.35)$$

Пользоваться такой проверкой можно тогда, когда матрица $(X^T X)^{-1}$ диагональна. Это становится возможным, если для любых двух различных столбцов матрицы X выполняется условие ортогональности

$$\sum_{u=1}^N x_{iu} \cdot x_{ju} = 0, \quad i \neq j. \quad (2.36)$$

План эксперимента, удовлетворяющий условию (2.36), называется ортогональным. Благодаря этому свойству планов эксперимента имеется возможность оценивать все коэффициенты регрессии независимо друг от друга и поэтому исключать или добавлять новые коэффициенты без пересчёта уже найденных, упрощая или усложняя модель. Независимыми друг от друга оказываются и доверительные границы для оценок коэффициентов регрессии /28/.

В общем случае матрица $(X^T X)^{-1}$ недиагональна, и её недиагональные элементы c_{ij} оценивают статистическую зависимость между соответствующими коэффициентами b_i и b_j . Поэтому нельзя проверить значимость каждого коэффициента в отдельности и возникает много трудностей при интерпретации полученной модели. Тем не менее соотношение (2.35) можно рассматривать как средство ранжировки факторов и использовать, например, процедуру последовательного исключения незначимых факторов /3/. Для выявления значимых факторов используются и другие довольно многочисленные вычислительные процедуры реализуемые на ЭВМ.

Естественно, для того чтобы избежать неприятностей, связанных с некорректным оцениванием параметров модели по опытным данным, необходимо при выборе плана эксперимента (матрица X) как можно полнее обеспечивать условие ортогональности (2.36).

В первой главе отмечались основные преимущества планирования эксперимента, способствующие его широкому использованию в технологических исследованиях и при построении экспериментально-статистических моделей. В предыдущем материале данной главы также неоднократно указывалось на необходимость планирования эксперимента, которое в конечном счёте может значительно повысить эффективность эмпирического исследования.

Различные вопросы планирования эксперимента подробно рассмотрены в обширной научной и учебной литературе, например, /1, 3, 9, 28, 42 /. Эти и другие многочисленные работы дают возможность инженеру-технологу при соответствующих усилиях выбрать эффективный план эксперимента практически для любой конкретной задачи, связанной с построением экспериментально-статистических моделей. При выборе плана эксперимента очень удобным является справочник-каталог /38/, в котором приведены таблицы планов эксперимента для факторных и полиномиальных моделей.

В дальнейшем мы ещё неоднократно коснёмся особенностей применения планирования эксперимента при решении конкретных задач. Завершая же данный раздел целесообразно пояснить использование рассмотренных в общем виде процедур на численных примерах, описанных на матричном языке.

2.3. Примеры построения регрессионных моделей

Пример 2.1

Параметр y , характеризующий прочность волокнистого композита, зависит от объёмной концентрации волокна V_b . Эту зависимость из физических соображений можно считать линейной

$$y = b_0 + b_1 \cdot V_b.$$

В матричной записи

$$XB=Y.$$

Для оценивания коэффициентов линейной модели, меняя V_b от 0 с шагом 0,1, провели пять опытов без повторений. Результаты опытов (в условных единицах) представлены вектором

$$Y = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,9 \\ 3,0 \\ 3,7 \\ 5,2 \end{bmatrix}.$$

Расчётная матрица, второй столбец которой задаёт условия опытов,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0,1 \\ 1 & 0,2 \\ 1 & 0,3 \\ 1 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

Вектор коэффициентов

$$B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}.$$

Для вычисления этих коэффициентов в соответствии с (2.18) найдём последовательно матрицу X^T :

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix};$$

матрицу $X^T X$:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0,1 \\ 1 & 0,2 \\ 1 & 0,3 \\ 1 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0,3 \end{bmatrix};$$

определитель:

$$\det(X^T X) = \det \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0,3 \end{bmatrix} = 0,5;$$

обратную матрицу $(X^T X)^{-1}$:

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,6 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix};$$

матрицу $X^T Y$:

$$X^T Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,9 \\ 3 \\ 3,7 \\ 5,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 3,98 \end{bmatrix}.$$

По формуле (2.18) находим

$$B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 3,98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,04 \\ 9,8 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, МНК-оценка линейной модели имеет вид:

$$\hat{y} = 1,04 + 9,8V_b.$$

Отметим, что рассматривать полученную модель нужно совместно с матрицей $(X^T X)^{-1}$, которая оказалась недиагональной. Следовательно, коэффициенты коррелируют друг с другом и для них приходится строить совместную доверительную область, задаваемую эллипсом рассеяния /28/.

Для упрощения вычислений можно было заменить V_b нормированной переменной x_1

$$x_1 = \frac{V_b - 0,2}{0,2}$$

и оценивать коэффициенты модели $y = b_0 + b_1 x_1$.

Тогда получим следующие результаты:

$$X = \begin{matrix} & x_0 & x_1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 \\ -0,5 \\ 0 \\ 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -0,5 & 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что для столбцов матрицы X выполняется условие ортогональности (2.36).

Далее вычисляем:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -0,5 & 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -0,5 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0,5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{bmatrix},$$

$$\det(X^T X) = \det \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{bmatrix} = 12,5,$$

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}^T \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -0,5 & 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,9 \\ 3 \\ 3,7 \\ 5,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 4,9 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 4,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1,96 \end{bmatrix},$$

$$\hat{y} = 3 + 1,96x_1.$$

При замене нормированной переменной x_1 на переменную V_b этот результат совпадает с полученным ранее. Однако при использовании нормированной переменной вычислительная процедура значительно упрощается. Матрица $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ получилась диагональной. Поэтому сразу можно записать ей обратную, так как на главной диагонали матрицы, обратной к диагональной, будут стоять числа, обратные соответствующим числам, стоящим на диагонали прямой матрицы. Можно оценивать коэффициенты независимо друг от друга. Чтобы воспользоваться такой возможностью необходимо иметь оценку дисперсии воспроизводимости эксперимента s_y^2 .

Дисперсия воспроизводимости, принятая по априорным данным, оказалась равной $s_y^2 = 0,0333$ при степенях свободы $\nu_2 = 3$.

Для дисперсий оценок коэффициентов, согласно (2.33), получаем

$$s_{b_0}^2 = 0,2 \cdot s_y^2 = 0,000666,$$

$$s_{b_1}^2 = 0,4 \cdot s_y^2 = 0,001332.$$

Для выбранного уровня значимости $\alpha = 0,05$ и числа степеней свободы $\nu = 3$ из приложения 3 нашли табличное значение t-критерия $t_{0,05,3}^{\text{табл}} = 3,18$. Затем по формуле (2.34) подсчитали доверительные интервалы коэффициентов регрессии

$$\Delta_{b_0} = 3,18 \sqrt{0,000666} = 0,082,$$

$$\Delta_{b_1} = 3,18 \sqrt{0,001332} = 0,116.$$

В силу (2.35) коэффициенты модели следует признать статистически значимыми.

Теперь проверим адекватность модели. При отсутствии повторных опытов дисперсию адекватности определяем по формуле (2.22). Числитель этой формулы (остаточная сумма квадратов) в матричной форме имеет вид

$$\sum_{u=1}^N (y_u - \hat{y}_u) = (Y - \hat{Y})^T (Y - \hat{Y}),$$

где

$$Y - \hat{Y} = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,9 \\ 3 \\ 3,7 \\ 5,2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1,04 \\ 2,02 \\ 3 \\ 3,98 \\ 4,96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,16 \\ -0,12 \\ 0 \\ -0,28 \\ 0,24 \end{bmatrix}.$$

Транспортирование и перемножение дают

$$(Y - \hat{Y})^T \cdot (Y - \hat{Y}) = [0,16 \quad -0,12 \quad 0 \quad -0,28 \quad 0,24] \cdot \begin{bmatrix} 0,16 \\ -0,12 \\ 0 \\ -0,28 \\ 0,24 \end{bmatrix} = 0,176.$$

Знаменатель формулы (2.22) (степень свободы) вычисляем по (2.23)

$$v = 5 - 2 = 3.$$

Тогда дисперсия адекватности равна

$$s_{ад}^2 = 0,176/3 = 0,0587.$$

Гипотезу об адекватности модели проверим по F-критерию. Найдём его расчётное значение по формуле (2.29):

$$F_{3;3}^{расч} = 0,0587/0,0333 = 1,76.$$

При уровне значимости $\alpha = 0,05$ табличное значение F-критерия (см. приложение 2) $F_{0,05;3;3}^{табл} = 9,28$.

Так как $F^{расч} < F^{табл}$, гипотеза об адекватности модели при 5%-ном уровне значимости не отвергается.

Пример 2.2

Прочность бетона у зависит от факторов тепловлажностной обработки (продолжительность τ и температура изотермической выдержки T). Эту зависимость в окрестностях оптимума нельзя считать линейной. Для её оценки был выполнен эксперимент, в котором факторы варьировались в интервалах: $\tau = (5 \pm 3)$ ч; $T = (70 \pm 20)^\circ\text{C}$. Прочность бетона определялась сразу же после тепло-влажностной обработки в % к прочности того же бетона через 28 суток нормального твердения.

Введём нормированные переменные

$$x_1 = \frac{\tau - 5}{3}, \quad x_2 = \frac{T - 70}{20}$$

и используем модель в виде квадратичного полинома

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2.$$

Для оценки шести ($p = 6$) коэффициентов этой модели с помощью /38/ был выбран и реализован композиционный, симметричный, ортогональный, трёхуровневый план эксперимента, который приведён в табл. 2.1. Каждый опыт этого плана повторялся дважды.

Таблица 2.1

План и результаты эксперимента

Номер опыта	x_1	x_2	y'	y''	\bar{y}
1	-1	-1	49,8	54,4	52,1
2	1	-1	72,0	66,6	69,3
3	-1	1	75,9	73,5	74,7
4	1	1	73,2	77,0	75,1
5	-1	0	74,5	69,9	72,2
6	1	0	80,2	76,2	78,2
7	0	-1	49,7	54,7	52,2
8	0	1	79,9	72,1	76,0
9	0	0	71,1	66,7	68,9

Из табл. 2.1 следует, что число опытов $N = 9$, число повторений $n = 2$, степень свободы дисперсии адекватности $\nu_1 = N - p = 3$, степень свободы дисперсии воспроизводимости $\nu_2 = N(n - 1) = 9$, последний столбец средних результатов даёт матрицу \bar{Y} .

Дисперсии опытов, подсчитанные по формуле (2.24), оказались однородными по G-критерию при уровне значимости $\alpha = 0,05$. Расчётный G-критерий по (2.26) $G_{1,9}^{\text{расч}} = 30,42/106,44 = 0,2858$ меньше табличного $G_{0,05;1,9}^{\text{табл}} = 0,6385$ (см. приложение 1).

По формуле (2.25), учитывая дисперсии опытов, определяем дисперсию воспроизводимости $s_y^2 = 11,83$.

Запишем расчётную матрицу X

$$X = \begin{matrix} & x_0 & x_1 & x_2 & x_1 \cdot x_2 & x_1^2 & x_2^2 \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Вычисляем матрицы:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix};$$

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 5/9 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix};$$

$$X^T \bar{Y} = \begin{bmatrix} 618,7 \\ 23,6 \\ 52,2 \\ -16,8 \\ 421,6 \\ 399,4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_{12} \\ b_{11} \\ b_{22} \end{bmatrix} = (X^T X)^{-1} X^T \bar{Y} = \begin{bmatrix} 70,05 \\ 3,93 \\ 8,7 \\ -4,2 \\ 4,57 \\ -6,53 \end{bmatrix}.$$

Из ковариационной матрицы $(X^T X)^{-1}$ следует, что коэффициенты b_{11} и b_{22} коррелируют с b_0 . Таким образом

$$\hat{y} = 70,05 + 3,93x_1 + 8,7x_2 - 4,2x_1x_2 + 4,57x_1^2 - 6,53x_2^2.$$

В силу (2.33) дисперсии оценок коэффициентов

$$s_{b_0}^2 = (5/9)s_y^2 = 6,57; \quad s_{b_1}^2 = s_{b_2}^2 = (1/6)s_y^2 = 1,97;$$

$$s_{b_{12}}^2 = (1/4)s_y^2 = 2,96; \quad s_{b_{11}}^2 = s_{b_{22}}^2 = (1/2)s_y^2 = 5,91.$$

Тогда среднеквадратичные ошибки в определении коэффициентов

$$s_{b_0} = 2,563; \quad s_{b_1} = s_{b_2} = 1,404; \quad s_{b_{12}} = 1,72; \quad s_{b_{11}} = s_{b_{22}} = 2,431.$$

Для уровня значимости $\alpha = 0,05$ и числа степеней свободы $\nu = 9$ находим табличное значение t-критерия $t_{0,05;9} = 2,26$ (см. приложение 3) и по

$$(2.34) \quad \text{вычисляем доверительные интервалы коэффициентов}$$

$$\Delta_{b_0} = 2,26 s_{b_0} = 5,79; \quad \Delta_{b_1} = \Delta_{b_2} = 2,26 s_{b_1} = 3,17; \quad \Delta_{b_{12}} = 2,26 s_{b_{12}} = 3,89;$$

$$\Delta_{b_{11}} = \Delta_{b_{22}} = 2,26 s_{b_{11}} = 5,49.$$

Оказалось, что только абсолютное значение коэффициента $b_{11} = 4,57$ не превышает значение своего доверительного интервала. Поэтому коэффициент b_{11} можно считать незначимым и исключить из модели. Остальные коэффициенты вышли за рамки своих доверительных интервалов и их можно признать статистически значимыми.

Так как коэффициенты b_0 и b_{11} взаимосвязаны, то исключение коэффициента b_{11} требует пересчёта коэффициента b_0 и его дисперсии. После исключения столбца x_1^2 в матрице X и пересчёта получили: $b_0 = 73,1$;

$$s_{b_0}^2 = \frac{1}{3}s_y^2 = 3,94; \quad s_{b_0} = 1,986; \quad \Delta_{b_0} = 2,26 \cdot s_{b_0} = 4,49.$$

Итак, после исключения коэффициента b_{11} и пересчёта b_0 получим следующие уравнения регрессии:

$$y = 73,1 + 3,93x_1 + 8,7x_2 - 4,2x_1x_2 - 6,53x_2^2.$$

Для проверки адекватности этой модели подсчитаем результаты опытов, предсказанные с помощью модели, и по формуле (2.32) определим дисперсию адекватности $s_{ад}^2 = 2 \cdot 78,342 / 4 = 39,17$.

Окончательная модель включает пять коэффициентов, поэтому по формуле (2.23) число степеней свободы дисперсии адекватности $\nu = 9 - 5 = 4$.

Согласно (2.29), находим расчётное значение F-критерия

$$F_{4;9}^{расч} = 39,17 / 11,83 = 3,31.$$

При $\alpha = 0,05$ из приложения 2 имеем $F_{0,05;4;9}^{табл} = 3,63$. Табличное значение F-критерия превышает расчётное. Следовательно, гипотеза об адекватности построенной модели при 5%-ном уровне значимости принимается.

Далее полученная модель используется для решения различных задач, в том числе и производственных. Возникающие при этом трудности отмечались в разд. 1.3.

Пример 2.3

С помощью серии опытов на промышленном оборудовании необходимо было выяснить статистическую зависимость морозостойкости (y) кирпича глиняного обыкновенного от режимов механической переработки сырьевой смеси (фактор x_1), максимальной температуры (фактор x_2) и продолжительности выдержки при этой температуре (фактор x_3). Морозостойкость является основным показателем долговечности стеновых керамических материалов и определяется числом циклов попеременного замораживания и оттаивания. В линии переработки сырьевой смеси учитывались вальцы тонкого и грубого помола, а также бегуны.

На основании результатов предшествующих лабораторных исследований предполагалось, что экспериментальные данные могут быть представлены в виде модели, включающей линейные эффекты и эффекты взаимодействий факторов (неполный полином третьей степени)

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{12}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3.$$

Для оценки коэффициентов этой модели каждый фактор достаточно рассматривать только на двух уровнях, кодируя нижний уровень -1 , а верхний $+1$.

На нижнем уровне режима переработки сырьевой смеси ($x_1 = -1$) вальцы грубого и тонкого помола работали соответственно с зазором 20 и 10 мм, бегуны не включались. На верхнем уровне ($x_1 = +1$) зазоры вальцов уменьшались до 10 и 3 мм, а также включались бегуны. Нетрудно заметить, что верхний уровень фактора x_1 обеспечивал лучшую переработку сырьевой смеси по сравнению с нижним уровнем.

Максимальная температура обжига составляла 975 ($x_2 = -1$) и 1025°С ($x_2 = +1$). При этом выдержка производилась в течение 60 мин ($x_3 = -1$) и 120 мин ($x_3 = +1$). Обжиг образцов выполнялся в электрической печи.

Эксперимент проводился по факторному плану типа 2^3 ($N = 8$) /1/. Этот план удовлетворяет условиям ортогональности, симметрии и нормировки. Опыты выполнялись в случайном порядке с тремя повторениями ($n = 3$). План и результаты эксперимента приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

**Матрица планирования и результаты эксперимента
по определению морозостойкости глиняного кирпича**

Номер опыта	Факторы			Морозостойкость y , циклы		Дисперсия опыта $s_{y_u}^2$
	X_1	X_2	X_3	Средняя \bar{y}_u	Минимальная для отдельного образца	
1	-1	-1	-1	8,0	7	1,0
2	1	-1	-1	11,0	8	13,0
3	-1	1	-1	10,3	9	5,34
4	1	1	-1	13,0	11	3,0
5	-1	-1	1	9,3	8	5,34
6	1	-1	1	11,3	10	1,34
7	-1	1	1	14,0	11	7,0
8	1	1	1	19,0	16	9,0
Итого						45,02

Дисперсии опытов в табл. 2.2 определялись по формуле (2.24). Проверка однородности дисперсий выполнялась по G-критерию при уровне значимости $\alpha = 0,05$. Дисперсии опытов можно считать однородными, так как расчётное значение G-критерия по формуле (2.26) $G_{2,8}^{расч} = 13/45,02 = 0,289$ не превышает табличного $G_{0,05;2,8}^{табл} = 0,516$.

По формуле (2.25) с учётом данных табл. 2.2 находим дисперсию воспроизводимости эксперимента $s_y^2 = 45,02/8 = 5,63$. Число степеней свободы этой дисперсии равно $\nu = 8(3-1) = 16$.

Как и в примере 2.2 запишем расчётную матрицу X

$$X = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_2x_3 & x_1x_2x_3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Вычислим ковариационную матрицу $(X^T X)^{-1}$ и вектор-столбец коэффициентов B:

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{23} \\ b_{123} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,99 \\ 1,59 \\ 2,09 \\ 1,41 \\ 0,34 \\ 0,16 \\ 1,01 \\ 0,41 \end{bmatrix}.$$

Матрица $(X^T X)^{-1}$ свидетельствует о том, что все коэффициенты оцениваются независимо друг от друга и их дисперсии одинаковы и равны $s_b^2 = s_y^2 / 8 = 0,704$. Среднеквадратичная ошибка $s_b = 0,839$.

Доверительный интервал для всех коэффициентов одинаков и при 5%-ном уровне значимости ($\alpha = 0,05$; $\nu = 16$; $t_{0,05;16}^{\text{табл}} = 2,12$) оказался равным $\Delta_b = 0,839 \cdot 2,12 = 1,78$. Тогда значимыми можно признать только коэффициенты b_0 и b_2 . Заметим, что ранее лабораторный эксперимент при $\alpha = 0,05$ выявил статистическую значимость коэффициентов b_0 , b_1 , b_2 , b_3 и b_{23} . Поэтому было принято решение поискать значимые коэффициенты при более высоком уровне риска $\alpha = 0,1$.

При 10%-ном уровне значимости ($\alpha = 0,1$; $\nu = 16$; $t_{0,1;16}^{\text{табл}} = 1,75$) доверительный интервал для оценок коэффициентов $\Delta_b = 0,839 \cdot 1,75 = 1,47$. Ориентируясь на этот интервал, можно считать значимым ещё один коэффициент $b_1 = 1,59$. Было принято решение включить в модель коэффициенты b_0 , b_1 и b_2 , а остальные исключить. При ортогональном планировании исключение одних коэффициентов не требует пересчёта остальных.

Таким образом, получено следующее уравнение регрессии:

$$y = 11,99 + 1,59x_1 + 2,09x_2.$$

Адекватность этой модели проверяли по F-критерию. Вначале по формуле (2.32) рассчитали дисперсию адекватности $s_{\text{ад}}^2 = 15,39$ и по (2.23) её число степеней свободы $\nu = 8 - 3 = 5$, затем по формуле (2.29) определили расчётное значение $F_{5;16}^{\text{расч}} = 15,39 / 5,63 = 2,73$ и при 5%-ном уровне значимости ($\alpha = 0,05$) нашли табличный F-критерий $F_{0,05;5;16}^{\text{табл}} = 2,85$. Расчётный F-критерий оказался меньше табличного, что свидетельствует об адекватности модели.

Следует отметить, что повышение степени риска с $\alpha = 0,05$ до $\alpha = 0,1$ не даёт основания по данным промышленного эксперимента признать значимыми все эффекты, выявленные на лабораторной стадии исследования. Поэтому без корректировки переносить результаты лабораторных исследований на промышленную технологию нужно с большой осторожностью (подробнее см. разд. 1.3).

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

3.1. Вводные замечания. Типы моделей

В различных областях научной и практической деятельности встречается много задач с качественными факторами. Эти факторы являются дискретными по своей природе, их уровням не соответствует числовая шкала и порядок уровней безразличен. Так, если ведется наблюдение за изделиями, изготовленными на нескольких станках рабочими разных смен, то имеется минимум два фактора – станок и смена. Каждый фактор имеет несколько различных уровней. Уровнями фактора станок могут быть станок № 1, станок № 2 и т.д. Уровнями фактора смена могут быть первая, вторая и третья смены. В приведенном примере список факторов можно дополнить такими факторами, как различные партии сырья, способы хранения и т.д.

При изучении влияния качественных факторов на выходной параметр объекта исследования (отклик) обычно используется дисперсионный анализ, охватывающий широкий круг стандартных статистических методов. В настоящее время дисперсионный анализ является одним из наиболее общих и распространенных методов статистического анализа. С помощью дисперсионного анализа производится разложение общей дисперсии (простейшей меры рассеяния) некоторого измеряемого признака (отклика) на составляющие, характеризующие влияние изучаемых факторов и фактора случайности, с последующей оценкой существенности интересующих составляющих на фоне фактора случайности (ошибки эксперимента).

Успех применения дисперсионного анализа во многом зависит от того, насколько хорошо понята структура экспериментальных данных, построена соответствующая статистическая модель и составлен перечень вопросов, на которые требуется ответить с помощью этой модели. При проведении дисперсионного анализа используются модели трех типов. В модели I рассматриваются фиксированные уровни факторов, в модели II уровни выбираются случайным образом, а модель III представляет собой сочетание первых двух моделей. Необходимо отметить, что даже для одной и той же совокупности данных могут быть использованы различные модели, если требуется получить ответ на разные вопросы. В данной работе будет рассматриваться только модель I (параметрическая модель), на основе которой главным образом решается задача о сравнении множества средних,

полученных по данным соответствующим образом спланированного эксперимента.

Простейшую форму плана эксперимента имеем при сравнении k уровней одного и того же фактора A (однофакторный дисперсионный анализ). В этом случае на каждом i -том уровне фактора A выполняется n_i повторных наблюдений (опытов). При $n_i = n = \text{const}$ эксперимент включает $N = k \cdot n$ опытов и его результаты записываются в виде таблицы из k строк и n столбцов. В дальнейшем будем рассматривать случаи равночисленных повторных опытов. Если изучается влияние фактора A на k уровнях и фактора B на r уровнях (двухфакторный дисперсионный анализ), то в эксперименте реализуются все возможные комбинации уровней факторов A и B (полный перебор), каждая из которых наблюдается n раз. Тогда результаты эксперимента представляются в виде таблицы из $N = k \cdot r \cdot n$ опытов.

С увеличением числа изучаемых факторов полный перебор всех вариантов (полный факторный эксперимент, обладающий рядом оптимальных свойств) приводит к большому числу опытов, выполнение которых может быть нереальным. Поэтому перед экспериментатором встает задача сокращения числа опытов при сохранении оптимальных свойств плана.

Ограниченный объем учебного пособия не позволяет рассмотреть все многообразие планов дисперсионного анализа. Поэтому в данной работе рассматриваются лишь некоторые многофакторные планы, построенные на основе комбинаторной конфигурации в виде латинских квадратов и прямоугольников Юдена. Эти планы позволяют равномерно сканировать многофакторное пространство не производя полного перебора вариантов и оценивать параметры линейных моделей, а в специальных случаях и нелинейных моделей.

3.2. Латинские квадраты. Основные понятия. Планы эксперимента

Латинским квадратом $n \times n$ называется квадратная таблица из n элементов (букв или чисел) такая, что каждый из них встречается только один раз в каждой строке и каждом столбце [12]. Из трех элементов образуется латинский квадрат 3×3

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{array} \quad (3.1)$$

Из четырех элементов – латинский квадрат 4×4 и т.д. При решении практических задач размер латинских квадратов обычно не превышает 12×12 .

Латинский квадрат называется стандартным, если у него элементы первой строки и первого столбца построены в стандартном порядке (если буква, то в алфавитном порядке, если числа, то в порядке натурального ряда). Квадрат (3.1) является стандартным. Путем перестановок строк или столбцов стандартного квадрата можно получить ряд нестандартных. Так, всего существует два латинских квадрата 2×2 . Можно построить 12 различных 3×3 латинских квадратов.

Простейшим способом построения латинских квадратов является одношаговая циклическая перестановка букв, при которой первая буква исходной последовательности передвигается в конец и получается новая последовательность. С помощью такой перестановки построен квадрат (3.1). При последовательном планировании эксперимента используются упаковочные формы квадратов. Например, латинский квадрат 4×4 может быть представлен в виде упаковки четырех латинских квадратов 2×2 :

$$\begin{array}{cc|cc}
 a & b & c & d \\
 b & a & d & c \\
 c & d & a & b \\
 d & c & b & a
 \end{array} \quad (3.2)$$

Два $n \times n$ латинских квадрата взаимно ортогональны, если при наложении одного квадрата на другой каждый символ одного квадрата встретится один и только один раз с каждым символом другого квадрата. Если элементы одного квадрата обозначить латинскими буквами, а другого – греческими, то два взаимно ортогональных квадрата называют греко-латинским квадратом (латинским квадратом второго порядка).

Рассмотрим пример построения 3×3 греко-латинского квадрата. Для этого построим квадрат 3×3 из латинских букв с помощью одношаговой циклической перестановки букв слева направо, а квадрат 3×3 из греческих букв построим переставляя буквы наоборот справа налево. Эти два квадрата накладываем один на другой и получаем греко-латинский квадрат:

I	II	Наложение I и II	
$A \quad B \quad C$ $\leftarrow \quad \rightarrow$ $B \quad C \quad A$ $\leftarrow \quad \rightarrow$ $C \quad A \quad B$	$\alpha \quad \beta \quad \gamma$ $\leftarrow \quad \rightarrow$ $\gamma \quad \alpha \quad \beta$ $\leftarrow \quad \rightarrow$ $\beta \quad \gamma \quad \alpha$	$A\alpha \quad B\beta \quad C\gamma$ $B\gamma \quad C\alpha \quad A\beta$ $C\beta \quad A\gamma \quad B\alpha$	(3.3)

Три ортогональных квадрата, наложенные друг на друга, образуют гипер-греко-латинский квадрат (латинский квадрат третьего порядка).

Множество латинских квадратов называется сбалансированным, если в этом множестве каждый символ (элемент) в каждой возможной позиции появляется один и только один раз. Сбалансированное множество для квадрата размера $n \times n$ состоит из n таких квадратов, построенных с помощью циклической перестановки столбцов или строк. Например, для 3×3 квадрата после циклической перестановки столбцов получаем сбалансированное множество из трех квадратов:

$$\begin{array}{ccc}
 a & b & c \\
 c & a & b \\
 b & c & a
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 b & c & a \\
 a & b & c \\
 c & a & b
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 c & a & b \\
 b & c & a \\
 a & b & c
 \end{array}
 \quad (3.4)$$

Первоначально латинские квадраты получили широкое применение в сельскохозяйственных экспериментах с целью исключения влияния источников неоднородностей. Например, при использовании латинского квадрата каждая строка и столбец квадрата показывали положение участка земли на поле, в фруктовом саду, а элементы (символы) квадрата обозначали виды удобрений, растений, способы обработки, которые сравнивались по эффективности. При сравнении уровней основного фактора, соответствующих элементам квадрата, такой план эксперимента позволяет существенно снизить нежелательное влияние колебаний естественного плодородия при переходе от одного участка поля к другому. Затем планы такого рода нашли применение в других областях, в том числе и в промышленных исследованиях.

Латинские квадраты также могут быть использованы для получения дробной реплики от полного факторного эксперимента типа n^k . Если строки, столбцы и символы латинского квадрата употребить для обозначения уровней трех факторов, то каждая клетка (ячейка) квадрата будет показывать комбинацию уровней первого, второго и третьего факторов. Таким образом, получается n^2 различных комбинаций уровней факторов по сравнению с n^3 возможными комбинациями. Поэтому латинский квадрат $n \times n$ можно рассматривать как $1/n$ реплику от полного факторного эксперимента n^3 . Пример такого плана ($n = 3$) показан в табл. 3.1 в виде латинского квадрата и матрицы планирования.

Этот план содержит $N = 3^2 = 9$ различных опытов, что в три раза меньше по сравнению с полным факторным экспериментом $N = 3^3 = 27$,

представляющим собой три сбалансированных 3×3 латинских квадрата типа (3.4).

Таблица 3.1

План типа латинского квадрата 3×3

Фактор А	Фактор В		
	b_1	b_2	b_3
a_1	c_1	c_2	c_3
a_2	c_3	c_1	c_2
a_3	c_2	c_3	c_1

Матрица планирования

№ опыта	Факторы			Результат опыта y_u
	А	В	С	
1	a_1	b_1	c_1	y_1
2	a_1	b_2	c_2	y_2
3	a_1	b_3	c_3	y_3
4	a_2	b_1	c_3	y_4
5	a_2	b_2	c_1	y_5
6	a_2	b_3	c_2	y_6
7	a_3	b_1	c_2	y_7
8	a_3	b_2	c_3	y_8
9	a_3	b_3	c_1	y_9

При планировании эксперимента следует иметь в виду, что латинские квадраты как дробные реплики наиболее целесообразно использовать в тех случаях, когда имеются основания предполагать, что факторы не взаимодействуют друг с другом. Должное внимание уделяется случайному выбору квадрата из множества трансформаций. Обычно выбирается стандартный квадрат, а распределение уровней, соответствующих факторов по строкам, столбцам и буквам производится случайным образом.

Если в эксперименте исследуется действие четырех факторов А, В, С и D, каждый из которых варьируется на n уровнях, то в качестве плана эксперимента можно употребить латинский квадрат второго порядка (греко-латинский квадрат), получающийся после наложения друг на друга двух ортогональных латинских квадратов одинакового размера. В греко-латинском квадрате имеется n^2 различных комбинаций уровней факторов вместо n^4 таковых в полном факторном эксперименте. Поэтому греко-латинский квадрат позволяет уменьшить объем эксперимента в n^2 раз и его можно рассматривать как $1/n^2$ реплику от полного факторного эксперимента. Наиболее часто в экспериментальных исследованиях применяются греко-

латинские квадраты размера $n = 3, 4, 5, 7$. Ортогональной пары латинских квадратов размера $n = 6$ не существует.

Латинский квадрат третьего порядка (гипер-греко-латинский квадрат) позволяет рассматривать пять факторов ($k = 5$) и может использоваться как $1/n^3$ реплика от факторного эксперимента типа n^3 . При этом минимальный размер квадрата равен четырем ($n=4$). В общем случае в квадратах, для которых могут быть построены гиперквадраты, максимальное число рассматриваемых факторов равно $n + 1$.

Планы эксперимента на основе латинских квадратов обладают рядом хороших статистических свойств: они симметричны, ортогональны и D-оптимальны. Эти планы могут оказаться очень полезными на первых этапах исследования при постановке задач отсеивающего эксперимента, позволяющего выделить перспективные или оптимальные комбинации уровней факторов и отсеять неприемлемые.

Наибольшим неудобством при применении латинских квадратов в реальном эксперименте можно считать то, что все факторы должны иметь одинаковое число уровней. Избежать этого ограничения позволяют специальные неполные латинские квадраты (латинские прямоугольники), предложенные Юденом и называемые квадратами Юдена. По существу это латинские квадраты, в которых отсутствует несколько строк (столбцов). Планы на основе латинских прямоугольников рассматриваются далее в разд. 3.5.

3.3. Математические модели и статистический анализ латинских квадратов

Латинские квадраты первого порядка пригодны для изучения влияния трех факторов А, В и С, если каждый из них варьируется на одинаковом числе уровней n и не взаимодействует друг с другом. В этом случае число различных опытов равно n^2 и результаты эксперимента представляются в виде линейной модели:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.5)$$

где y_{ijk} – экспериментальный результат, полученный при i -ом уровне фактора А, j -ом уровне фактора В и k -ом уровне фактора С; μ – общее среднее значение; α_i – эффект i -того уровня фактора А; β_j – эффект j -того уровня фактора В; γ_k – эффект k -того уровня фактора С; ε_{ijk} – случайный

остаток, включающий ошибку единичного измерения и все эффекты не предусмотренные линейной моделью.

Для параметров модели (3.5) выполняется условие

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{j=1}^n \beta_j = \sum_{k=1}^n \gamma_k = 0. \quad (3.6)$$

При полном переборе вариантов число опытов равно n^3 и можно построить следующую модель:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijk}, \quad (3.7)$$

где $(\alpha\beta)_{ij}$, $(\alpha\gamma)_{ik}$, $(\beta\gamma)_{jk}$ и $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ – эффекты взаимодействия соответствующих уровней факторов.

Следовательно, ценой, которую мы должны платить за уменьшение объема эксперимента в n раз, является игнорирование взаимодействий. Однако следует иметь в виду, что для некоторых значений n можно найти латинский квадрат, допускающий введение в модель некоторых взаимодействий.

Рассмотрим вычислительную процедуру дисперсионного анализа для латинского квадрата $n \times n$. Эта процедура имеет некоторые особенности в зависимости от наличия (или отсутствия) повторных наблюдений.

В эксперименте с однократными наблюдениями, реализованными в случайном порядке, принята следующая вычислительная процедура.

1. Подсчитываются итоги по строкам A_i , столбцам B_j и латинским буквам C_k . Так, для плана, приведенного в табл.3.1, получим:

$$A_1 = y_1 + y_2 + y_3, \quad A_2 = y_4 + y_5 + y_6, \quad A_3 = y_7 + y_8 + y_9,$$

$$B_1 = y_1 + y_4 + y_7, \quad B_2 = y_2 + y_5 + y_8, \quad B_3 = y_3 + y_6 + y_9,$$

$$C_1 = y_1 + y_5 + y_9, \quad C_2 = y_2 + y_6 + y_7, \quad C_3 = y_3 + y_4 + y_8.$$

2. Общий итог

$$G = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{j=1}^n B_j = \sum_{k=1}^n C_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_{ijk}.$$

3. Общая сумма квадратов

$$S_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_{ijk}^2 - G^2 / n^2.$$

4. Сумма квадратов для строки (фактор A)

$$S_A = \sum_{i=1}^n A_i^2 / n - G^2 / n^2.$$

5. Сумма квадратов для столбца (фактор В)

$$S_B = \sum_{j=1}^n B_j^2 / n - G^2 / n^2 .$$

6. Сумма квадратов для латинской буквы (фактор С)

$$S_C = \sum_{k=1}^n C_k^2 / n - G^2 / n^2 .$$

7. Остаточная сумма квадратов

$$S_{\text{ост}} = S_0 - (S_A + S_B + S_C).$$

8. Результаты расчета вносятся в таблицу дисперсионного анализа (табл. 3.2).

Таблица 3.2

**Дисперсионный анализ $n \times n$ латинского квадрата
с однократными наблюдениями**

Источник изменчивости	Степень свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Расчетный F-критерий
Фактор А	$\nu_A = n - 1$	S_A	$s_A^2 = S_A / \nu_A$	$F_A = s_A^2 / s_{\text{ост}}^2$
В	$\nu_B = n - 1$	S_B	$s_B^2 = S_B / \nu_B$	$F_B = s_B^2 / s_{\text{ост}}^2$
С	$\nu_C = n - 1$	S_C	$s_C^2 = S_C / \nu_C$	$F_C = s_C^2 / s_{\text{ост}}^2$
Остаток	$\nu_{\text{ост}} = (n - 1)(n - 2)$	$S_{\text{ост}}$	$s_{\text{ост}}^2 = S_{\text{ост}} / \nu_{\text{ост}}$	
Итого	$n^2 - 1$	S_0		

9. Существенность влияния факторов проверяется с помощью критерия Фишера. Если вычисленное по результатам эксперимента дисперсионное отношение $F^{\text{расч}}$ превосходит табличное $F_{\alpha, \nu_1, \nu_2}^{\text{табл}}$, найденное по распределению Фишера для выбранного уровня значимости α , при степенях свободы $\nu_1 = (n - 1)$ и $\nu_2 = \nu_{\text{ост}} = (n - 1)(n - 2)$, то влияние соответствующего фактора признается существенным, и наоборот, если $F^{\text{расч}} \leq F_{\alpha, \nu_1, \nu_2}^{\text{табл}}$, то не существенным.

Однако верификация (лат. *verificatio* – доказательство, подтверждение) последнего утверждения не делается, так как возможно, что фактор значим, но его значимость не могла быть проверена из-за потери чувствительности, связанной с увеличением остатка при наличии взаимодействий. Вопрос о значимости фактора остается открытым и для его выяснения нужно провести дополнительную серию опытов. Для этого в том же плане поставить

повторные опыты, оценить ошибку эксперимента и, сопоставив ее с остатком, определить суммарный вклад взаимодействий. Можно пойти другим путем и композиционно достроить латинский квадрат до полного факторного эксперимента p^3 , пользуясь рядом сбалансированных латинских квадратов, и оценить эффекты взаимодействий в соответствии с моделью (3.7). Выбор пути определяется конкретной ситуацией, но последний путь безусловно дает больше информации.

10. И наконец, с помощью различных критериев выполняется проверка значимости различия средних значений по строкам A_i/n , столбцам B_j/n и латинским буквам C_k/n . Чаще всего используется t - критерий Стьюдента.

Если в каждой ячейке латинского квадрата производится одинаковое число повторных опытов p , то результаты эксперимента можно представить в виде следующей модели:

$$y_{ijkm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \rho + \varepsilon_{ijkm}, \quad (3.8)$$

где m – номер повторного опыта ($m = 1, 2, \dots, p$); ρ – член, включающий все источники дисперсии (взаимодействия), которые не предсказаны линейной моделью; ε_{ijkm} – ошибка эксперимента; остальные обозначения те же, что и в модели (3.5).

Благодаря наличию повторных опытов случайный остаток линейной модели удается разложить на две составляющие ρ и ε_{ijkm} .

Вычислительная процедура начинается с подсчетов итогов по ячейкам T_{ij} , строкам A_i , столбцам B_j и латинским буквам C_k квадрата.

Затем рассчитываются суммы квадратов

$$S_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^p y_{ijkm}^2 - G^2 / n^2 p, \quad S_A = \sum_{i=1}^n A_i^2 / np - G^2 / n^2 p,$$

$$S_B = \sum_{j=1}^n B_j^2 / np - G^2 / n^2 p, \quad S_C = \sum_{k=1}^n C_k^2 / np - G^2 / n^2 p,$$

$$S_{вз} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T_{ij}^2 / p - G^2 / n^2 p - (S_A + S_B + S_C), \quad (3.9)$$

$$S_{ост} = S_0 - (S_A + S_B + S_C), \quad S_{ош} = S_{ост} - S_{вз}.$$

Сумму $S_{ош}$ можно определить независимо и проверить правильность вычислений. Результаты дисперсионного анализа представляются в виде табл. 3.3.

Таблица 3.3

**Дисперсионный анализ $n \times n$ латинского квадрата с повторными
равночисленными наблюдениями**

Источник изменчивости	Степень свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Расчетный F-критерий
Фактор А	$\nu_A = n - 1$	S_A	$s_A^2 = S_A / \nu_A$	$F_A = s_A^2 / s_{\text{ош}}^2$
В	$\nu_B = n - 1$	S_B	$s_B^2 = S_B / \nu_B$	$F_B = s_B^2 / s_{\text{ош}}^2$
С	$\nu_C = n - 1$	S_C	$s_C^2 = S_C / \nu_C$	$F_C = s_C^2 / s_{\text{ош}}^2$
Взаимодействи я	$\nu_{\text{вз}} = (n-1)(n-2)$	$S_{\text{вз}}$	$s_{\text{вз}}^2 = S_{\text{вз}} / \nu_{\text{вз}}$	$F_{\text{вз}} = s_{\text{вз}}^2 / s_{\text{ош}}^2$
Ошибка	$\nu_{\text{ош}} = n^2(p-1)$	$S_{\text{ош}}$	$s_{\text{ош}}^2 = S_{\text{ош}} / \nu_{\text{ош}}$	
Итого	$n^2p - 1$	S_0		

Значимость влияния факторов устанавливается как и ранее с помощью F-критерия. В данном случае удастся проверить адекватность описания опытных данных линейной моделью. Если дисперсионное отношение $F_{\text{вз}}^{\text{расч}} = s_{\text{вз}}^2 / s_{\text{ош}}^2 \leq F_{\alpha, \nu_{\text{вз}}, \nu_{\text{ош}}}^{\text{табл}}$, то гипотеза об адекватности линейной модели принимается, в противном случае ($F_{\text{вз}}^{\text{расч}} > F_{\alpha, \nu_{\text{вз}}, \nu_{\text{ош}}}^{\text{табл}}$) – отвергается. Верификацию гипотезы о незначимости влияния фактора мы не можем делать, так как его, например, положительный эффект может быть смешан с отрицательным эффектом взаимодействия. Тогда фактически значимый эффект фактора по расчету окажется незначимым.

Оценки параметров модели (3.8) находятся методом наименьших квадратов:

$$\begin{aligned} \mu &= G / n^2 p = \bar{G}, \quad \alpha_i = A_i / np - \bar{G}, \quad \beta_j = B_j / np - \bar{G}, \\ \gamma_k &= C_k / np - \bar{G}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Эти оценки позволяют просчитать значения отклика в интересующих нас комбинациях уровней факторов и потом найти оптимальные комбинации при условии адекватности модели.

Дисперсионный анализ при изучении влияния четырех факторов с использованием плана типа греко-латинского квадрата аналогичен дисперсионному анализу для латинского квадрата и фактически отличается от него добавлением суммы квадратов для четвертого фактора и тем, что число степеней свободы остаточной суммы квадратов уменьшается на $(n-1)$.

Математическая модель является обобщением модели для плана типа латинского квадрата. Так, при однократных наблюдениях она имеет вид:

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + \varepsilon_{ijkl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots, n, \quad (3.11)$$

где δ_l – эффект l-того уровня фактора D (четвертого фактора), а прочие обозначения те же, что и модели (3.5).

При повторных опытах выделяется эффект взаимодействий ρ :

$$y_{ijklm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + \rho + \varepsilon_{ijklm}, \quad m = 1, \dots, p. \quad (3.12)$$

Такое обобщение можно продолжить на пять и более факторов, используя планы типа гиперквадратов.

3.4. Пример построения параметрической модели с использованием плана типа латинского квадрата второго порядка

При выполнении утрат каменных стеновых конструкций памятников архитектуры часто используются отделочные растворы на основе цемента, имитирующие реставрируемый материал. Долговечность сцепления этих материалов зависит от большого числа факторов, среди которых было выделено четыре фактора, рассматриваемых на трех уровнях, выбранных на основании анализа априорных данных.

Фактор А – толщина отделочного слоя на уровне $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ и $a_3 = 7$ см.

Фактор В – засоленность камня на уровне $b_1 = 0$, $b_2 = 2,5$ и $b_3 = 5\%$.

Фактор С – тип добавки вводимой в растворную смесь, используемую для нанесения отделочного слоя, на уровне c_1 – без добавки; c_2 – добавка С-3 в количестве 0,4% от массы цемента; c_3 – добавка ЦСПК в количестве 0,3%.

Фактор D – способ подготовки поверхности камня перед нанесением отделочного слоя на уровне d_1 – без подготовки, d_2 – очистка щеткой и d_3 – очистка щеткой с выравниванием.

Факторы А и В являются количественными, а факторы С и D – качественными.

В качестве показателя долговечности сцепления камня с отделочным слоем принята величина силы отрыва отделочного слоя от поверхности каменного образца после 35 циклов одностороннего замораживания и оттаивания в климатической камере (остаточная прочность) y , Па $\cdot 10^5$.

На основании анализа априорных данных и профессионально-логических соображений было выдвинуто предположение о статистической незначимости взаимодействий рассматриваемых факторов и выбран план эксперимента типа греко-латинского квадрата 3×3 ($n=3$) с двумя повторными опытами ($p=2$) для оценки ошибки эксперимента. Тогда результаты эксперимента описываются моделью:

$$y_{ijklm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + \varepsilon_{ijklm} \quad (3.13)$$

В этой модели в отличие от модели (3.12) отсутствует слагаемое ρ , учитывающее суммарный эффект взаимодействий, так как для греко-латинского квадрата размера $n=3$ число степеней свободы суммы квадратов взаимодействий (S_{B3}) равно $(n-1)(n-3)=0$. В дальнейшем будет показано, что при $n=3$ и $S_{B3}=0$. Поэтому проверить адекватность описания опытных данных, выбранного плана, моделью (3.13) нельзя.

План эксперимента и результаты испытаний образцов на отрыв отделочного слоя приведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4

План эксперимента и результаты измерений остаточной прочности сцепления материалов у, Па·10⁵

Фактор A	Фактор B		
	b ₁	b ₂	b ₃
a ₁	0,08	4,25	3,8
	c ₁ d ₁	c ₂ d ₂	c ₃ d ₃
a ₂	0,40	3,90	3,7
	5,0	3,65	1,75
a ₃	c ₂ d ₃	c ₃ d ₁	c ₁ d ₂
	5,5	4,20	2,00
a ₃	6,75	2,3	2,48
	c ₃ d ₂	c ₁ d ₃	c ₂ d ₁
	6,30	2,6	3,60

В табл. 3.4 латинские буквы греко-латинского квадрата употреблены для обозначения уровней фактора C, а греческие буквы – для уровней фактора D. Все 18 испытаний проводились в случайном порядке. Для упрощения вычислений из каждого измеренного значения y вычли 3. Величина сумм квадратов и результаты анализа от этого не меняются. Полученные нормированные данные, а также некоторые предварительные результаты их обработки приведены в

табл.3.5. В ней показаны итоги по ячейкам T_{ij} , по строкам A_i , по столбцам B_j , их квадраты и общий итог $G = 8,36$.

Таблица 3.5

Предварительные расчеты по нормированным данным (y-3)

Фактор A	Фактор B			A_i	A_i^2
	b_1	b_2	b_3		
a_1	-2,92	1,25	0,8	-1,87	3,4969
	-2,6	0,9	0,7		
	-5,52	2,15	1,5		
a_2	2,0	0,65	-1,25	4,2	17,64
	2,6	1,20	-1,0		
	4,6	1,85	-2,25		
a_3	3,75	-0,7	-0,52	6,03	36,4978
	3,3	-0,4	0,6		
	7,05	-1,1	0,08		
B_j	6,13	2,9	-0,67	8,36	
B_j^2	37,5769	8,41	0,4489		

Итоги по уровням фактора C определяются как суммы итогов трех ячеек квадрата, в которых этот фактор имеет соответствующий уровень:

$$C_1 = T_{11} + T_{23} + T_{32} = -5,52 - 2,25 - 1,1 = -8,87;$$

$$C_2 = T_{12} + T_{21} + T_{33} = 2,15 + 4,6 + 0,008 = 6,83;$$

$$C_3 = T_{13} + T_{22} + T_{31} = 1,5 + 1,85 + 7,05 = 10,4$$

По аналогии находим итоги по уровням фактора D:

$$D_1 = -3,59; D_2 = 6,95; D_3 = 5,0.$$

Далее по (3.9) рассчитывается общая сумма квадратов S_o , суммы квадратов для факторов S_A , S_B , S_C , S_D , остатка $S_{ост}$ и ошибки $S_{ош}$:

$$S_o = \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^2 y_{ijklm}^2 \right) - (G^2 / n^2 p) = 60,2068 - 3,8828 = 56,3240;$$

$$S_A = \left(\sum_{i=1}^3 A_i^2 / np \right) - (G^2 / n^2 p) = 9,5830 - 3,8828 = 5,7002;$$

$$S_B = \left(\sum_{j=1}^3 B_j^2 / np \right) - (G^2 / n^2 p) = 7,7393 - 3,8828 = 3,8565;$$

$$S_C = \left(\sum_{k=1}^3 C_k^2 / np \right) - (G^2 / n^2 p) = 38,9143 - 3,8828 = 35,0315;$$

$$S_D = \left(\sum_{i=1}^3 D_i^2 / np \right) - (G^2 / n^2 p) = 14,3651 - 3,8828 = 10,4823;$$

$$S_{\text{ост}} = S_o - (S_A + S_B + S_C + S_D) = 56,3240 - (5,7002 + 3,8565 + 35,0315 + 10,4823) = 56,3240 - 55,0706 = 1,2534 = S_{\text{ом}}.$$

В данном случае $S_{\text{ост}} = S_{\text{ом}}$, так как сумма квадратов для взаимодействий

$$S_{\text{вз}} = \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij}^2 / p \right) - (G^2 / n^2 p) - (S_A + S_B + S_C + S_D) = 58,9534 - 3,8828 - 55,0706 = 0.$$

Для проверки правильности вычислений и допущения дисперсионного анализа об воспроизводимости опытов с равной точностью (однородность дисперсий опытов) были определены суммы квадратов отклонений внутри каждой ячейки (опыта) плана

$$S_{ij} = \sum_{m=1}^{p-2} (y_{ijklm} - T_{ij} / p)^2, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Эти суммы имеют одну степень свободы $\nu = p - 1 = 1$, поэтому дисперсия опыта $s_{ij}^2 = S_{ij} / \nu = S_{ij}$. Затем независимо от остальных сумм квадратов была найдена сумма квадратов для ошибки

$$S_{\text{ом}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 S_{ij} = 1,2534,$$

которая совпала с ранее вычисленной.

Однородность дисперсий опытов s_{ij}^2 проверялась с помощью G-критерия Кохрена. Оказалось, что экспериментальный G-критерий, найденный как отношение максимальной дисперсии отдельного опыта к сумме дисперсий всех девяти опытов, не превышает табличный, взятый из приложения 1 при выбранном уровне значимости $\alpha = 0,05$, числе степеней свободы числителя $\nu_u = 1$ (число степеней свободы отдельного опыта), числе сравниваемых дисперсий $N = 9$.

$$G^{\text{расч}} = 0,6272 / 1,2534 = 0,500 < G_{0,05;1;9}^{\text{табл}} = 0,640.$$

Следовательно, дисперсии во всех опытах с доверительной вероятностью 95% можно считать однородными.

Результаты дисперсионного анализа опытных данных сведены в табл.3.6.

Из табл.3.6 видно, что во всех случаях экспериментальный критерий Фишера значительно превышает критический, взятый при 5%-ном уровне

значимости и степенях свободы числителя $\nu_1 = 2$ и знаменателя $\nu_2 = 9$ (см. приложение 2). Таким образом, оказалось, что на прочность сцепления существенно влияют все четыре варьируемые фактора. В рассмотренном факторном пространстве наиболее сильное влияние на показатель y оказывает фактор С – тип добавки вводимой в растворную смесь.

Таблица 3.6

Дисперсионный анализ результатов эксперимента при изучении остаточной прочности сцепления материалов

Источник дисперсии	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Критерий Фишера	
				$F_{расч}$	$F_{\alpha=0,05}^{табл}$
Фактор А	2	5,7002	2,850	20,46	4,26
В	2	3,8565	1,928	13,85	4,26
С	2	35,0315	17,516	125,77	4,26
D	2	10,4823	5,241	37,63	4,26
Взаимодействия	0	0	0		
Ошибка	9	1,2534	0,139		
Итого	17	56,3240			

Проверка различия любых двух средних итогов для уровней каждого фактора производилась с помощью доверительного интервала для разности средних. Для этого определяем нормированную ошибку среднего $s_{\bar{y}} = \sqrt{s_{ош}^2 / np} = \sqrt{0,139/6} = 0,152$ и двусторонний t-критерий Стьюдента $t_{\alpha, n^2(p-1)}$, который находится при выбранном уровне значимости $\alpha = 0,05$ и степени свободы для ошибки $n^2(p-1) = 9$ ($t_{0,05,9} = 2,26$) (см. приложение 3). Произведение этих двух величин дает половину ширины доверительного интервала для средних значений при доверительной вероятности 0,95 $L/2 = s_{\bar{y}} \cdot t_{0,05,9} = 0,152 \cdot 2,26 = 0,344$. Половина ширины доверительного интервала для разности средних увеличивается в $\sqrt{2}$ раз и равняется $L'/2 = \sqrt{2} \cdot L/2 = \sqrt{2} \cdot 0,344 = 0,486$.

Для уровней фактора А, показанных в скобках, имеем следующие средние итоги $\bar{A}_i = A_i / np$: $-0,312(a_1)$; $0,700(a_2)$; $1,005(a_3)$. Видим, что величина разности между средними итогами уровней a_2 и a_1 , a_3 и a_1 превышает величину половины ширины доверительного интервала (0,486), а

для уровней a_3 и a_2 нет. Следовательно, увеличение толщины отделочного слоя с 3 см до 5 или 7 см приводит к статистически заметному росту прочности сцепления. Однако увеличивать толщину отделочного слоя свыше 5 см вряд ли целесообразно.

Средние значения итогов $\bar{B}_j = B_j / n_p$ для уровней фактора В дают такой ряд: 1,021 (b_1); 0,483 (b_2); -0,112 (b_3). В этом ряде любая разность двух средних итогов превышает величину половины ширины доверительного интервала. Поэтому имеются основания предполагать, что в рассмотренном диапазоне варьирования увеличение засоленности камня на 2–2,5% приводит к заметному уменьшению прочности сцепления.

Уровням фактора С соответствует следующий возрастающий ряд средних итогов $\bar{C}_k = C_k / n_p$: -1,479 (c_1); 1,138 (c_2); 1,733 (c_3). Здесь видно, что каждая добавка (уровни c_2 и c_3) при введении ее в растворную смесь дает существенный прирост величины прочности сцепления. Положительный эффект введения добавки ЦСПК в растворную смесь в количестве 0,3% (уровень c_3) заметно превышает положительный эффект добавки С-3 в количестве 0,4% (уровень c_2), так как $\bar{C}_3 - \bar{C}_2 = 1,733 - 1,138 = 0,595 > 0,486$.

Для уровней фактора D средние значения итогов $\bar{D}_i = D_i / n_p$ равны: -0,599 (d_1); 1,158 (d_2); 0,833 (d_3). Эти средние значения говорят о том, что рассмотренные способы подготовки поверхности камня перед нанесением отделочного слоя (уровни d_2 и d_3) дают существенный положительный эффект. Между уровнями d_2 и d_3 нет статистически заметной разницы ($\bar{D}_2 - \bar{D}_3 = 1,158 - 0,833 = 0,325 < 0,486$). Однако из экономических соображений предпочтительнее уровень d_2 – обработка поверхности камня щеткой без выравнивания.

При сравнении нескольких средних k ($k > 2$) можно использовать множественный ранговый критерий Дункана /3/. Для этого из приложения 4 нужно выписать $(k - 1)$ значений рангов r с выбранным уровнем значимости ($\alpha = 0,05$), с числом степеней свободы $\nu_{\text{ош}}$ и $p=2,3,\dots,k$. Умножить эти значения рангов на нормированную ошибку среднего $s_{\bar{y}}$ и определить $(k - 1)$ наименьших значимых рангов (НЗР), используемых для проверки значимости различия между средними.

В нашем случае $k=3$; $\alpha = 0,05$; $s_{\bar{y}} = 0,152$; $v_{\text{ош}} = 9$. Тогда из приложения 4 получим:

p	2	3
Ранги, r	3,20	3,34
НЗР, $r \cdot s_{\bar{y}}$	0,486	0,508

Средние итоги для уровней факторов выстраивались в ранжировочный ряд. Разность между крайними значениями этого ряда сравнивалась с $\text{НЗР} = 0,508$, а разность между соседними значениями сравнивалась с $\text{НЗР} = 0,486$ и затем принималась или отвергалась гипотеза о значимости различия средних. При этом выводы, сделанные с помощью критерия Дункана, подтвердили прежние, так как значения НЗР практически совпали со значением половины ширины доверительного интервала $L'/2 = 0,486$.

Чтобы предсказывать значения остаточной прочности сцепления любых комбинаций рассмотренных уровней варьируемых факторов, не вошедших в план эксперимента по формулам (3.10), были определены оценки параметров модели (3.13), которые приведены в табл.3.7.

Оценка общего среднего по нормированным данным табл. 3.5 равна $\mu' = G/n^2p = 8,36/18 = 0,464$, а по измеренным данным табл. 3.4 $\mu = \mu' + 3 = =3,464$.

Таблица 3.7

Номер уровня фактора	Оценки эффектов уровней факторов, Па·10 ⁵			
	$\alpha_i(a_i)$	$\beta_j(b_j)$	$\gamma_k(c_k)$	$\delta_l(d_l)$
1	-0,776	0,557	-1,943	-1,063
2	0,236	0,019	0,674	0,694
3	0,541	-0,576	1,269	0,369

Сейчас у нас появилась возможность по модели (3.13) предсказывать величину остаточной прочности сцепления \hat{y} для любых комбинаций фиксированных уровней факторов и получить информацию для принятия инженерных решений. Например, для условий первого опыта (a, b, c, d_1) имеем $\hat{y} = \mu + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 3,464 - 0,776 + 0,557 - 1,943 - 1,063 = 0,239 \text{ Па} \cdot 10^5$. Среднее значение измеренной прочности сцепления в первом опыте равно $\bar{y} = (0,08 + 0,40)/2 = 0,24 \text{ Па} \cdot 10^5$. Разница $\bar{y} - \hat{y} = 0,24 - 0,239 = 0,001$ объясняет-

ся погрешностью округления эффектов уровней факторов. Заметим, что средние значения прочности для других условий опытов плана тоже будут предсказываться точно (только для 3×3 греко-латинского квадрата). Однако это не дает права утверждать, что модель будет достаточно точно предсказывать прочность сцепления для любых комбинаций уровней факторов, так как без дополнительных опытов, выполненных вне плана эксперимента, нельзя оценить адекватность модели.

Для облегчения интерполяционных расчётов значения эффектов уровней количественных факторов были аппроксимированы линейным приближением и получена модель

$$\hat{y} = 2,383 + 0,33x_1 - 0,227x_2 + \gamma_k + \delta_1, \quad (3.14)$$

где x_1 и x_2 – натуральные значения уровней факторов А и В, а эффекты γ_k и δ_1 берутся из табл. 3.7.

Эта модель достаточно точно описывает опытные данные \bar{y} , которые использованы при её построении, так как максимальная разница между \bar{y} и \hat{y} (равная 0,254) даже не превышает стандартного отклонения $s_{\bar{y}} = \sqrt{s_{\text{ош}}^2 / p} = \sqrt{0,139/2} = 0,264$. Как уже отмечалось, адекватное описание опытных данных, есть необходимое, но не достаточное условие адекватности модели. Поэтому в качестве дополнительной оценки адекватности модели (3.14) использовался метод контрольных точек, при котором результаты опытов, выполненных вне плана эксперимента, сравнивались с результатами расчётов по модели. Для этого было выполнено два опыта, каждый из которых повторялся дважды ($p = 2$).

В первом опыте имели следующие уровни варьируемых факторов А, В, С и D: $x_1 = 5$ см; $x_2 = 4,1\%$; c_1 и d_2 . Усреднённое по двум повторным опытам значение остаточной прочности сцепления составляло

$$\bar{y} = (2,36 + 1,81)/2 = 2,085 \text{ Па} \cdot 10^5,$$

а предсказанное по модели (3.14)

$$\hat{y} = 2,383 + 0,33 \cdot 5 - 0,227 \cdot 4,1 - 1,943 + 0,694 = 1,853 \text{ Па} \cdot 10^5.$$

Оценка дисперсии этого опыта $s^2 = 0,1512$. Условия второго опыта отличались от условий первого только тем, что фактор С находился на уровне c_2 . Во втором опыте получили: $\bar{y} = (4,10 + 4,31)/2 = 4,205 \text{ Па} \cdot 10^5$; $\hat{y} = 4,470 \text{ Па} \cdot 10^5$ и $s^2 = 0,022$.

Дополнительные опыты позволяют уточнить оценку дисперсии воспроизводимости $s_{\text{ош}}^2$. Прежде всего по G-критерию проверяем однородность дисперсий 11 опытов (9 по плану и 2 вне плана эксперимента).

$$G^{\text{расч}} = 0,6272/1,4273 = 0,439 < G_{0,05;11}^{\text{табл}} = 0,571.$$

Дисперсии опытов однородны и тогда $s_{\text{ош}}^2 = 1,4273/11 = 0,1298$. Эта дисперсия основана на 11 степенях свободы.

Если модель (3.14) адекватно предсказывает результаты измерений в дополнительных опытах, то разность $|\bar{y} - \hat{y}|$ не должна (по t-критерию) значимо отличаться от нуля. Для проверки этой гипотезы задаются уровнем значимости α и вычисляют экспериментальный t-критерий

$$t^{\text{расч}} = \frac{|\bar{y} - \hat{y}| \sqrt{p}}{\sqrt{s_{\text{ош}}^2}}. \quad (3.15)$$

При $t^{\text{расч}} < t_{\alpha, \nu}^{\text{табл}}$ гипотеза об адекватности принимается (здесь ν – число степеней свободы для $s_{\text{ош}}^2$).

Задаёмся $\alpha = 0,05$. Тогда из приложения 3 находим $t_{0,05;11}^{\text{табл}} = 2,20$. По формуле (3.15) экспериментальный t-критерий для первого дополнительного опыта составил 0,910, а для второго – 1,04. Эти значения не превышают табличного. Следовательно, опытные данные, которые не были использованы при построении модели (3.14), адекватно предсказываются этой моделью, а сама модель может оказаться полезной при решении инженерных задач.

Если аппроксимировать значения эффектов уровней фактора А параболой, то получим более сложную модель, которая почти без ошибок предсказывает усреднённые значения результатов опытов \bar{y} по плану эксперимента,

$$\hat{y} = 0,411 + 1,213x_1 - 0,088x_1^2 - 0,227x_2 + \gamma_k + \delta_l. \quad (3.16)$$

Эта модель в первом дополнительном опыте предсказывает прочность сцепления $\hat{y} = 2,096 \text{ Па} \cdot 10^5$ (сравните с опытной $\bar{y} = 2,085 \text{ Па} \cdot 10^5$), а во втором опыте $\hat{y} = 4,713 \text{ Па} \cdot 10^5$ ($\bar{y} = 4,205 \text{ Па} \cdot 10^5$). Видим, что в первой дополнительной точке модель (3.16) предсказывает прочность сцепления точнее, чем модель (3.14), а во второй точке – наоборот. Причем во втором опыте модель (3.16) дает экспериментальный t-критерий $t = |4,205 - 4,713| \sqrt{2} / \sqrt{0,1298} = 1,995$ близкий критическому $t_{0,05;11}^{\text{табл}} = 2,20$.

Таким образом, усложнение модели с целью повышения точности аппроксимации данных не всегда улучшает ее предсказательную способность. На данном этапе исследования целесообразность усложнения модели с целью улучшения подгонки сомнительна. Поэтому для предсказания прочности сцепления отделочного слоя с камнем можно ограничиться наиболее простой моделью (3.14) и считать поставленную задачу решенной.

3.5. Прямоугольники Юдена и планы эксперимента

Если требование равенства уровней для всех факторов в реальном эксперименте не удастся удовлетворить, то тогда окажется невозможным использовать полный план типа латинского квадрата. В этих случаях могут применяться специальные латинские прямоугольники, предложенные Юденом и получившие название «квадратов» (прямоугольников) Юдена, поскольку исходными структурами для их построения являлись латинские квадраты [12]. Прямоугольники Юдена и связанные с ними конфигурации относятся к неортогональным планам, которые могут дополнять семейство ортогональных, давая экспериментаторам большую свободу при выборе плана. Планирование такого типа достаточно широко применяется в сельскохозяйственных и психологических экспериментах, экспертных оценках и технологических исследованиях.

Юден предложил метод построения прямоугольников, обладающих свойством сбалансированности, путем вычеркивания из латинских квадратов определенных строк. Вычеркивание одной строки из любого $v \times v$ латинского квадрата всегда приводит к сбалансированному $v \times (v - 1)$ прямоугольнику Юдена. Например, прямоугольники Юдена 7×3 или 7×4 могут быть построены из циклического 7×7 латинского квадрата

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
3	4	5	6	7	1	2
4	5	6	7	1	2	3
5	6	7	1	2	3	4
6	7	1	2	3	4	5
7	1	2	3	4	5	6

путем отбора любых соседних строк и третьей (четвертой) строки, отстоящей на один шаг от соседней.

Примеры 7×3 прямоугольников Юдена, полученных из циклического 7×7 латинского квадрата:

1	2	3	4	5	7	7	3	4	5	6	7	1	2
2	3	4	5	6	7	1	4	5	6	7	1	2	3
4	5	6	7	1	2	3	6	7	1	2	3	4	5

Примеры 7×4 прямоугольников Юдена, полученных из циклического 7×7 латинского квадрата:

1	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	1
2	3	4	5	6	7	1	3	4	5	6	7	1	2
3	4	5	6	7	1	2	4	5	6	7	1	2	3
5	6	7	1	2	3	4	6	7	1	2	3	4	5

Планирование эксперимента часто требует сложного упорядочения опытов в соответствии с уровнями факторов и такие упорядочения могут быть основаны на комбинаторных схемах, к которым относятся и прямоугольники Юдена. Дальнейшему изложению материала предположим ряд обозначений и определений /23/.

Два множества $A = \{a_1, \dots, a_v\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_b\}$ порождают инцидентную структуру, если между элементами множества A и элементами множества B можно установить некоторые отношения. Если установлено отношение инцидентности " $a_i \in b_j$ ", то говорят, что a_i принадлежит b_j (a_i принято называть элементами или способами обработки, а b_j – подмножествами или блоками). В этом случае инцидентная структура, порождаемая множествами A и B , называется двумерной блок-схемой. Параметрами блок-схемы являются v – число элементов, b – число блоков, k – число элементов в блоках, r – число блоков, содержащих один и тот же элемент, λ – число блоков, содержащих одну и ту же пару элементов. Если $v = k$ блок-схема называется полной, если $v > k$ – неполной. Если любая пара элементов принадлежит одному и тому же числу блоков, схема называется сбалансированной, если же параметр λ принимает разные значения при прочих постоянных четырех параметрах – частично сбалансированной. Схема называется правильной, когда все блоки имеют один и тот же размер k , и равноповторной, когда каждый элемент повторяется r раз. Между параметрами схемы справедливы следующие соотношения (необходимые условия существования блок-схемы) $b \cdot k = v \cdot r$, $r(k - 1) = \lambda(v - 1)$.

Любую двумерную комбинаторную схему можно задать при помощи матрицы инцидентностей $N = (n_{ij})$, где $i = 1, \dots, v$; $j = 1, \dots, b$:

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i \in b_j \\ 0, & \text{если } a_i \notin b_j \end{cases}.$$

Число матриц инцидентностей, необходимых для описания комбинаторной схемы, в общем случае равно числу отношений инцидентности, определяющих эту схему. С ростом числа множества и отношений инцидентности растет мерность комбинаторной схемы. Например, трехмерной комбинаторной схемой является латинский квадрат, в котором рассматриваются отношения инцидентности множества элементов V к столбцам C и строкам R . Аналогичные отношения инцидентности рассматриваются в прямоугольниках Юдена. Греко-латинский квадрат является примером четырехмерной комбинаторной схемы, так как дополнительно к указанным выше двум отношениям инцидентности рассматривается отношение множества латинских к множеству греческих букв.

Если для прямоугольников Юдена ввести матрицу N_{vC} как матрицу инцидентностей множества элементов V относительно столбцов C , то условие сбалансированности элементов относительно v столбцов означает, что

$$N_{vC} N'_{vC} = (k - \lambda)I + \lambda J, \quad (3.17)$$

где $\lambda = k(k-1)/(v-1)$, I - $(v \times v)$ единичная матрица, J - $(v \times v)$ матрица единиц.

Приведенному выше первому 7×4 прямоугольнику Юдена соответствует блок-схема вида:

Элементы	Блоки						
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
1	+			+		+	+
2	+	+			+		+
3	+	+	+			+	
4		+	+	+			+
5	+		+	+	+		
6		+		+	+	+	
7			+		+	+	+

Эта схема имеет параметры $v = b = 7$, $r = k = 4$, $\lambda = 2$ и матрицы инцидентностей

$$N_{vc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad N_{vr} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что условие существования и сбалансированности выполняются. Матрица инцидентий элементов по отношению к строкам N_{vr} в силу условия ортогональности состоит из единиц.

Если прямоугольник Юдена рассматривать как факторный план и факторами определить строки R, столбцы C и элементы V прямоугольника, то взаимоотношение между этими факторами будет следующее: строки ортогональны столбцам, элементы ортогональны строкам и сбалансированы относительно столбцов. В латинском квадрате все факторы ортогональны по отношению друг к другу.

Планы по схеме $v \times k$ прямоугольника Юдена могут быть использованы для оценки эффектов трех не взаимодействующих факторов. В этом случае число различных опытов равно произведению $v \cdot k$ и результаты эксперимента представляются в виде линейной модели (3.5). Схема дисперсионного анализа для сбалансированного $v \times k$ прямоугольника Юдена представлена в табл. 3.8.

Таблица 3.8

Дисперсионный анализ $v \times k$ сбалансированного прямоугольника Юдена

Источники дисперсий	Число степеней свободы	Сумма квадратов
1 (строки)	$k - 1$	$S_1 = T_1' \cdot T_1 / v - G^2 / (v \cdot k)$
2 (столбцы)	$v - 1$	$S_2 = T_2' \cdot T_2 / k - G^2 / (v \cdot k)$
3 (элементы, скорректированные по столбцам)	$v - 1$	$S_3 = T_3^{*'} \cdot T_3^* \cdot k / (\lambda \cdot v)$
Остаток	$(v - 1)(k - 1)$	$S_{\text{ост}} = S_0 - \sum_{i=1}^3 S_i$
Итого	$v k - 1$	$S_0 = Y'Y - G^2 / (v \cdot k)$

Здесь T_1 – вектор итогов по строкам (первый фактор); T_2 – вектор итогов по столбцам (второй фактор); T_3 – вектор итогов по элементам

(третий фактор); $T_3^* = T_3 - N_{32} T_2 / k$ – вектор скорректированных итогов по элементам; G – общий итог; Y – вектор наблюдений (результатов опытов); S_1, S_2 , и S_3 – сумма квадратов для первого, второго и третьего факторов соответственно; $S_{\text{ост}}$ – остаточная сумма квадратов; S_0 – общая сумма квадратов; N_{32} – матрица инцидентий третьего фактора (элементов) относительно второго (столбцов).

Оценки параметров модели (3.5) запишутся следующим образом

$$\begin{aligned} \mu &= G / (v \cdot k), \\ \gamma &= T_3^* k / (\lambda \cdot v), \\ \alpha &= T_1 / v - 1 \cdot G / (v \cdot k), \\ \beta &= T_2 / k - N_{32}' \cdot T_3^* / (\lambda \cdot v) - 1 \cdot G / (v \cdot k), \end{aligned} \quad (3.18)$$

где 1 – вектор-столбец из единиц.

При анализе четырех факторов (четырёх источников дисперсии), имеющих различное число уровней, можно использовать прямоугольники Юдена с двумя не взаимодействующими множествами элементов: $V_1 = \{1, 2, \dots, v_1\}$ и $V_2 = \{1, 2, \dots, v_2\}$. Имеется несколько разновидностей таких прямоугольников в зависимости от того, из каких конфигураций производится прямоугольник, а также какое число уровней имеет четвертый фактор. Рассмотрим два вида прямоугольников.

Прямоугольники, производные от греко-латинских квадратов, для которых два множества имеют одно и то же число элементов $v_1 = v_2 = v$. Такие планы называются греко-латинскими прямоугольниками Юдена потому, что они могут быть построены из греко-латинских квадратов таким же образом, как прямоугольники Юдена из латинских квадратов. Каждое множество элементов V_1 и V_2 расположено в $v \times k$ прямоугольнике Юдена (v – число столбцов, k – число строк) и полностью сбалансировано относительно другого. Обычно факторы греко-латинского прямоугольника Юдена берутся в порядке – строки (R), столбцы (C), элементы первого множества (V_1), элементы второго множества (V_2). Тогда число уровней второго, третьего и четвертого фактора одно и то же $v_1 = v_2 = v$, а число уровней первого фактора $k < v$. При изменении этого условия эксперимент может планироваться по другой схеме плана.

Планы, в которых первое множество элементов V_1 ($v_1 = v$) расположено в $v \times k$ прямоугольнике Юдена (элементы ортогональны к

строкам и сбалансированы относительно v столбцов), второе множество элементов V_2 ($v_2 = k$) накладывается на первое таким образом, чтобы выполнялись условия ортогональности и сбалансирования (второе множество ортогонально первому и столбцам и полностью сбалансировано относительно строк). Будем называть такие планы, производными от прямоугольников Юдена.

Условие сбалансированности множества V_1 относительно столбцов по аналогии с (3.17) состоит в том, что

$$N_{V_1C} \cdot N'_{V_1C} = (k - \lambda)I + \lambda J, \quad (3.19)$$

а условие сбалансированности множества V_2 относительно строк означает, что

$$N_{V_2R} \cdot N'_{V_2R} = xI + yJ. \quad (3.20)$$

Здесь N_{V_1C} – матрица инцидентий множества V_1 относительно столбцов, N_{V_2R} – матрица инцидентий множества V_2 относительно строк, x и y – некоторые положительные целые, I – единичная матрица, J – матрица состоящая из единиц.

Методы построения планов, производных от прямоугольников Юдена, рассмотрены в работе /22/. Ниже приведен пример плана, производного от 5×4 прямоугольника Юдена:

$V\alpha$	$A\alpha$	$E\gamma$	$C\delta$	$D\beta$
$C\beta$	$D\delta$	$A\beta$	$E\alpha$	$V\gamma$
$D\gamma$	$E\beta$	$B\delta$	$A\gamma$	$C\alpha$
$E\delta$	$C\gamma$	$D\alpha$	$B\beta$	$A\delta$

Здесь на множество элементов $V_1 = \{A, B, C, D, E\}$ накладывается множество $V_2 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ таким образом, что каждая пара одинаковых букв встречается один и только один раз и каждая латинская буква встречается с каждой греческой буквой только один раз (V_1 ортогонально V_2). Каждая греческая буква встречается однажды в столбцах, но не в строках (множество V_2 ортогонально столбцам). Условие полной сбалансированности множества V_2 относительно строк (3.20) выполняется, так как

$$N_{V_2R} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$N_{V_2R} \cdot N'_{V_2R} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 7 \end{bmatrix} = 1 \cdot I + 6 \cdot J.$$

Откуда следует, что $x = 1$, а $y = 6$.

Для того, чтобы построить планы, производные от $v \times \frac{1}{2}(v-1)$ прямоугольников Юдена необходимо воспользоваться специальными конфигурациями. Например, такая конфигурация для плана, производного от 7×3 прямоугольника Юдена, выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{lll}
 A \alpha \alpha \alpha \alpha \alpha \alpha & B \alpha \gamma \gamma \gamma \gamma \beta \beta & C \gamma \alpha \gamma \alpha \alpha \gamma \gamma \\
 C \beta \beta \beta \beta \beta \beta & D \beta \beta \beta \alpha \alpha \alpha \alpha & E \alpha \beta \beta \gamma \gamma \alpha \beta \\
 D \gamma \gamma \gamma \gamma \gamma \gamma & E \gamma \alpha \alpha \beta \beta \gamma \gamma & F \beta \gamma \alpha \beta \beta \beta \alpha \\
 & D \alpha \alpha \alpha \beta \beta \beta \beta & \\
 & F \gamma \beta \gamma \alpha \gamma \alpha \gamma & (3.21) \\
 & G \beta \gamma \beta \gamma \alpha \gamma \alpha & \\
 E \beta \gamma \gamma \alpha \alpha \beta \alpha & F \alpha \alpha \beta \gamma \alpha \gamma \beta & G \gamma \beta \gamma \alpha \beta \beta \beta \\
 G \alpha \alpha \beta \gamma \alpha \gamma & A \beta \gamma \gamma \beta \gamma \beta \gamma & B \beta \alpha \beta \beta \alpha \gamma \gamma \\
 A \gamma \beta \beta \gamma \beta \gamma \beta & B \gamma \beta \alpha \alpha \beta \alpha \alpha & C \alpha \gamma \alpha \gamma \lambda \alpha \alpha
 \end{array}$$

В этой конфигурации каждое множество греческих букв ортогонально латинским буквам и столбцам и полностью сбалансировано относительно строк и некоторого другого множества греческих букв. Для построения 7×3 плана достаточно из (3.21) выписать множество латинских букв совместно с одним из семи множеств греческих букв. Повторяя эту процедуру можно получить семь различных планов, производных от 7×3 прямоугольника Юдена.

Вычислительная схема дисперсионного анализа для рассмотренных планов основана на последовательном обращении матриц, заданных матрицами инцидентий и основными параметрами комбинаторной схемы. Этот алгоритм удобен для реализации на ЭВМ и требует небольшого объема машинной памяти. Дисперсионный анализ планов, производных от $v \times k$ прямоугольников Юдена, приведен в табл. 3.9.

**Дисперсионный анализ планов, производных от $v \times k$
прямоугольников Юдена**

Источники дисперсий	Число степеней свободы	Сумма квадратов
1 (строки)	$k - 1$	$S_1 = T_1' \cdot T_1 / v - G^2 / (v \cdot k)$
2 (столбцы)	$v - 1$	$S_2 = T_2' \cdot T_2 / k - G^2 / (v \cdot k)$
3 (элементы множества V_1 , скорректированные по столбцам)	$v - 1$	$S_3 = T_3^{**} \cdot T_3^* \cdot k / (\lambda \cdot v)$
4 (элементы множества V_2 , скорректированные по строкам)	$k - 1$	$S_4 = T_4^{**} \cdot T_4^* \cdot v / (v^2 - x)$
Остаток	$(v - 2)(k - 2) - 1$	$S_{\text{ост}} = S_0 - \sum_{i=1}^4 S_i$
Итог	$v \cdot k - 1$	$S_0 = Y'Y - G^2 / (v \cdot k)$

По аналогии с табл. 3.8 здесь T_1 – вектор итогов по первому фактору (строки); T_2 – вектор итогов по второму фактору (столбцы); T_3 – вектор итогов по третьему фактору (латинские буквы); T_4 – вектор итогов по четвертому фактору (греческие буквы); $T_3^* = T_3 - N_{32} \cdot T_2 / k$ и $T_4^* = T_4 - N_{41} \cdot T_1 / v$ – векторы скорректированных итогов по третьему и четвертому факторам; G – общий итог; Y – вектор наблюдений (данных опытов); N_{32} – матрица инцидентий третьего фактора по отношению ко второму; N_{41} – матрица инцидентий четвертого фактора относительно первого; x – положительное целое число, определяемое при проверке условия (3.20); $\lambda = k(k - 1) / (v - 1)$.

3.6. Пример построения модели с использованием плана, производного от прямоугольников Юдена

Водорастворимые соли, накапливающиеся в толще стеновых конструкций, является источником возникновения и развития солевой формы физической коррозии строительных материалов. Для повышения долговечности стен избыточное содержание соли целесообразно удалить из толщи материала. Особенно это важно при реставрации каменных памятников архитектуры, так

как известные в настоящее время многочисленные способы укрепления разрушенного камня с помощью различных составов могут быть использованы только при отсутствии в нем водорастворимых солей. Разработан довольно эффективный способ удаления этих солей из толщи конструкций в поле постоянного электрического тока. При выборе оптимальной стратегии обессоливания камня с помощью указанного способа необходимо иметь информацию об удельном омическом сопротивлении обессоливаемого материала и изменении величины этого параметра при варьировании уровней различных факторов. Для решения данной задачи по схеме плана, производного от прямоугольников Юдена, был реализован специальный эксперимент.

3.6.1. Постановка задачи, модель и план

На удельное омическое сопротивление строительных материалов может влиять тип материала, его влажность, размеры и конфигурация испытываемых образцов, тип солей в порах материала и другие факторы. Представляло интерес экспериментально изучить влияние четырех факторов на удельное омическое сопротивление y , Ом·м.

Фактор X_1 – увлажнение образцов на трех уровнях:

- 1 – увлажнение до величины водопоглощения B ;
- 2 – увлажнение до 0,8 B ;
- 3 – увлажнение до 0,6 B .

Второй и третий уровни фактора X_1 получали после подсушки водонасыщенных образцов перед испытанием.

Фактор X_2 – вид материала на семи уровнях:

- 1 – глиняный кирпич современного производства;
- 2 – глиняный кирпич, извлеченный из стены памятника архитектуры;
- 3 – известняк из стены памятника архитектуры;
- 4 – известняк из современного карьера;
- 5 – цементно-песчаный раствор;
- 6 – цементно-песчаный раствор, имитирующий глиняный кирпич;
- 7 – цементно-песчаный раствор, имитирующий известняк.

Фактор X_3 – вид солевого раствора на семи уровнях:

- A – без соли;
- B – $Ba(OH)_2$ (0,3 % по массе образца);
- C – NaCl (3 %);
- D – NaCl, $MgSO_4$, Na_2SO_4 (2%);

Е – NaCl (0,3%);

F – NaCl, NaSO₄, Na₂CO₃ (2%);

G – NaCl, MgSO₄, Na₂SO₄, Na₂CO₃ (2%).

Вначале готовились насыщенные при 20°С растворы отдельных солей. Смеси солей готовились из равных объемов насыщенных растворов отдельных солей. Концентрации смесей определялись как среднее арифметическое концентраций растворов отдельных солей. В этих растворах производилось засоление образцов.

Фактор X_4 – образцы строительных материалов в виде прямоугольного параллелепипеда с размерами на трех уровнях: $\alpha - 3 \times 3 \times 5$ см; $\beta - 3 \times 5 \times 15$ см; $\gamma - 5 \times 5 \times 25$ см.

Факторы X_2 и X_3 являются качественными, а факторы X_1 и X_4 – количественными. Однако фактор X_4 носит дискретный характер и его можно считать качественным. При планировании многофакторных экспериментов в таком случае обычно используются рассмотренные комбинаторные схемы. Выбор конкретного плана зависит от структуры конструируемой статистической модели, перечня вопросов, которые требуется выяснить с помощью этой модели, числа уровней факторов и многого другого, приобретаемого опытом применения теории эксперимента.

До проведения эксперимента был очевиден характер влияния лишь уровней количественного фактора X_1 . С увеличением степени водонасыщения образцов их омическое сопротивление должно уменьшаться. Разумные предположения об эффектах других факторов и их взаимодействиях отсутствовали. Опытные данные не имели повторных наблюдений и описывались линейной моделью

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + \varepsilon_{ijkl}, \quad (3.22)$$

где y_{ijkl} – измеренное удельное омическое сопротивление материала при i -том уровне фактора X_1 , при j -том уровне фактора X_2 , при k -том уровне фактора X_3 , при l -ом уровне фактора X_4 ; μ – общее среднее; α_i – эффект i -того уровня фактора X_1 ; β_j – эффект j -того уровня фактора X_2 ; γ_k – эффект k -того уровня фактора X_3 ; δ_l – эффект l -того уровня фактора X_4 ; ε_{ijkl} – случайный остаток, обусловленный ошибкой опыта и возможными эффектами взаимодействий, не учитываемыми линейной моделью.

Поскольку изучаемые факторы имели неодинаковое число уровней, то наиболее подходящей схемой плана оказался план, производный от прямоугольника Юдена. В данном случае на первое множество V_1 из семи элементов (латинские буквы – уровни фактора X_3), расположенное в 7×3 прямоугольнике Юдена, накладывалось второе множество V_2 из трех элементов (греческие буквы – уровни фактора X_4) таким образом, чтобы выполнялось условие ортогональности и сбалансирования: второе множество ортогонально первому и столбцам и полностью сбалансировано относительно строк. Для построения такого плана воспользовались конфигурацией (3.21) и выписали множество латинских букв совместно с первым множеством греческих букв. В результате получился план, который приведен в табл. 3.10 (план №1).

Таблица 3.10

План эксперимента №1

Уровни фактора X_1	Уровни фактора X_2						
	1	2	3	4	5	6	7
1	A α	B α	C γ	D α	E β	F α	G γ
2	C β	D β	E α	F γ	G α	A β	B β
3	D γ	E γ	F β	G β	A γ	B γ	C α

Для этого плана, имеющего параметры $v = 7, k = 3, \lambda = k(k-1)/(v-1) = 1$, проверяем условия сбалансированности (3.19) и (3.20). Если через N_{32} обозначить матрицу инцидентий множества элементов V_1 (латинские буквы – фактор X_3) относительно столбцов (фактор X_2), то для плана, приведенного в табл. 3.10, получим

$$N_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично N_{41} – матрица инцидентий множества элементов V_2 (греческие буквы – фактор X_4) относительно строк (фактор X_1) имеет вид:

$$N_{41} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Условие сбалансированности множества V_1 относительно столбцов соблюдается, так как

$$N_{32} \cdot N'_{32} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 2I + J.$$

Выполняется условие сбалансированности и множества V_2 относительно строк

$$N_{41} \cdot N'_{41} = \begin{bmatrix} 21 & 14 & 14 \\ 14 & 21 & 14 \\ 14 & 14 & 21 \end{bmatrix} = 7I + 14J.$$

Откуда следует, что $x=7$ и $y=14$.

Соблюдается условие ортогональности строк относительно столбцов и множества элементов V_2 относительно множества V_1 , так как матрицы инциденций соответствующих классификаций состоят из единиц. Действительно имеем:

$$N_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = J_{(3 \times 7)} = N_{43}.$$

Таким образом, для выбранного плана эксперимента выполняются условия ортогональности и сбалансирования.

3.6.2. Дисперсионный анализ результатов эксперимента

В эксперименте уровни фактора X_1 устанавливались легко. Поэтому для каждого образца производились измерения омического сопротивления на всех трех уровнях увлажнения. Это позволило получить данные еще для двух комбинаторных схем, построенным циклической перестановкой строк прямоугольника Юдена, показанного в табл. 3.10. В результате эксперимент стал более информативным и удалось установить наличие взаимодействий факторов. Результаты измерений были тщательно проанализированы и очищены от «выбросов». Опытные данные, собранные по первому плану, приведены в табл. 3.11.

**План и результаты эксперимента по определению
удельного омического сопротивления образцов строительных
материалов ρ , Ом·м**

Уровни фактора X_1	Уровни фактора X_2							Итоги T_1
	1	2	3	4	5	6	7	
1	A α 16	B α 35	C γ 1,3	D α 2	E β 15	F α 2	G γ 3	74,3
2	C β 1,6	D β 5	E α 6,5	F γ 4	G α 38	A β 47	B β 34	136,1
3	D γ 5	E γ 20	F β 9	G β 6	A γ 85	B γ 76	C α 4	205
Итоги T_2	22,5	60	16,8	12	138	125	41	415,4

В соответствии со схемой проведения дисперсионного анализа данных (см. табл. 3.9) формировались итоги по строкам (T_1), столбцам (T_2), латинским (T_3) и греческим (T_4) буквам. Итоги T_1 , T_2 и общий итог $G = 415,4$ приведены в табл. 3.11. Итоги T_3 и T_4 равны:

$$T_3 = \begin{bmatrix} 148 \\ 145 \\ 6,9 \\ 12 \\ 41,5 \\ 15 \\ 47 \end{bmatrix}, \quad T_4 = \begin{bmatrix} 103,5 \\ 117,6 \\ 194,3 \end{bmatrix}.$$

Скорректированные итоги T_3^* и T_4^* составляют

$$T_3^* = T_3 - N_{32} \cdot T_2 / k = \begin{bmatrix} 52,8 \\ 69,7 \\ -19,9 \\ -19,5 \\ -30,1 \\ -36,3 \\ -16,7 \end{bmatrix}, \quad T_4^* = T_4 - N_{41} T_1 / v = \begin{bmatrix} -7,13 \\ -29,36 \\ 36,5 \end{bmatrix}.$$

Результаты дисперсионного анализа, выполненного в соответствии с табл. 3.9, представлены в табл. 3.12.

Таблица 3.12

Дисперсионный анализ данных табл. 3.11

Источники дисперсии	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Критерий Фишера $F^{экс}$	$F_{\alpha=0,05}^{табл.}$
Строки – фактор X_1	2	1221,38	610,69	2,935	6,94
Столбцы – фактор X_2	6	4851,66	808,61	3,886	6,16
Латинские буквы (скорректированные по столбцам) – фактор X_3	6	4682,01	780,33	3,75	6,16
Греческие буквы (скорректированные по строкам) – фактор X_4	2	374,17	187,08	0,896	6,94
Остаток	4	832,28	208,07		
Итого	20	11961,5			

В табл. 3.12 средний квадрат остатка (остаточная дисперсия) использован для оценки ошибки эксперимента ϵ_{ijk} . Эта величина складывается из дисперсии, обусловленной ошибкой опыта и дисперсий, обусловленных взаимодействиями, если таковые имеются. Значимость линейных эффектов проверялась по F-критерию Фишера, определенному из отношения среднего квадрата фактора к среднему квадрату остатка. Это отношение сравнивалось при выбранном уровне значимости $\alpha = 0,05$ с табличным F-критерием (см. приложение 2). Оказалось, что линейные эффекты факторов по рассмотренным данным нельзя признать значимыми, так как $F^{экс} < F^{табл.}$. Причиной этого может быть завышенная оценка ошибки эксперимента из-за наличия взаимодействий. Поэтому продолжим анализ опытных данных собранных по второму и третьему плану, которые приведены в табл. 3.13 и 3.14. Результаты дисперсионного анализа этих данных представлены в табл. 3.15 и 3.16.

Таблица 3.13

План №2 и результаты эксперимента

Уровни фактора X_1	Уровни фактора X_2							Итоги T_1
	1	2	3	4	5	6	7	
1	Сβ 1,1	Dβ 2	Eα 4	Fγ 3	Gα 25	Aβ 30	Bβ 18	83,1
2	Dγ 3	Eγ 13	Fβ 6	Gβ 4	Aγ 66	Bγ 59	Cα 2	
3	Aα 36	Bα 62	Cγ 3	Dα 9	Eβ 35	Fα 7	Gγ 8,5	
Итоги T_2	40,1	77	13	16	126	96	28,5	396,6

Таблица 3.14

План №3 и результаты эксперимента

Уровни фактора X_1	Уровни фактора X_2							Итоги T_1
	1	2	3	4	5	6	7	
1	Dγ 2	Eγ 6	Fβ 3,3	Gβ 2	Aγ 53	Bγ 45	Cα 1,2	112,5
2	Aα 22	Bα 46	Cγ 2	Dα 4	Eβ 20	Fα 4,5	Gγ 5,5	
3	Сβ 3,4	Dβ 11	Eα 8	Fγ 5,5	Gα 50	Aβ 65	Bβ 50	192,9
Итоги T_2	27,4	63	13,3	11,5	123	14,5	56,7	

Таблица 3.15

Дисперсионный анализ данных табл. 3.13

Источники дисперсии	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Критерий Фишера $F^{\text{экс}}$	$F_{\alpha=0,05}^{\text{табл.}}$
Строки – фактор X_1	2	520,62	260,31	2,865	6,94
Столбцы – фактор X_2	6	3798,68	633,11	6,967	6,16
Латинские буквы (скорректированные по столбцам) – фактор X_3	6	4271,76	711,96	7,835	6,16
Греческие буквы (скорректированные по строкам) – фактор X_4	2	81,86	40,93	0,45	6,94
Остаток	4	363,47	90,87		
Итого	20	9036,39			

Таблица 3.16

Дисперсионный анализ данных табл. 3.14

Источники дисперсии	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Критерий Фишера $F^{\text{экс}}$	$F_{\alpha=0,05}^{\text{табл.}}$
Строки – фактор X_1	2	687,6	343,8	2,448	6,94
Столбцы – фактор X_2	6	4179,66	696,61	4,961	6,16
Латинские буквы (скорректированные по столбцам) – фактор X_3	6	3995,8	665,97	4,743	6,16
Греческие буквы (скорректированные по строкам) – фактор X_4	2	6,5	3,25	0,023	6,94
Остаток	4	561,69	140,42		
Итого	20	9431,25			

Из табл. 3.15 видно, что даже при грубом оценивании ошибки эксперимента факторы X_2 и X_3 следует признать значимыми. Фактор X_1 (размеры образцов) незначим во всех случаях. Если это так, то его сумму квадратов можно объединить с суммой квадратов для остатка и уточнить оценку ошибки эксперимента. Полученные по всем трем планам оценки были объединены и определен средний квадрат для остатка $MS=123,33$ при 18 степенях свободы. На фоне этой ошибки факторы X_2 и X_3 во всех случаях оказались значимыми. По данным первого плана проявилось значимое влияние фактора X_1 ($F_{2;18}^{экс} = 4,95 > F_{0,05;2;18}^{табл} = 3,56$).

Таким образом, можно признать, что на удельное омическое сопротивление образцов строительных материалов существенно влияют первые три фактора. В рассмотренной области факторного пространства примерно одинаково сильное влияние имеет фактор X_2 (вид материала) и X_3 (вид соли). Заметно слабее влияние фактора X_1 (степень увлажнения материала).

3.6.3. Сравнение уровней факторов и модели прогноза

При сравнении уровней значимых факторов рассматривались скорректированные средние итоги T_1^*/v ($T_1^* = T_1 - 1 \cdot G/k$), T_2^*/k ($T_2^* = T_2 - 1 \cdot G/v$) и T_3^*/k , которые одновременно являются оценками параметров модели (3.22). Сравнение этих итогов по факторам показало, что рассмотренные планы не внесли существенных изменений в их величины. Поэтому средние итоги по всем трем планам были объединены.

Проверка различия средних итогов для значимых факторов была выполнена с помощью рангового критерия Дункана. Рассмотрим эту процедуру для фактора X_1 , имеющего ошибку среднего $s_{\bar{y}} = \sqrt{123,33/21} = 2,42$. Расположим скорректированные средние итоги для фактора X_1 в порядке возрастания

$$\begin{array}{ccccccc} T_1^*/v & -6,54 & -0,66 & 7,2 & & & \\ \text{Уровни } X_1 & (1) & (2) & (3) & & & (3.23) \end{array}$$

Из таблицы рангового критерия Дункана (см. приложение 4) для 18 степеней свободы и $\alpha = 0,05$ выпишем значимые ранги r и вычислим их произведения с ошибкой среднего $s_{\bar{y}}$ (НЗР):

р	2	3
Ранги, г	2,97	3,12
НЗР, г · s _ȳ	7,19	7,55

Проверяем значимость различия между средними ранжировочного ряда:

$$\begin{aligned}
 (3) - (1) &= 7,2 - (-6,54) = 13,74 > 7,55 && \text{— значимое;} \\
 (3) - (2) &= 7,2 - (-0,66) = 7,86 > 7,19 && \text{— значимое;} \\
 (2) - (1) &= -0,66 - (-6,54) = 5,88 < 7,19 && \text{— незначимое.}
 \end{aligned}$$

Факторы X_2 и X_3 имеют одинаковую ошибку среднего $s_{\bar{y}} = \sqrt{123,33/9} = 3,7$. Скорректированные средние итоги дают следующие ражировочные ряды:

$$\begin{array}{l}
 T_2^* / k \quad -15,0 \quad -14,6 \quad -9,36 \quad -5,36 \quad 2,83 \quad 17,89 \quad 23,6 \\
 \text{Уровни } X_2 \quad (4) \quad (3) \quad (1) \quad (7) \quad (2) \quad (6) \quad (5)
 \end{array} \quad (3.24)$$

$$\begin{array}{l}
 T_3^* / k \quad -10,57 \quad -8,28 \quad -7,43 \quad -7,43 \quad -4,7 \quad 16,57 \quad 22,73 \\
 \text{Уровни } X_3 \quad (F) \quad (E) \quad (C) \quad (D) \quad (G) \quad (A) \quad (B)
 \end{array} \quad (3.25)$$

Наименьшие значимые ранги и их произведения с ошибкой среднего

р	2	3	4	5	6	7
Ранги, г	2,97	3,12	3,21	3,27	3,32	3,35
НЗР, г · s _ȳ	10,99	11,54	11,88	12,1	12,28	12,39

После длинной цепочки сравнений оказалось, что материалы на уровне 5 (цементно-песчаный раствор) и 6 (цементно-песчаный раствор, имитирующий глиняный кирпич) значимо отличаются от остальных уровней, но разница между ними незначима. Уровень 2 (глиняный кирпич, извлеченный из стены памятника) имеет незначимую разницу только с уровнем 7 (цементно-песчаный раствор, имитирующий известняк). Уровни 1, 3, 4, 7 между собой не образуют значимых разностей.

Влияние вида соли в образцах на уровне А (без соли) и на уровне В ($\text{Ba}(\text{OH})_2 - 0,3\%$) резко отличается от других уровней. Все виды солевого раствора (кроме $\text{Ba}(\text{OH})_2$) существенно повышают электропроводность образцов строительных материалов. Как уже отмечалось, размеры образцов не влияют и в модели (3.22) $\delta_1 = 0$.

Чтобы предсказывать значения удельного омического сопротивления для любых комбинаций уровней рассмотренных факторов, в том числе и не

вошедших в план эксперимента, была определена оценка общего среднего модели (3.22)

$$\mu = \left(\sum_{i=1}^3 G_i \right) / 3 \cdot v \cdot k = (415,4 + 396,6 + 409,4) / 3 \cdot 7 \cdot 3 = 19,39.$$

Остальные параметры модели (3.22) берутся из рядов (3.23), (3.24) и (3.25).

В качестве примера рассмотрим вычисления удельного омического сопротивления глиняного кирпича (фактор X_2 на уровне 2), содержащего около 3% NaCl (фактор X_3 на уровне C) и полностью водонасыщенного (фактор X_1 на уровне 1). Для этих уровней имеем:

$$y_{12C} = 19,39 - 6,54 + 2,83 - 7,43 = 8,25 \text{ Ом}\cdot\text{м}.$$

Если в результате расчета окажется $y_{ijk} < 0$, то следует принимать $y_{ijk} = 1$.

Сравнительный анализ позволил выделить группы одинаковых по влиянию на отклик y солей и материалов, для которых были получены формулы вида

$$y = b_0 + b_1 f(B'), \quad (3.26)$$

где $B' = (B - X_1) / B$ – доля открытой пористости, незаполненная водой; $f(B') = \sqrt{(10B' + 1)^3}$; коэффициенты b_0 и b_1 приведены в табл. 3.17. Модель (3.26) вполне приемлема для выполнения инженерных расчетов.

Таблица 3.17

Значения коэффициентов b_0 и b_1 для формулы (3.26)

Уровень фактора X_2 (вид материала)	Уровень фактора X_3 (вид солевого раствора)	Коэффициенты	
		b_0	b_1
2	A, B	34	2,5
2	C, D, E, F, G	3	1,15
1, 3, 4, 6, 7	A, B	15	2,55
1, 3, 4, 6, 7	C, D, E, F, G	1,93	0,37
5	A, B	37	16
5	C, D, E, F, G	19,8	1,75

Таким образом, поставлена и решена задача с качественным факторами, для оценки линейных эффектов которых использован

комбинаторный план, производный от прямоугольников Юдена. Этот план обладает хорошими статистическими свойствами при оценке параметров линейной модели, но с точки зрения проведения статистического анализа довольно сложен. Наличие легко варьируемого фактора позволило увеличить объем опытных данных без дополнительных трудозатрат и повысить надежность статистических выводов. Результаты исследования доведены до формул, с помощью которых можно принимать обоснованные решения при проведении подготовительных реставрационных работ.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПРИ РАЗРАБОТКЕ ТЕХНОЛОГИИ (НА ПРИМЕРЕ ТЕХНОЛОГИИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ СЛОИСТЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УТЕПЛИТЕЛЕМ ИЗ ЗАЛИВОЧНЫХ ПЕНОПЛАСТОВ)

4.1. Описание проблемы и постановка задачи, предварительный физический эксперимент

Изготовление многослойных конструкций с утеплителем из заливочных пенопластов является сложным процессом, требующим учета и взаимоувязки во времени комплекса технологических и кинетических параметров, описывающих особенности явлений, составляющих данный технологический процесс.

В мировой практике существует два способа производства таких конструкций – непрерывный и стендовый.

В первом случае на поступательно движущийся материал наружного слоя изделия из смесителя сверху непрерывно наливается композиция, количество которой определяется исходя из непрерывного слоя расчетной толщины. В процессе вспенивания образовавшегося слоя композиции на него может накладываться верхний слой обшивочного материала.

Во втором случае заливку композиции осуществляют периодически по мере подачи отдельной формы, в которую уложена одна из обшивок изделия. На эту обшивку выливают рассчитанную порцию композиции. Затем разравнивают слой композиции, укладывают верхнюю обшивку и крышку формы. Форму зажимают в прессе и после вспенивания и отверждения композиции производится распрессовка и извлечения из формы готового изделия. Заливка композиции может осуществляться и в закрытую форму с уложенными в нее обшивками через технологические отверстия формы, зажатой в прессе. При использовании многэтажных прессов последний способ подачи композиции является единственно возможным.

В обоих случаях при формировании теплоизоляционного слоя используются заливочные машины со специальными насадками или инжекторами. Принципиальная схема такой машины приведена на рис. 4.1 а, геометрические параметры инжектора показаны на рис.4.1 б.

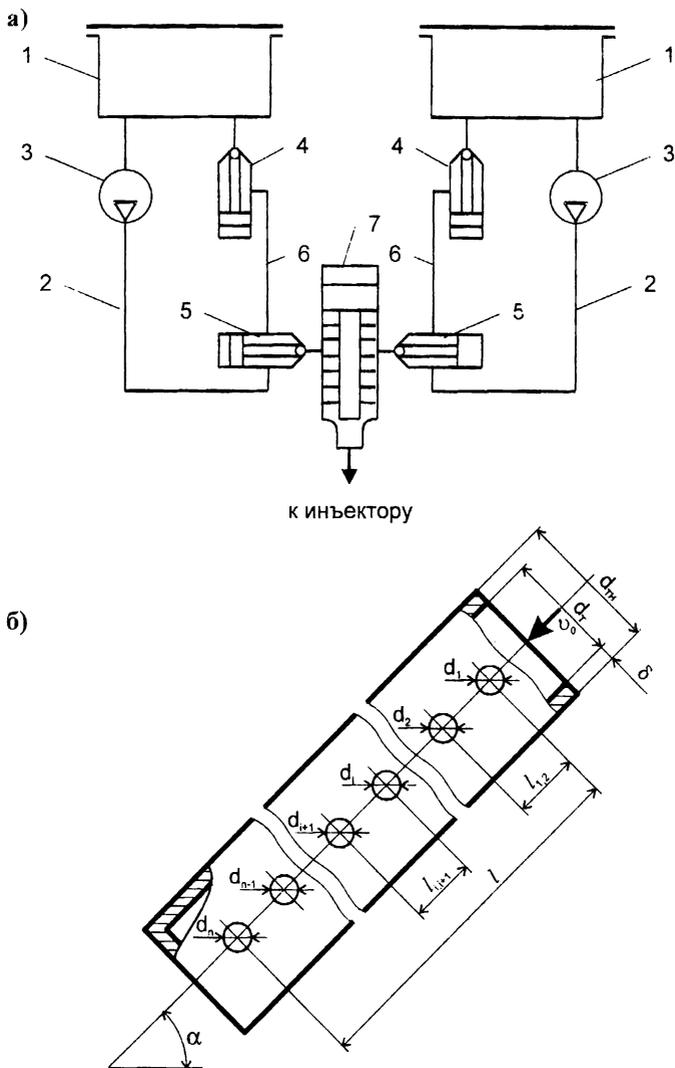


Рис.4.1. Принципиальная схема заливочной машины (а) с перфорированным инжектором (б)

1 – емкости для жидких компонентов композиции;

2 – линии подачи компонентов; 3 – насосы;

4-5 – клапаны; 6 – линии рециркуляции;

7 – смешительная головка;

v_0 – начальная скорость композиции на входном участке инжектора

Заливочная машина работает следующим образом. Жидкие компоненты полимерной композиции из емкостей 1 насосами 3 по линиям подачи 2 нагнетаются в смесительную головку 7. При подаче компонентов в смесительную головку 7 клапаны 5 открываются, а клапаны 4 закрываются. В смесительной головке компоненты композиции перемешиваются, и готовая смесь по шлангу поступает в перфорированный иньектор, который распределяет заливаемый объем композиции в полости изделия. По окончании заливки клапаны 5 закрываются и одновременно открываются клапаны 4. Компоненты композиции насосами 3 прокачиваются из емкостей 1 по линиям нагнетания 2 через клапаны 5 по линиям возврата 6 через клапаны 4 обратно в емкости 1. Прокачка (рециркуляция) компонентов композиции по линиям подачи и рециркуляции при неработающей смесительной головке необходимы для поддержания нормального состояния компонентов.

По сравнению с непрерывным способом стендовый способ изготовления более универсален и позволяет производить многослойные изделия различного конструктивного исполнения с обшивками из различных профилей и материалов. Однако при заливке композиции в закрытые полости изделий значительно сложнее управлять характером ее распределения по поверхности нижней обшивки, чем при заливке в открытую форму.

При такой заливке из-за отсутствия необходимых знаний очень часто наблюдается неполное заполнение полости изделия, так как движущиеся навстречу друг другу фронты пеномассы не смыкаются из-за значительного расстояния между технологическими отверстиями, недостаточного времени от начала смешивания составляющих композиции до начала подъема пены (индукционный период вспенивания), приводящего к незавершенности процесса растекания, специфического соотношения скоростей вспенивания и отверждения, сложной гидродинамической обстановки и т.д. При смыкании двух вспенивающихся потоков композиции поверхность контакта и примыкающие к ней слои все равно образуют четкую дефектную зону. При эксплуатации таких изделий высока вероятность отказа по теплоизолирующей способности и прочности.

На практике для увеличения вероятности заполнения закрытых полостей панелей прибегают к заливке композиции с большим избытком. Однако это часто приводит лишь к увеличению неоднородности плотности пенопласта и к существенному перерасходу полимерного сырья. Кроме того, 100

течение вспенивающейся композиции в сравнительно узком зазоре между двумя обшивками большой длины увеличивает отношение продольного и поперечного размера ячеек пенопласта и меняет их ориентацию в пространстве по сравнению со свободным вспениванием. Следствием такого течения является анизотропия свойств заливочных пенопластов.

Перемещение пеномассы относительно ограничивающих поверхностей и возникающий при этом перепад избыточного давления, являются одними из основных причин неоднородности получаемого пенопласта и снижения надежности изделий. Перемещение пеномассы в значительной мере зависит от характера распределения композиции в полости изделия к концу индукционного периода вспенивания. Поэтому нужно так распределить композицию в полости изделия, чтобы исключалось движение пеномассы относительно поверхности формы.

Например, при изготовлении трехслойных панелей следует стремиться к тому, чтобы к началу подъема пены композиция быстро и равномерно покрывала поверхность нижней обшивки панели. В этом случае обеспечивается практически одинаковая толщина слоя поднимающейся пены и одновременное соприкосновение пены со всей поверхностью верхней обшивки, что будет сводить к минимуму суммарное перемещение пеномассы относительно обшивок, способствовать равномерному распределению избыточного давления и температуры в объеме формируемого слоя пенопласта и образованию однородной ячеистой структуры, а также улучшению адгезионных характеристик слоистого изделия.

Во всех рассмотренных и других случаях задача управления процессом заливки полимерной композиции может быть решена путем применения перфорированных инжекторов, имеющих правильно спроектированные геометрические параметры. Для этого требуется иметь математическое описание сложного в гидродинамическом и физико-химическом аспектах процесса движения высоковязких полимерных композиций в перфорированных инжекторах.

Экспериментальное изучение этого процесса затрудняется тем, что жидкие композиции имеют изменяющиеся во времени сложные (неньютоновские) характеристики и быстро переходят в сшитый продукт, имеющий трехфазную структуру («газ – твердое тело – жидкость») / 7 /. Эти особенности очень часто делают невозможным использование общепринятых в технической гидромеханике приборов и методов

исследования течения жидкости. Последующие процессы вспенивания и отверждения композиции в закрытой полости изделий и возникающее при этом напряженно-деформированное состояние пенопласта также не поддаются описанию и количественному оцениванию традиционными для строительных материалов методами. В лучшем случае традиционными методами можно построить лишь слишком упрощенные математические модели, которые не смогут в достаточной мере отразить состояние изучаемых процессов в различные моменты времени. Поэтому все надежды возлагались на построение моделей-имитаторов и экспериментирование с ними на ЭВМ.

Проблему подачи и заполнения полости изделия полимерной композицией можно сформулировать как задачу распределения заливаемого объема вспенивающейся композиции между отверстиями перфорированного инжектора. Необходимо выбрать ряд из n отверстий, имеющих для заданных условий максимально возможные (критические) диаметры, такие, чтобы вылившийся из отверстий инжектора объем композиции распределялся между отверстиями по определенной зависимости. При этом для любого отверстия должно удовлетворяться неравенство

$$\left| \left(V_i - \bar{V}_i \right) / \bar{V}_i \right| \leq \Delta, \quad (4.1)$$

где V_i и \bar{V}_i – соответственно расчетный и требуемый объем композиции, вытекающий из i -того отверстия; Δ – заданная величина (в долях единицы).

Предварительный мысленный эксперимент позволил высказать предположение о том, что объем композиции V_i , вытекающий из i -того отверстия инжектора, зависит от заливаемого объема композиции V ; вязкости η и плотности ρ составляющих композиции; кратности вспенивания k или плотности пенопласта ρ_n , оставшегося в инжекторе; длины перфорированной части l и внутреннего диаметра d_T инжектора; толщины его стенки δ ; числа отверстий n и значений расстояний между их центрами; диаметра i -того d_i и других отверстий; угла наклона инжектора к горизонту α ; избыточного давления (напора H_0) в смесительной головке заливочной машины и ее производительности (начальной скорости композиции на входном участке инжектора U_0); времени индукции композиции $\tau_{ин}$ (времени от начала смешивания составляющих композиции до начала подъема пены).

При решении подобных многофакторных задач очень важно разобраться в какой мере возможно изменять значения рассматриваемых факторов по своему усмотрению в реальных условиях функционирования изучаемого объекта. Это позволит оценить степень его управляемости.

В данном случае очевидно, что геометрические параметры инжектора можно фиксировать и контролировать с достаточной точностью. Управляемыми являются параметры H_0 и U_0 . Значения других величин определяются случайным воздействием температуры окружающей среды, изменением физико-химических свойств составляющих композиции во времени при хранении, условий дозирования и перемешивания перед заливкой и т.д.

Здесь мы сталкиваемся с неопределенностью и можно говорить лишь о частичном управлении такими параметрами. Плотность композиции ρ до вспенивания в возможном диапазоне варьирования температуры практически не будет изменяться и влиять на процесс движения композиции в инжекторе. Плотность пенопласта ρ_n будет играть некоторую роль только в случае, когда инжектор будет оставаться в полости конструкции. Чем меньше доля объема инжектора в объеме полости, тем слабее влияние ρ_n . Поэтому при изучении процесса движения композиции в инжекторе значения ρ и ρ_n будем считать фиксированными.

В возможном диапазоне варьирования температуры и сроков хранения вязкость составляющих композиции существенно изменяется (иногда на целый порядок), что заметно отражается на характере процесса и его результате. Поддерживать значение вязкости композиции η в узком диапазоне на практике не удастся. Таким образом, мы сталкиваемся с задачей выбора решения в условиях неопределенности. Для снятия этой неопределенности воспользуемся подходом, который в соответствии с /25/ можно называть принципом гарантированного результата. Смысл этого принципа заключается в том, что при любом значении η из рассмотренного диапазона (множества) выбранный ряд отверстий инжектора гарантирует выполнение условия (4.1).

Приведенная постановка задачи содержит все компоненты стандартно поставленной задачи обоснования решения в условиях неопределенности: объект выбора, условия выбора и правило выбора /26/. Такая постановка задачи появилась не сразу. Ей предшествовали неполные постановки с последующим пониманием специфики изучаемого процесса на основе

физического и математического моделирования. Для создания наглядных представлений о рассматриваемом процессе и условий “первоотолчка” при построении математической модели в лабораторных условиях был выполнен предварительный эксперимент.

Основная характеристика гидродинамического поведения полимерных систем в реальных условиях их течения является эффективная вязкость η , определяемая как отношение напряжения τ и скорости сдвига $\dot{\gamma}$. Результаты измерений вязкости полиэфира (основной составляющей пенополиуретановой композиции), выполненных с помощью реовискозиметра, показали, что с увеличением τ и $\dot{\gamma}$ величина вязкости η снижается и подтверждается явление аномалии вязкости, характерное для неньютоновских жидкостей. При малых значениях τ и $\dot{\gamma}$ начинает проявляться линейный режим ньютоновского течения. Установлено, что вязкость пенополиуретановой композиции на основе простых олигомеров (ППУ–317) можно определять как средневзвешенное вязкостей отдельных ее составляющих.

Необходимо отметить, что при движении композиции по перфорированному инжектору ее структура будет видоизменяться из-за переменных условий течения и химического взаимодействия между составляющими. Таким образом, важная гидродинамическая характеристика композиции является неопределенным параметром.

Другой важной характеристикой при истечении композиции через отверстия в стенке инжектора является коэффициент расхода отверстия μ . Опыты по истечению полиэфира из отверстий диаметра d ($2,5 \leq d \leq 3,5$ мм) трубчатого инжектора при малых числах Рейнольдса ($4,25 \leq Re_{\tau} \leq 10,63$) показали, что коэффициент μ зависит не только от Re_{τ} , но и от относительной длины отверстия δ/d . Эти отверстия следует рассматривать как короткие насадки и при расчете коэффициента μ учитывать сопротивление сил трения.

Выполненный физический эксперимент и теоретический анализ, включающий мысленный эксперимент гидродинамического явления, позволили установить, что при заливке закрытой полости конструкции с помощью перфорированных инжекторов в общем случае можно выделить четыре последовательных стадии. Стадия 1 – неустановившееся напорное движение композиции с переменным расходом до момента достижения заглушенного конца инжектора. Стадия 2 – установившееся напорное движение композиции с переменным расходом до момента окончания ее

подачи заливочной машиной. Стадия 3 – истечение композиции из отверстий инжектора при переменном напоре до момента окончания периода индукции. Стадия 4 – истечение композиции из отверстий инжектора в процессе вспенивания и формирования пеноструктуры. Отметим, что первые три стадии еще не имеют законченного описания, а последняя стадия вообще не рассматривалась. Поэтому необходимо было построить математическое описание каждой стадии и связать их между собой в единую систему. Для взаимосвязи этих стадий использовался закон сохранения массы.

4.2. Математическое описание процесса движения вспенивающихся полимеров в перфорированном инжекторе

В качестве интегральной характеристики при истечении композиции через отверстие в стенке инжектора принимаем расход /44/

$$q = \mu \omega_0 \sqrt{2gH}, \quad (4.2)$$

где μ – коэффициент расхода отверстия; ω_0 – площадь отверстия; g – ускорение свободного падения; H – напор давления или пьезометрическая высота, отвечающая избыточному давлению в точке. При определении расхода нескольких одинаковых отверстий, расположенных в поперечном сечении инжектора, ω_0 учитывает площадь всех этих отверстий.

Есть основания предполагать, что режим движения высоковязкой композиции в инжекторах и при истечении из круглых отверстий должен иметь ламинарный характер, так как числа Рейнольдса не будут превышать ста. Это позволяло при определении коэффициента μ использовать результаты работы /19/

$$\mu = -B + \sqrt{B^2 + 0,5}, \quad (4.3)$$

где $B = (6,75/Re_\tau) + (16\delta/d Re_\tau)$, $Re_\tau = d\rho\sqrt{2gH}/\eta$.

Сопоставление результатов опытов с результатами расчетов по формуле (4.3) показало, что опытные значения μ недопредсказываются этой формулой в среднем на 15%. Учитывая неопределенность вязкости композиции η , на данном этапе решения задачи нет необходимости корректировать формулу (4.3).

Расход жидкости из отверстия можно будет определить, если известна величина напора H , при котором происходит истечение. Для этого рассмотрим неустановившееся движение жидкости на длине инжектора между соседними отверстиями с учетом того, что согласно /21/ для нашего

случая потерями напора у отверстий можно пренебречь. Тогда живое сечение 1–1, взятое выше по течению у рассматриваемого отверстия, и 2–2, взятое ниже по течению, могут быть соединены уравнением Бернулли, которое относится к некоторому определенному моменту времени /44/,

$$z_1 + p_1/\gamma + \alpha U_1^2/2g = z_2 + p_2/\gamma + \alpha U_2^2/2g + h_l + h_i, \quad (4.4)$$

где z – геометрический напор (отметка точки относительно плоскости сравнения); $p/\gamma = \rho/g = H$ – напор давления; $\alpha U^2/2g$ – скоростной напор; h_l – потеря напора по длине; h_i – напор, затраченный в среднем на преодоление локальной силы инерции единицы веса жидкости, находящейся в данный момент времени между сечениями 1–1 и 2–2. Отметим, что $z+p/\gamma$ – потенциальный напор.

Так как в реальных условиях скорость движения композиции обычно не превышает 1 м/с и изменяется во времени достаточно медленно, то силами инерции и скоростным напором можно пренебречь. Если плоскость сравнения провести через центр тяжести сечения 2–2 и рассматривать его в момент совпадения со свободной поверхностью движущейся жидкости, то потенциальный напор в сечении 2–2 равен нулю, а геометрический напор в сечении 1–1 $z_1 = l \sin \alpha$

Тогда из уравнения (4.4) получаем выражение для определения напора, при котором будет происходить истечение композиции из отверстия,

$$H_l = h_l - l \sin \alpha \quad (4.5)$$

Потерю напора h_l вычисляем по формулам установившегося равномерного движения, так как необходимые данные для неустановившегося движения отсутствуют.

Для круглоцилиндрической трубы при ламинарном режиме в соответствии с /44/ получаем:

$$h_l = 32 \eta l U / d_T^2 \rho g. \quad (4.6)$$

Формулы (4.2), (4.3), (4.5) и (4.6) позволяют организовать итеративный процесс вычисления расхода композиции из отверстий инжектора на первых трех стадиях движения.

Для организации вычислений на первой стадии движения композиции, выполняемых по течению, задаются диаметрами всех отверстий инжектора и некоторой усредненной скоростью движения композиции между i -тым и $i+1$ отверстиями $U_{i,i+1} < U_{i-1,i}$ (j -тый шаг). При этой скорости на длине инжектора $l_{i,i+1}$ между i -тым и $i+1$ отверстиями определяются потери напора на трение

$$h_{/i,i+1} = 32\eta l_{i,i+1} U_{i,i+1} / d^2 \rho g$$

и напор у i -того отверстия при j -том шаге

$$H_i = h_{/i,i+1} - l_{i,i+1} \sin \alpha,$$

соответствующий моменту подхода свободной поверхности композиции к $i+1$ отверстию. Расчетный напор у i -того отверстия принимается равным $\bar{H}_i = 0,5H_i$. При этом напоре находится расход композиции q_i из i -го отверстия и падение скорости движения композиции $\Delta U_i = q_i / \omega_\tau$ после i -го отверстия, где ω_τ – площадь поперечного сечения иньектора.

Затем определяются расчетные напоры у отверстий, расположенных выше по течению,

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}_{i-1} &= H_{i-1} + \bar{H}_i; \\ \bar{H}_{i-2} &= H_{i-2} + H_{i-1} + \bar{H}_i; \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{H}_1 &= H_1 + H_2 + \dots + H_{i-1} + \bar{H}_i, \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

где H_1 – напор у первого отверстия, соответствующий моменту подхода свободной поверхности композиции ко второму отверстию при первом шаге; H_2 – напор у второго отверстия при втором шаге и т.д.

При найденных по (4.7) напорах вычисляются расходы и скачки скорости движения композиции у соответствующих отверстий и сравнивается соотношение между суммой $\Delta U_1 + \Delta U_2 + \dots + \Delta U_i + U_{i,i+1}$ и входной скоростью U_0 . Если относительная разница между ними по абсолютной величине не превышает выбранной малой величины, то итерации прекращаются и определяется продолжительность j -го шага и объемы композиции, вытекающие из отверстий на j -том шаге. По этой схеме доходят до заглушенного конца иньектора и завершают расчет первой стадии движения композиции вычислением ее продолжительности и объемов композиции, вытекающих из каждого отверстия и из всех отверстий V_{1j} .

После заполнения объема иньектора V_τ композицией наступает установившееся напорное движение, которое прекращается в момент окончания подачи композиции заливочной машиной. На второй стадии

движения вытечет объем композиции $V_{II}=V-V_{\tau}-V_1$ за время $\tau_{II} = V_{II} / U_0 \omega_{\tau}$. Расчет второй стадии движения композиции ведется против течения.

Для этого задаются напором H_n у последнего n -го отверстия и находят для него расход q_n и скачок скорости ΔU_n . Так как после n -го отверстия скорость движения композиции равна нулю, то на отрезке трубки $l_{n-1,n}$ между последним и предпоследним отверстием скорость равна $U_{n-1,n} = \Delta U_n$. Для этой скорости на длине $l_{n-1,n}$ по (4.6) определяются потери напора на трение $h_{l_{n-1,n}}$, а затем напор у $n-1$ отверстия

$$H_{n-1} = H_n + h_{l_{n-1,n}} - l_{n-1,n} \sin \alpha. \quad (4.8)$$

После определения напора H_1 , расхода q_1 и скачка скорости ΔU_1 у первого отверстия проверяется соотношение между суммой всех скачков скорости $\sum_{i=1}^n \Delta U_i$ и входной скоростью U_0 . Если эти величины совпадают с заданной точностью, то итеративный процесс прекращается и вычисляются объемы композиции, вытекающие из каждого отверстия $V_i = q_i \tau_{II}$.

Рассмотренная стадия может оказаться завершающей для случая, когда иньектор вынимается из полости конструкции. Если иньектор остается в заливаемой полости, то переходят к расчету третьей стадии.

Вычислительный эксперимент на ЭВМ показал, что на первой и второй стадиях движения необходимо учитывать падение входной скорости U_0 по мере заполнения иньектора композицией, так как при этом возрастают силы сопротивления движению. Изменение этих сил отслеживается, например, напором у первого отверстия H_1 , значения которого превышают напоры у остальных отверстий.

Для определения расчетной (скорректированной) входной скорости композиции $U_{0к}$ на первой и второй стадиях движения используется гидравлическое уравнение кинетической энергии (4.4) и организуется итеративный процесс. При заданной входной скорости U_0 реализуется рассмотренный алгоритм вычислений, устанавливается напор у первого отверстия H_1 , вычисляется величина

$$k = 2 \left(\frac{gH_0}{U_0^2} - 1 \right) U_0 \quad (4.9)$$

и скорректированная входная скорость

$$v_{ок} = \sqrt{(k/4)^2 + (H_0 - H_1)g} - (k/4), \quad (4.10)$$

которая принимается в качестве заданной при следующей итерации.

На втором и последующих шагах уточняется напор H_1 , а величина k сохраняется неизменной. Цикл вычислений прекращается после того, как входная скорость последней итерации с заданной точностью не отличается от таковой в предыдущей итерации. Так как на первой стадии движения композиции входная скорость снижается от начальной до скорости последней итерации, то в качестве расчетной принимается среднее значение этих двух скоростей. На второй стадии движения композиции расчетная скорость является усредненным результатом двух последних итераций.

На третьей стадии движения имеет место истечение композиции из отверстий иньекторов в атмосферу при переменном напоре. Расчет выполняется шаговым способом против течения с использованием формализации процесса истечения жидкости из отверстий и насадков при постоянном напоре. На каждом j -том шаге расчетов рассматривается снижение уровня (свободной поверхности) композиции в трубке от $i-1$ до i -го отверстия. Для момента времени, когда свободная поверхность композиции окажется на середине длины иньектора $l_{i-1,i}$ между $i-1$ и i -тым отверстиями, подбираются расчетные напоры у отверстий, расположенных ниже свободной поверхности, таким образом, чтобы избыточное давление на этой поверхности было равно нулю. Указанное условие записывается через расчетный напор у i -го отверстия

$$2\bar{H}_i + h_{l_{i-1,i}} - l_{i-1,i} \sin \alpha = 0. \quad (4.11)$$

При найденных напорах вычисляются расходы и скачки скорости движения композиции у отверстий. Сумма скачков скорости дает возможность определить расчетную скорость, продолжительность снижения уровня композиции между $i-1$ и i -тым отверстием и объемы композиции, вытекающие из отверстий на j -том шаге расчетов. Затем переходят к следующему $j+1$ шагу снижения уровня композиции от i -го до $i+1$ отверстия. После каждого шага расчетов выполняется сравнение продолжительности снижения уровня композиции от входного сечения иньектора до рассматриваемого сечения и времени индукции. Если при некотором шаге $j=u$ окажется

$$\sum_{j=1}^{j=u} \tau_j > \tau_{ин}, \quad (4.12)$$

то j -ый шаг считается последним в третьей стадии движения и определяются объемы композиции, вытекающие из всех отверстий инжектора. Далее следует четвертая стадия процесса.

На основании представлений о кинетике пенообразования, сформированных с помощью работ /6, 7, 11/ и опытов с трубчатыми инжекторами, была построена формула для определения условного напора, возникающего при вспенивании композиции у i -того отверстия наклонных и вертикальных инжекторов

$$H_i = A \left(1 - \frac{(l_i / l_k) - 1}{k - 1} \right) (1,15 - 0,01d_\tau), \quad (4.13)$$

где A – эмпирический коэффициент, учитывающий реакционную способность композиции и имеющий размерность длины; l_i и l_k – расстояние от нижнего заглушенного конца инжектора по ее оси до i -го отверстия и свободной поверхности композиции перед вспениванием соответственно; k – кратность вспенивания композиции в инжекторе. В этой формуле величина коэффициента A подбирается для конкретной композиции с помощью вычислительного эксперимента таким образом, чтобы расчетная продолжительность четвертой стадии с заданной точностью совпадала с опытной. Так, для композиции ППУ-317 установлено $A = 3,6$ см. Второй сомножитель отражает тот факт, что в нижних слоях вспенивающейся композиции избыточное давление выше, чем в верхних, а на свободной поверхности пены равно нулю. Третий сомножитель учитывает эффект стеснения формы, в которой происходит вспенивание композиции.

При известном напоре по формуле (4.2) определяется расход пены из i -го отверстия q_i , приведенный к объему невспененной композиции. Расчет рекомендуется начинать с нижнего отверстия. Если окажется, что $H_i < 0$, то у i -го и вышележащих отверстий напор принимается равным нулю.

Продолжительность истечения вспенивающейся композиции из i -го отверстия определяется в зависимости от общей продолжительности четвертой стадии и соотношения между длиной инжектора l_τ и произведением $l_k k$. В качестве примера приведем эмпирические формулы, полученные для композиции ППУ-317. Для других типов композиций структура формул может быть сохранена, но в соответствии с опытными данными изменены значения входящих в них коэффициентов. Если $l_\tau \geq l_k k$, то продолжительность истечения композиции ППУ-317 из i -го отверстия вычисляется следующим образом:

$$\tau_i = (23 - 0,6k) - (6,6 - 0,32k) \left(\frac{l_i}{l_k} - 1 \right), \quad (4.14)$$

где первое слагаемое учитывает общую продолжительность вспенивания композиции и эффект уменьшения массового расхода композиции из i -го отверстия по мере увеличения кратности вспенивания, а второе слагаемое учитывает расстояние i -го отверстия от свободной поверхности композиции перед вспениванием во взаимодействии с эффектом уменьшения массового расхода.

При $l_i < l_k$ возможно то, что свободная поверхность пены достигнет верхней заглушки инжектора. В этом случае вначале определяется продолжительность истечения композиции из i -го отверстия к моменту соприкосновения свободной поверхности пены с заглушкой

$$\tau'_i = (6,6 - 0,32k) \left(\frac{l_i - l_i}{l_k} \right). \quad (4.15)$$

Для каждого отверстия находится расход и объем вытекшей композиции $V'_i = q_i \tau'_i$, а также суммарный для всех отверстий расход $\sum q_i$ и объем $\sum V'_i$. Если этот объем не превышает объем композиции $V_{IV} = (l_k - l_k) \omega_T / k$, который вытекает на четвертой стадии, то свободная поверхность пены достигнет верхней заглушки инжектора и далее из отверстий инжектора вытечет композиция объема $V_u = V_{IV} - \sum V'_i$. При этом истечение композиции и ее вспенивание будет происходить в более стесненных условиях с повышением давления и расхода. Однако полагается, что расход композиции из отверстий не меняется. Тогда продолжительность истечения объема V_u составит $\tau_u = V_u / \sum q_i$ и из i -го отверстия вытечет объем $V''_i = q_i \tau_u$. Всего на четвертой стадии из i -го отверстия вытечет объем $V_i = V'_i + V''_i$.

Если $\sum V'_i > V_{IV}$, то свободная поверхность пены не поднимется до уровня заглушки инжектора и продолжительность истечения композиции из i -го отверстия определяется по (4.14), а объем равен $V_i = q_i \tau_i$.

Для горизонтальных инжекторов предлагается иная схема расчета, учитывающая два наиболее типичных случая. В первом случае между отверстиями сохраняется постоянный шаг h , а расстояние между входными сечениями и сечением первого отверстия l_0 равно расстоянию от сечения последнего отверстия до конца инжектора l_k и равно половине h . Тогда напор

у любого отверстия принимается равным $H_i = A$ и обычным способом определяется расход q_i .

Ситуация усложняется для случая, когда длина входного l_0 или концевого l_k участка инжектора превышает величину $h/2$. Тогда на участке, имеющем эту избыточную длину l_u ($l_u = l_0 - h/2$ или $l_u = l_k - h/2$), при вспенивании будет происходить приращение давления, что даст приращение напора у близлежащих отверстий.

Для определения приращения напора построена формула, похожая на формулу (4.13),

$$\Delta H_i = A \left(1 - \frac{(l_i / l_k) - 1}{k - 1} \right), \quad (4.16)$$

где l_i – расстояние от конца инжектора, имеющего избыточную длину до рассматриваемого i -того сечения.

Расчет ΔH_i рекомендуется начинать с той стороны инжектора, который имеет избыточную длину l_u . Если в результате расчета получается $\Delta H_i \leq 0$, то для этого отверстия принимается $\Delta H_i = 0$. Окончательный напор у i -го отверстия равен $H_i = A + \Delta H_i$. При наличии избыточной длины у обоих концов инжектора определяется приращение напора сначала от избыточной длины одного конца $\Delta H_i'$, а затем другого $\Delta H_i''$. В итоге получаем $H_i = A + \Delta H_i' + \Delta H_i''$.

Рассмотренный алгоритм расчета распределения объема заливаемой композиции между отверстиями перфорированного инжектора был реализован на ЭВМ и при отладке программы, записанной на языке ФОРТРАН, выяснилось, что он сходится и устойчив, а модель процесса достаточно точно предсказывает данные опытов. На распечатке результатов вычислений содержатся исходные данные, включающие значения диаметров отверстий, объемы композиции, вытекающие из каждого отверстия на каждой стадии, итоговые объемы, продолжительность стадий, входную скорость и напоры у отверстий на первой и второй стадиях движения композиции и, наконец, сообщение о выполнении или невыполнении условия выбора (4.1). Предусмотрены и другие сообщения, облегчающие оператору поиск решения.

Созданная диалоговая система имитации, основой которой является математическая модель, имитирующая процесс движения композиции в перфорированном инжекторе, позволяет путем вычислительного эксперимента изучить и понять поведение объекта исследования, выяснить

границы, в которых возможно его нормальное функционирование, накопить информационные ресурсы для принятия различных решений, создать методики инженерных расчетов.

4.3. Вычислительный эксперимент и критические геометрические параметры перфорированных инжекторов

Вначале вычислительный эксперимент проводился с целью оценки адекватности математической модели, ее усовершенствования, расширения и углубления представлений об изучаемом процессе.

Прежде всего данные численного эксперимента сравнивались с имеющимися опытными данными, полученными при заливке полиуретановых композиций в заглушенные с одного конца трубчатые инжекторы ($l_T=250$ см, $d_T=1,8$ см, $\delta=0,17$ см) с четырьмя парами одинаковых отверстий ($d=0,25$ см), расположенных с шагом $h=50$ см. Время индукции $\tau_{ин}=45$ с. Плотность композиции $\rho=1200$ кг/м³. Производительность заливочной машины $Q=66,7$ см³/с. Результаты этого сравнения приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Распределение объема композиции между парами отверстий

Способ получения информации	Объем композ., см ³	α , град.	η , Па·с	Порядковые номера пар отверстий и вытекшие из них объемы, см ³			
				1	2	3	4
Опыт	988	0	0,52	292,5	265	186	151,5
Вычисление	988	0	0,52	321,3	231,4	178,7	164,6
Опыт	950	0	1,0	308	229,6	158	147,4
Вычисление	950	0	1,0	324,8	211,5	153,3	154,3
Опыт	988	50	0,52	123,5	103,5	209,5	453
Вычисление	988	50	0,52	120	130,3	201,5	445,9
Опыт	990	50	1,0	192	161,5	220	316,6
Вычисление	990	50	1,0	187,6	168,3	216,4	326,1

Неопределенность параметра η и невозможность жесткой фиксации условий натурального эксперимента дают основания воспринимать все измеряемые величины как случайные. Поэтому при сравнении результатов натурального и вычислительного эксперимента наблюдаются отклонения различного знака, которые лежат в пределах ошибки эксперимента.

Приведенные в табл. 4.1 примеры свидетельствуют о том, что в одинаковых условиях построенная модель способна достаточно точно предсказывать результаты натурального эксперимента (функция прогнозирования). В ходе исследования модель может выполнять и другие функции, которые приведены в классификации работы /24/. Из табл.4.1 видно, что вязкость композиции η в наклонной трубке ($\alpha=50^\circ$) влияет на распределение заливаемого объема композиции между отверстиями значительно сильнее, чем в горизонтальной. Это легко объяснить при вычислительном эксперименте, рассматривая ход изучаемого процесса во времени (объяснительная функция). В натурном эксперименте объяснить тот или иной эффект удастся не всегда.

Установлено, что результаты расчета для одной точки факторного пространства могут быть использованы для принятия решения в другой точке при условии сохранения равенства трех критериев подобия /8 /:

- первый критерий требует соблюдения геометрического подобия

$$\pi_1 = l/d_T = \text{idem},$$

где l – длина перфорированного участка инжектора;

- второй критерий – критерий Рейнольдса

$$\pi_2 = U_0 d_T \rho / \eta = \text{Re},$$

- третий критерий – критерий Эйлера

$$\pi_3 = \Delta p / U_0^2 \rho = \Delta Hg / U_0^2 = \text{Eu},$$

где $\Delta p(\Delta H)$ – падение давления (напора) на длине l .

Например, критические диаметры отверстий, найденные при определенных условиях для инжектора одних размеров, для инжектора вдвое меньших размеров могут быть сокращены в два раза, если при этом сохраняется начальная входная скорость U_0 , а вязкость композиции η уменьшается вдвое. Соблюдение известных в гидродинамике условий подобия лишней раз говорит о том, что полученная модель адекватно отражает изучаемый процесс.

Сопоставление результатов вычислительного эксперимента с данными физического эксперимента, теоретического прогноза и накопленного опыта убеждает в том, что выбранная математическая модель и вычислительный алгоритм вполне пригодны для анализа процесса заливки высоковязких полимерных композиций в закрытые полости конструкций.

С целью решения практических задач был выполнен анализ процесса заливки композиций в полость горизонтально расположенных панелей при

стендовом способе производства. При организации вычислительного эксперимента ориентировались на реальное факторное пространство и порционную подачу композиции в полость изделия с помощью трубчатого инжектора, имеющего n пар отверстий, подбираемых с учетом только первой и второй стадий движения композиции.

Максимально возможные (критические) диаметры отверстий инжектора в фиксированных точках факторного пространства выбирались из условия, при котором для любой пары отверстий расчетный объем вытекающей композиции V_i не отклонялся от заданного \bar{V}_i более чем на 10%. При равномерном распределении объема композиции между парами отверстий это правило выбора можно записать таким образом:

$$|(nV_i/V) - 1| \leq 0,1, \quad (4.17)$$

где V – объем композиции, вытекающий из всех отверстий инжектора.

В зависимости от размеров панели, плотности пенопласта и особенностей оборудования в каждое технологическое отверстие панели подается от $11 \cdot 10^{-3}$ до $29 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ композиции, вязкость η которой может меняться от 1 до 10 Па·с (иногда до $\eta = 15 \text{ Па·с}$). Плотность композиции $\rho = 1250 \dots 1400 \text{ кг/м}^3$. Внутренний диаметр трубчатого инжектора $d_r = 27 \dots 32 \text{ мм}$ с толщиной стенки $\delta = 3 \dots 5 \text{ мм}$. Длина инжектора, вводимая в полость панели, составляет $0,9 \dots 1 \text{ м}$ и на этой длине с одинаковым шагом размещается 4 или 5 пар отверстий, через которые перпендикулярно оси инжектора происходит истечение композиции. Продолжительность заливки не должна превышать 60 с. Производительность заливочной машины до $10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$. Избыточное давление в смесительной головке заливочной машины находится на уровне $0,6 \dots 0,7 \text{ МПа}$.

При проведении вычислений на ЭВМ фиксировалась плотность композиции $\rho = 1300 \text{ кг/м}^3$ и напор в смесительной головке заливочной машины $H_0 = p/\rho g = 50 \text{ м}$. В вычислительном эксперименте варьировалось значение вязкости η и объема заливаемой композиции V , начальной входной скорости U_0 , диаметра инжектора d_r , толщины его стенки δ и числа пар отверстий. В каждом опыте в диалоговом режиме подбирались максимально возможные диаметры отверстий, удовлетворяющие правилу (4.17) и обеспечивающие реализуемость процесса при заданных условиях. Дальнейшее увеличение значений диаметров отверстий приводило к тому, что композиция не могла пройти до последней пары отверстий. Таким образом, каждому набору уровней варьируемых факторов будет соответствовать свой набор критических

диаметров отверстий. Представляло интерес выяснить степень влияния варьируемых факторов на значения критических диаметров отверстий.

Результаты вычислительного эксперимента показали, что в рассматриваемом диапазоне изменения величина заливаемого объема композиции V практически не влияет на значения критических диаметров отверстий. Поэтому набор диаметров отверстий можно выбрать только для одного значения заливаемого объема композиции, взятого, например, из середины интервала варьирования. Изменение начальной входной скорости композиции U_0 тоже практически не влияет на значения диаметров отверстий. Если не учитывать временных ограничений, то критические диаметры отверстий, найденные при максимально возможной скорости U_0 (наибольшей производительности заливочной машины), по условию (4.17) оказываются пригодными и при скоростях в несколько раз меньших. Влияние остальных варьируемых факторов следует признать значимым.

В табл.4.2 приведены величины критических диаметров отверстий d_i (числитель) и соответствующих вытекающих объемов V_i (знаменатель) при различных значениях вязкости композиции для инжектора диаметра $d_r=30$ мм с толщиной стенки $\delta = 4$ мм, пятью парами отверстий, расположенными с шагом $h=200$ мм. Композиция объема $V=22648$ см³ подавалась в инжектор с начальной входной скоростью $U_0=0,9$ м/с.

Таблица 4.2

Критические диаметры отверстий d_i , мм (числитель) и вытекающие из них объемы V_i , см³ (знаменатель)

Вязкость η , Па·с	Напор H_1 , м	Продол- жительность заливки τ , с	Порядковый номер пары отверстий				
			1	2	3	4	5
5	7,54	41,20	<u>5,2</u> 4277	<u>5,7</u> 4482	<u>6,1</u> 4390	<u>6,5</u> 4423	<u>6,6</u> 4148
10	14,01	48,5	<u>5,0</u> 4234	<u>5,4</u> 4356	<u>5,8</u> 4462	<u>6,0</u> 4193	<u>6,3</u> 4470
15	19,40	56,2	<u>4,9</u> 4250	<u>5,3</u> 4491	<u>5,6</u> 4458	<u>5,8</u> 4311	<u>5,9</u> 4199

Из табл.4.2 видно, что с увеличением вязкости композиции критические диаметры отверстий уменьшаются, а максимальный напор, формирующийся у первой пары отверстий, и продолжительность заливки одного и того же объема возрастают. Если не уменьшать диаметры отверстий с повышением вязкости, то композиция не сможет пройти до последней пары отверстий (или двух последних пар) и иньектор перестанет выполнять свое функциональное назначение. Для восстановления его функции потребуется увеличить напор в смесительной головке или уменьшить начальную входную скорость композиции. Так, при подаче композиции вязкостью $\eta=9$ Па·с в иньектор, имеющий $d_r=27$ мм; $\delta=4$ мм; $n=5$; $h=200$ мм, при начальной скорости $U_0=1,1$ м/с и напоре $H_0=50$ м, не удалось подобрать диаметров отверстий, обеспечивающих выполнение условия (4.17). Композиция не могла пройти до пятой пары отверстий. Задачу удалось решить после снижения начальной скорости U_0 с 1,1 до 0,9 м/с (при $H_0=50$ м) и после повышения напора в смесительной головке H_0 с 50 до 80 м (при $U_0=1,1$ м/с).

Необходимо отметить, что критические диаметры отверстий, выбранные для верхней границы вязкости композиции, как правило оказываются пригодными с точки зрения правила (4.17) и для более низких значений вязкости. Об этом свидетельствуют данные табл. 4.3, полученные для иньектора: $d_r=27$ мм; $\delta=4$ мм; $n=5$; $h=200$ мм при $U_0=0,9$ м/с; $H_0=50$ м и $V=11610$ см³. С повышением скорости условие (4.17) при различных η выполнить сложнее.

Таблица 4.3

Объемы композиции, вытекающие из отверстий иньектора (V_i , см)

η , Па·с	H_1 , м	τ , с	Критический диаметр отверстий в паре, мм				
			$d_1=4,4$	$d_2=4,6$	$d_3=5$	$d_4=5,2$	$d_5=5,4$
1	3,05	23,4	2030	1996	2224	2250	2372
5	10,46	27,7	2170	2042	2220	2170	2259
9	15,96	31,7	2192	2048	2218	2155	2238

Из табл. 4.3 следует, что можно добиться еще более равномерного распределения объема композиции при увеличении диаметра второй пары отверстий до $d_2=4,7$ мм и при одновременном уменьшении диаметра пятой пары отверстий до $d_5=5,3$ мм. При этом для $\eta=5$ Па·с получили следующий ряд объемов: $V_1=2151$, $V_2=2177$, $V_3=2214$, $V_4=2177$ и $V_5=2139$ см³.

Данные табл. 4.2 и 4.3 показывают, что с нарастанием вязкости интенсивность ее влияния ослабевает.

Увеличение толщины стенки трубчатого инжектора δ приводит к некоторому повышению значений критических диаметров отверстий. Характер и степень влияния δ при $\eta = 5$ Па·с и $V = 14680 \text{ см}^3$ виден из табл. 4.4. Очень часто критические диаметры, выбранные для $\delta = 3$ мм, могут обеспечить равномерное распределение заливаемого объема композиции при $\delta = 4$ и 5 мм.

Наиболее сильно на значения критических диаметров d_i влияет внутренний диаметр инжектора d_t , рост которого дает существенное увеличение диаметров d_i . Уменьшение числа пар отверстий (при сохранении рабочей длины инжектора) так же приводит к увеличению диаметров.

При проведении вычислительного эксперимента по заливке высоковязких полимерных композиций в полость слоистых панелей с помощью перфорированных инжекторов в реальной области факторного пространства оказалось, что при выборе критических (максимально возможных) диаметров отверстий инжекторов условие (4.17) в ряде случаев удовлетворить не удалось. Выяснилось, что увеличивать длину l перфорированного участка инжектора в каждом конкретном случае можно лишь до вполне определенной величины. Для последующих обобщений удобнее пользоваться отношением длины l к внутреннему диаметру инжектора d_t . Это отношение является критерием геометрического подобия.

Таблица 4.4

Влияние диаметра инжектора d_t , толщины его стенки δ и числа пар отверстий n на критические диаметры отверстий

№ пп	d_t мм	δ , мм	n	Порядковый номер пар отверстий				
				1	2	3	4	5
1	27	3	5	4,3	4,6	4,9	4,3	5,2
2	27	4	5	4,5	4,8	5,1	4,5	5,4
3	27	5	5	4,6	4,9	5,2	4,6	5,5
4	32	3	5	5,5	5,9	6,3	5,5	6,9
5	32	4	5	5,7	6,2	6,7	5,7	7,5
6	32	5	5	5,8	6,3	6,8	7,3	7,5
7	27	3	4	4,7	5,2	5,6	5,8	
8	27	4	4	4,9	5,3	5,7	6,0	
9	27	5	4	5,0	5,4	5,8	6,0	

Если не учитывать ограничений, накладываемых на процесс движения композиции в инжекторе величиной напора давления H_0 в смесительной головке заливочной машины и заливаемым объемом V , то любому конечному отношению l/d_r будет соответствовать свой набор критических диаметров отверстий, удовлетворяющих правилу выбора (4.17). По мере увеличения отношения l/d_r растет напор у отверстий инжектора и его перепад между первым и последним отверстиями, а скорость движения композиции на входном конце инжектора U_0 и суммарная площадь отверстий критических диаметров уменьшается. Поскольку напор H_0 в смесительной головке заливочной машины ограничен, то при некотором отношении l/d_r не удастся подать композицию к последнему отверстию и, следовательно, подобрать отверстия, обеспечивающие заданный закон распределения объема композиции V на длине инжектора l . Такое отношение будет называть критическим и обозначать $(l/d_r)_{кр}$.

При проектировании перфорированных инжекторов нужно знать значения критических отношений $(l/d_r)_{кр}$ для того, чтобы истечение композиции из отверстий было устойчивым. Эти значения оценивались в расширенной области факторного пространства после ряда взаимосвязанных численных опытов, количество которых зависело от умения оператора анализировать данные текущих вычислений. Специальное экспериментирование на ЭВМ показало, что изменение числа отверстий от двух до шестнадцати при расстановке их в один или два ряда и относительной толщины стенки инжектора $0,1 \leq \delta/d_r \leq 0,15$ не давало существенных колебаний величины $(l/d_r)_{кр}$. Поэтому в дальнейшем предполагалось, что число отверстий и толщина стенки инжектора практически не влияют на отношение $(l/d_r)_{кр}$ и все расчеты выполнялись при пяти парах отверстий и $\delta/d_r=0,13$. В качестве основных варьируемых факторов рассматривался напор в смесительной головке заливочной машины H_0 , вязкость композиции η и ее скорость в момент входа в перфорированный инжектор U_0 (начальная скорость).

Опираясь на накопленный опыт и знания физики процесса, путем мысленного эксперимента не сложно предсказать качественный характер влияния каждого варьируемого фактора и без вычислительного или физического эксперимента. Чем выше вязкость η и скорость U_0 , тем меньше величина критического отношения $(l/d_r)_{кр}$. Повышение напора H_0 приводит к увеличению этого отношения. Для описания количественной стороны явления в выбранной области факторного пространства были собраны необходимые данные и затем аппроксимированы с помощью подходящих математических функций (моделей),

включающих изучаемые факторы. При построении моделей руководствовались общим принципом, сочетающим формальные и неформальные подходы и допускающим многообразие путей, ведущих к цели.

Результаты вычислительного эксперимента при напоре $H_0=50$ м представлены на рис.4.2, из которого видно, что высказанное о характере влияния вязкости η и скорости U_0 подтвердилось и для существующих в настоящее время заливочных машин возможности управляемой заливки высоковязких композиций в закрытые полости конструкций с помощью перфорированных иньекторов при скоростях $U_0 > 1$ м/с весьма ограничены. Аналогичные семейства кривых, отражающих зависимость $(l/d_r)_{кр} = f(\eta, U_0)$ были построены еще при двух уровнях напора $H_0 = 30$ и 70 м. Как и ожидалось, чем больше значение напора H_0 , тем выше лежат семейства этих кривых на совмещенном чертеже. Примечательно, что при фиксированном напоре H_0 и скорости U_0 в предкритическом состоянии движения композиции значения напоров, формирующихся у первой и последней пар отверстий, практически не меняются независимо от величин остальных параметров процесса.

При анализе графической информации оказалось, что зависимость $(l/d_r)_{кр} = f(\eta)$ хорошо аппроксимируется дробно-линейной функцией, три коэффициента которой в свою очередь являются функциями от U_0 . После использования идеи, которая близка идее ступенчатого регрессионного метода [13], при $H_0 = 50$ м получим:

$$(l/d_r)_{кр} = 34 - 35 U_0 + \frac{508 - 121 U_0^2}{\eta U_0 + 0,2} \quad (4.18)$$

Влияние напора H_0 можно учесть в виде сомножителя $C(H_0)$ к формуле (4.18). Однако в результате изучения данных выяснилась зависимость его величины от значения вязкости композиции η . С учетом взаимодействия между H_0 и η сомножитель имеет вид:

$$C(H_0, \eta) = 1 + \left(1 - \frac{H_0}{50}\right) \left(\frac{2,335}{\eta + 2} - 1,209\right) \quad (4.19)$$

Умножив (4.18) на (4.19) получим модель, учитывающую все три фактора,

$$(l/d_r)_{кр} = \left(34 - 35 U_0 + \frac{508 - 121 U_0^2}{\eta U_0 + 0,2}\right) \left[1 + \left(1 - \frac{H_0}{50}\right) \left(\frac{2,335}{\eta + 2} - 1,209\right)\right] \quad (4.20)$$

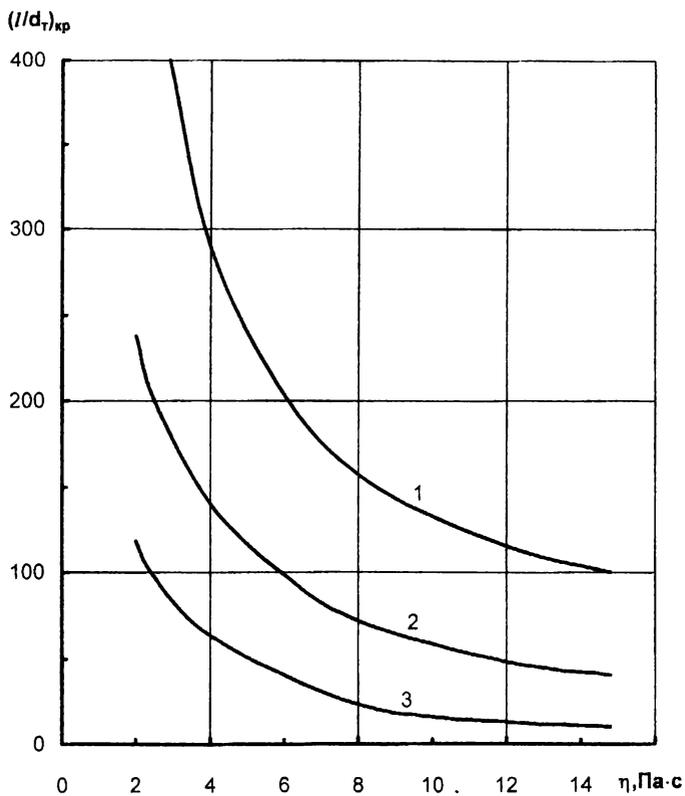


Рис. 4.2. Изменение критического отношения $(l/d_\tau)_{кр}$ в зависимости от вязкости η и начальной скорости движения композиции v_0 при напоре $H_0 = 50$ м

1 - $v_0 = 0,4$ м/с; 2 - $v_0 = 0,8$ м/с; 3 - $v_0 = 1,2$ м/с

Модель (4.20) достаточно точно описывает все данные, по которым она построена. Наибольшая величина отклонения не превышает 5%.

Для упрощения вычислительных работ было выполнено номографирование формулы (4.20). Номограмма, построенная по этой формуле и изображенная на рис. 4.3, образована из абака Декарта с равномерной сеткой и номограммы из выровненных точек с двумя параллельными и одной прямолинейной наклонной шкалами /39, 40/. На рис. 4.3 штриховыми прямыми показано решение числового примера (дано: $\eta = 4$ Па·с, $H_0 = 62$ м, $U_0 = 0.6$ м/с; ответ: $(l/d_r)_{кр} = 228$).

Таким образом, созданная диалоговая система имитации, основой которой является математическая модель, имитирующая процесс движения высоковязкой композиции в перфорированном инжекторе, позволяет изучить и понять поведение объекта исследования, выяснить границы, в которых возможно его нормальное функционирование, накопить информационные ресурсы для принятия различных решений. Выяснилось, что решение поставленных задач без вычислительного эксперимента было бы просто невозможно. При этом физический эксперимент (во всем доступном объеме) должен быть неотъемлемой частью вычислительного эксперимента.

На практике с целью уменьшения объема вычислительного эксперимента и возможности проведения инженерных расчетов, выполняемых в локальной области факторного пространства, целесообразно иметь приближенные формулы, полученные по данным вычислительного эксперимента и отражающие влияние наиболее существенных факторов.

4.4. Инженерный расчет технологических параметров заливки полимерных композиций в полость панели по стендовому способу

При периодическом способе производства слоистых панелей через n пар отверстий каждого инжектора в полость изделий подается порция композиции объемом V . При этом должно выполняться условие (4.17). Для решения такой задачи на основе построенной модели (см. раздел 4.2) в вычислительном эксперименте достаточно учитывать лишь первые две стадии движения композиции.

Данных, накопленных при построении формулы (4.20), оказалось более чем достаточно для того, чтобы подобрать подходящую аппроксимирующую формулу (модель) для определения критических диаметров отверстий, которая

может быть включена в методику инженерных расчетов при проектировании трубчатых инжекторов, имеющих n пар отверстий, расставленных с одинаковым шагом. Эта формула предназначена для определения отношения диаметра критического отверстия в i -й паре d_i к внутреннему диаметру инжектора d_r

$$\left(\frac{d_i}{d_r}\right)^2 = \left\{ \left(\frac{0,524n + 5,592}{\sqrt{l/d_r} \cdot (n+1,32)} - (4,72 - 0,34n)10^{-2} \right) \left[1 + \left(0,0205(i-1) + \frac{4,795(i-1)}{(n+0,76)^2} \right) \right] - (n-2)3 \cdot 10^{-3} \right\} \left(0,096 + \frac{0,453}{\eta + 5} \right) (1,12 - 0,19\mathcal{U}_0^2), \quad (4.21)$$

где i – порядковый номер рассчитываемой пары отверстий по ходу движения композиции ($i = 1, \dots, n$), а проектируемое отношение l/d_r не должно превышать критического $(l/d_r)_{кр}$, найденного по формуле (4.20); η и \mathcal{U}_0 – измеряются в единицах СИ.

Построение модели (4.21) потребовало значительно больших усилий и изобретательности, чем формулы (4.20). Тем не менее основной принцип и приемы решения задачи аппроксимации оставались прежними. При подгонке выбранных математических функций к данным стремились к тому, чтобы значения d_i , вытекающие из (4.21), оценивали таковые, найденные при вычислительном эксперименте, снизу. В табл. 4.5 приведена часть данных о результатах сравнения критических диаметров отверстий d_i , найденных с помощью инженерной формулы (числитель) и вычислительного эксперимента (знаменатель) при $d_r=30$ мм. Эти данные дают некоторое представление о степени приближения к цели задачи аппроксимации.

Включение полученных формул в диалоговую систему имитации позволяет оператору ускорить поиск критических диаметров отверстий и отношения $(l/d_r)_{кр}$. Практика использования формулы (4.21) в системе имитации показала, что примерно в 70 случаях из 100 она дает диаметры отверстий, которые удовлетворяют довольно жесткому правилу выбора (4.17), принятому для вычислительного эксперимента. Отклонения от этого правила легко устранить затрачивая обычно дополнительно один шаг вычислений. В случае промаха при физическом экспериментировании потребуется одна рассверловка отверстий после одной пробной заливки композиции.

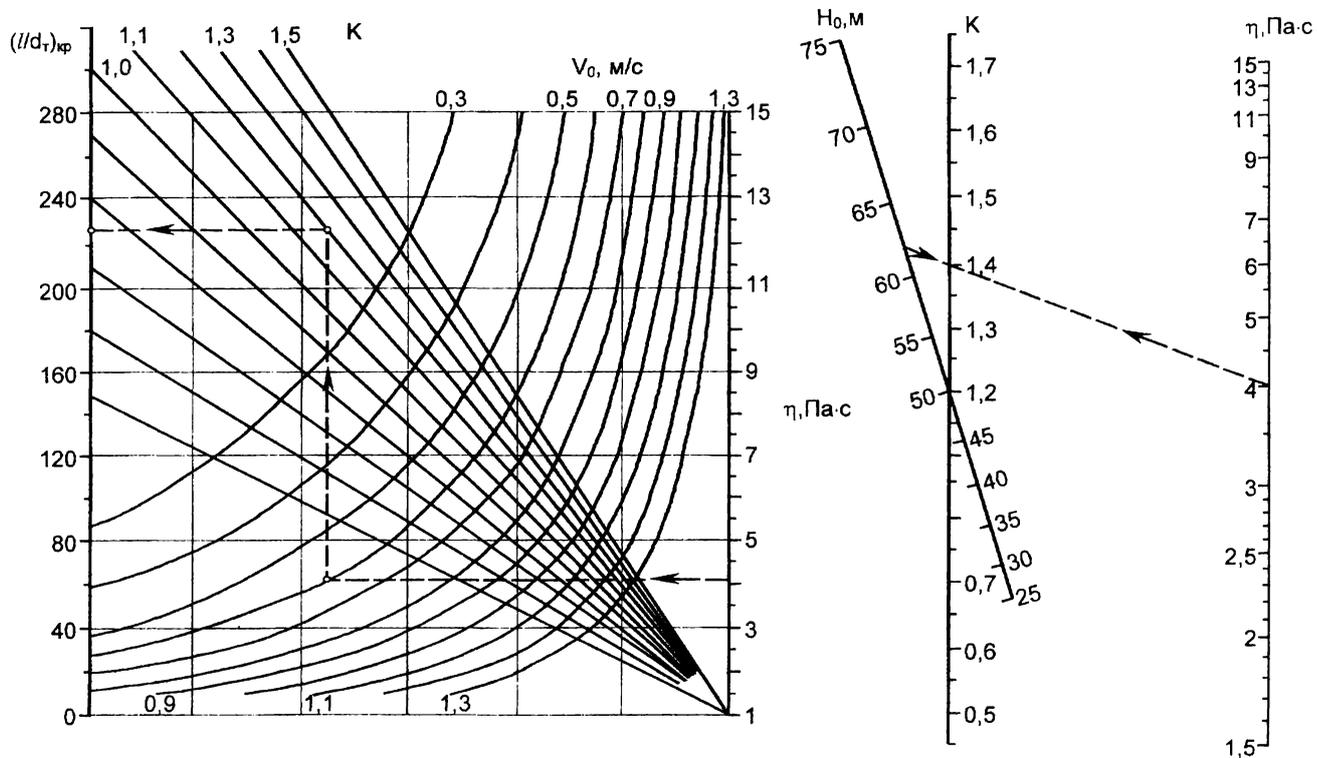


Рис.4.3. Номограмма для определения $(l/d_\tau)_{кр}$, построенная по формуле (4.20)

Таблица 4.5

Критические диаметры отверстий d_i (мм), найденные с помощью инженерной формулы (числитель) и вычислительного эксперимента (знаменатель) для $d_T=30$ мм

№ п/п	l/d_T	U_0 , м/с	η , Па·с	n	Порядковый номер пар отверстий							
					1	2	3	4	5	6	7	8
1	51,3	0,8	5	8	<u>3,7</u>	<u>3,9</u>	<u>4,1</u>	<u>4,2</u>	<u>4,4</u>	<u>4,5</u>	<u>4,7</u>	<u>4,8</u>
					3,7	3,9	4,1	4,3	4,5	4,6	4,7	4,8
2	102,7	0,8	5	8	<u>2,9</u>	<u>3,0</u>	<u>3,2</u>	<u>3,3</u>	<u>3,4</u>	<u>3,6</u>	<u>3,7</u>	<u>3,8</u>
					2,9	3,1	3,3	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
3	26,7	0,9	10	5	<u>4,8</u>	<u>5,2</u>	<u>5,6</u>	<u>5,9</u>	<u>6,3</u>			
					5,0	5,4	5,8	6,0	6,3			
4	36	0,8	15	5	<u>4,3</u>	<u>4,7</u>	<u>5,0</u>	<u>5,4</u>	<u>5,6</u>			
					4,6	5,0	5,3	5,6	5,8			
5	29,6	1,1	1	5	<u>4,7</u>	<u>5,1</u>	<u>5,5</u>	<u>5,8</u>	<u>6,1</u>			
					5,2	5,6	6,1	6,6	6,9			
6	29,6	1,1	5	5	<u>4,3</u>	<u>4,6</u>	<u>5,0</u>	<u>5,3</u>	<u>5,5</u>			
					4,5	4,8	5,1	5,3	5,4			
7	43	0,8	8	5	<u>4,3</u>	<u>4,7</u>	<u>5,0</u>	<u>5,3</u>	<u>5,6</u>			
					4,4	4,7	5,0	5,3	5,5			
8	20	0,8	5	5	<u>5,7</u>	<u>6,1</u>	<u>6,5</u>	<u>6,9</u>	<u>7,3</u>			
					5,7	6,2	6,7	7,1	7,5			
9	20	1,2	3	5	<u>5,4</u>	<u>5,9</u>	<u>6,3</u>	<u>6,7</u>	<u>7,0</u>			
					5,6	6,1	6,4	6,8	7,1			
10	20	0,8	2	5	<u>6,0</u>	<u>6,5</u>	<u>7,0</u>	<u>7,4</u>	<u>7,8</u>			
					5,9	6,5	7,1	7,6	8,0			
11	20	0,4	15	5	<u>5,4</u>	<u>5,8</u>	<u>6,3</u>	<u>6,7</u>	<u>7,0</u>			
					5,5	6,1	6,6	7,1	7,4			
12	240	0,4	1	5	<u>2,7</u>	<u>3,0</u>	<u>3,2</u>	<u>3,5</u>	<u>3,7</u>			
					2,3	2,8	3,2	3,4	3,6			
13	23,4	0,8	5	4	<u>6,1</u>	<u>6,8</u>	<u>7,4</u>	<u>8,0</u>				
					6,2	7,0	7,7	8,0				
14	27,8	1,1	5	4	<u>4,6</u>	<u>5,2</u>	<u>5,6</u>	<u>6,1</u>				
					4,9	5,3	5,7	6,0				
15	25	0,8	10	2	<u>6,4</u>	<u>8,2</u>						
					6,7	8,6						

Результаты номографирования формулы (4.21) представлены на рис. 4.4 в виде составной номограммы, содержащей шкалы вспомогательных переменных K_1 , K_2 , K_3 и K_4 . Шкалы последних трех переменных не градуировались (оставались немymi). Для нахождения ответа по данной номограмме вначале наложением линейки определяется значение K_1 и отметка на немой шкале K_2 . Затем делаются два наложения линейки на отметки шкал n и K_2 , U_0 и η для отыскания отметок на немых шкалах K_3 и K_4 . Последнее наложение линейки на эти отметки дает ответ. На номограмме штриховыми прямыми показано решение числового примера (дано: $n=4$, $i=4$, $l/d_s=20$, $\eta=2$ Па·с, $U_0=1$ м/с; ответ: $(d_4/d_r)^2=0,07$).

Следует отметить, что формула (4.21) дает наилучшие результаты тогда, когда объем композиции V_I , вытекшей из отверстий инжектора к моменту его заполнения, не превышает четверти объема композиции V_{II} , вытекшего после заполнения инжектора до момента прекращения подачи композиции. Как показали многочисленные данные вычислительного эксперимента, в реальных условиях будет наблюдаться отношение $V_I/V_{II}<0,2$. По мере роста доли объема V_I при удовлетворении правила выбора разница размеров критических диаметров между первым и последним отверстиями увеличивается. Поэтому при $V_I/V_{II}>0,25$ результаты расчетов по формуле (4.21) для первых пар отверстий нужно уменьшить. Для грубого оценивания объема V_I в изучаемой области факторного пространства можно воспользоваться соотношением

$$V_I = 1,15 d_r^2 \sqrt{l/\eta} / U_0, \quad (4.22)$$

где все величины берутся в единицах СИ.

При заливке композиции на горизонтальную поверхность полости изделия для получения качественного пенопласта следует добиваться того, чтобы ось струи, вытекающей из любого отверстия перфорированного инжектора, проходила через середину фактической ширины полосы растекания B_ϕ погонной массы композиции \bar{m} . Величина B_ϕ фиксирует ширину растекающейся полосы для момента времени $\tau = \tau_{ин}$, где $\tau_{ин}$ – время индукционного периода.

Значение B_ϕ можно оценить с помощью уравнения /29/

$$\frac{\eta \rho}{2\bar{m}} x^2 \frac{dx}{d\tau} = \frac{g\bar{m}^2}{2\rho x^2} - \sigma(1 - \cos\theta), \quad (4.23)$$

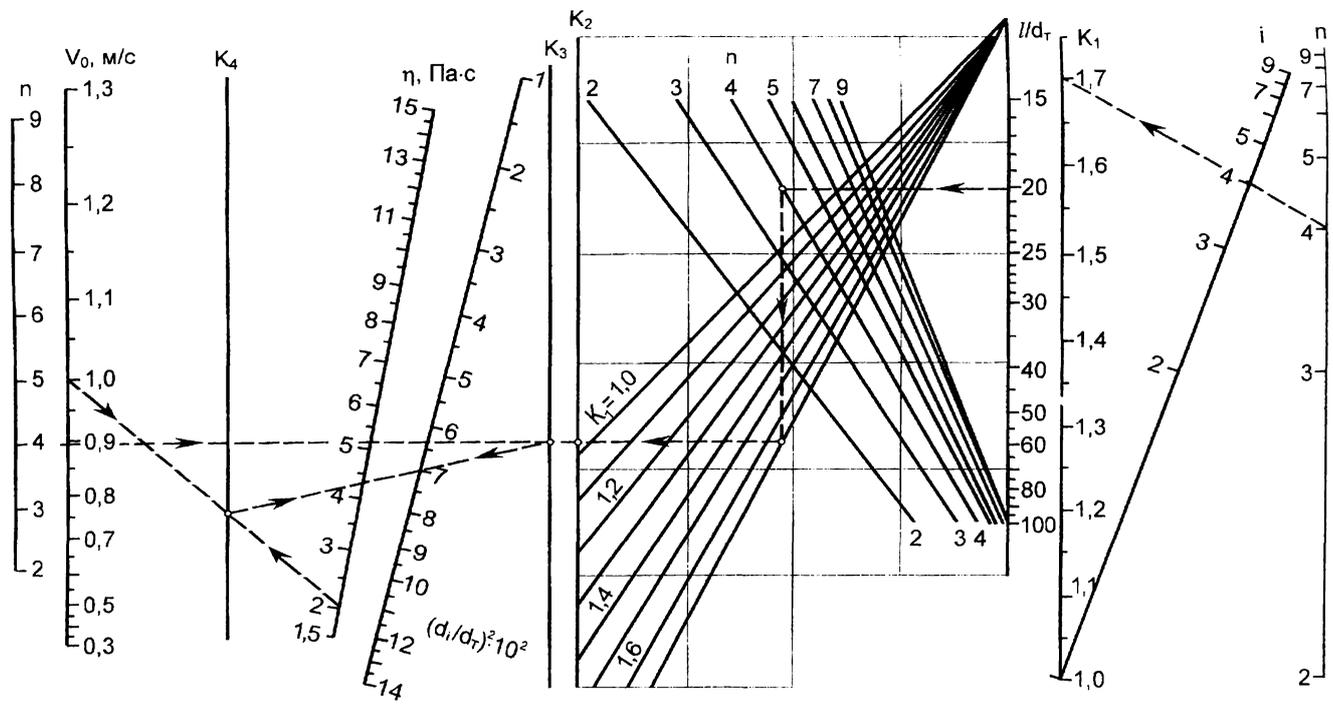


Рис.4.4. Номограмма для определения $(d_i/d_r)^2$, построенная по формуле (4.21)

где x – текущая ширина растекающейся полосы; \bar{m} – ее погонная масса; τ – время; ρ – плотность композиции; η – ее динамическая вязкость; σ – коэффициент поверхностного натяжения; θ – краевой угол смачивания; g – ускорение свободного падения.

Косинус краевого угла находится по формуле

$$\cos\theta = 1 - (8m2g/\sigma\rho^2D^4), \quad (4.24)$$

где m – масса большой капли ($m \geq 0,3$ кг); D – диаметр ее растекания на горизонтальной поверхности нижней обшивки, определяемый из опыта.

Дальность боя струи X_0 , при которой полосы растекания хорошо стыкуются друг с другом, должна быть равна

$$X_0 = (B_\phi - d_{тн})/2, \quad (4.25)$$

где $d_{тн}$ – наружный диаметр трубчатого иньектора.

В технической гидродинамике /44/ дальность боя струи из круглого отверстия с горизонтальной осью находится по формуле:

$$X_0 = 2\phi\sqrt{HZ_0}, \quad (4.26)$$

где H – напор, формирующийся у отверстий; Z_0 – расстояние от оси отверстия до горизонтальной поверхности, на которую бьет струя; ϕ – коэффициент скорости ($\phi \leq 1$). Измерив X_0 и Z_0 в условиях лабораторного опыта, можно оценить коэффициент ϕ .

В основу структуры формулы для отыскания напора H , формирующегося у отверстий иньектора, была положена формула для определения потери по длине в круглоцилиндрической трубе при ламинарном равномерном установившемся движении жидкости /44/, которая корректировалась с учетом результатов вычислительного эксперимента. Выяснилось, что для критических диаметров отверстий данные вычислительного эксперимента о напоре H_1 , формирующемся у первой пары отверстий иньектора, достаточно точно аппроксимируются следующим выражением:

$$H_1 = 1,8 \eta(1/d_\tau)(U_0^2 + 0,36)/\rho d_\tau. \quad (4.27)$$

Напор у последней пары отверстий иньектора примерно в два раза меньше H_1 . У остальных отверстий напор определяется путем линейной интерполяции. Тогда, согласно (4.26), для обеспечения одинаковой дальности боя X_0 из всех отверстий иньектора возвышение последней пары отверстий над поверхностью нижней обшивки панели должно в два раза превышать возвышение первой пары отверстий.

При использовании инжекторов с парными отверстиями шаг боковых отверстий панели b для введения инжекторов в закрытую полость должен быть близок удвоенной ширине V_{ϕ} . Если точное оценивание фактической ширины полосы растекания V_{ϕ} по формуле (4.23) не выполнялось, то можно воспользоваться грубой оценкой V , определяемой из условия равновесия по формуле

$$V = \sqrt{g\bar{m}^2 / 2\rho\sigma(1 - \cos\theta)}. \quad (4.28)$$

При этом нужно учитывать, что $V > V_{\phi}$.

Совокупность полученных здесь приближенных формул создает основу для проведения инженерных расчетов геометрических параметров перфорированного инжектора для заливки полимерной композиции в полость панели, изготавливаемой стендовым способом.

Для выполнения проектных расчетов геометрических параметров перфорированных инжекторов с помощью рассмотренных формул и номограмм нужно знать размеры утепляемой полости, массу композиции, заливаемую в эту полость, максимально возможную вязкость композиции, ее плотность и время индукции, производительность заливочной машины до присоединения инжекторов и напор (давление) в смесительной головке.

Пример расчета 4.1

Пусть требуется залить и равномерно распределить в закрытой полости панели с размерами $4 \times 1 \times 0,12$ м по горизонтальной поверхности её нижней обшивки вспенивающуюся полимерную композицию, которая имеет массу $M = 48$ кг, вязкость $\eta = 5$ Па·с, плотность $\rho = 1200$ кг/м³ и время до подъема пены после заливки $\tau_{\text{ин}} = 120$ с. Производительность заливочной машины до присоединения инжектора $Q = 0,63 \cdot 10^{-3}$ м³/с при напоре в смесительной головке $H_0 = 50$ м (если задаётся давление p , то $H_0 = p / \rho g$).

Исходя из размеров панели назначаем число одинаковых инжекторов, с помощью которых производится одновременная заливка массы композиции M , шаг боковых отверстий b и длину перфорированной части инжектора l . Допустим, что число инжекторов равно двум, $b = 2$ м, $l = 0,75$ м. Получаем четыре полосы растекания, каждая из которых должна иметь погонную массу $\bar{m} = 12$ кг/м и фактическую ширину свободного растекания $V_{\phi} = 1$ м. Выбираем внутренний диаметр инжектора $d_{\tau} = 27$ мм. Толщина стенки инжектора $\delta = 4$ мм и его наружный диаметр $d_{\text{н}} = 35$ мм. Из соотношения (4.25) находим требуемую дальность боя $X_0 = 0,4825$ м.

В опытах имитирующих производственные условия, измерили коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 0,08$ Н/м, диаметр свободного растекания $D = 0,38$ м массы композиции $m = 0,5$ кг. Эти данные используем для определения косинуса краевого угла θ . По формуле (4.24) получили $\cos\theta = 0,006$. Затем с помощью (4.23) отслеживаем текущую ширину свободного растекания x полосы жидкой композиции, имеющей погонную массу $\bar{m} = 12$ кг/м. Оказалось, что текущая ширина растекающейся полосы x достигнет значения $V_{\phi} = 1$ м через отрезок времени $\tau = 100$ с $\tau_{\text{ин}} = 120$ с. Это означает, что перед вспениванием композиции её слой будет покрывать поверхность нижней обшивки панели полностью, и иметь одинаковую толщину. Выполнение данного условия будет способствовать получению в полости изделия однородного пенопласта.

Для выбранного инжектора имеем отношение $l/d_{\tau} = 27,78$ и скорость движения композиции в момент её входа в инжектор $v_0 = Q/\pi d_{\tau}^2 = 1,1$ м/с. При $v_0 = 1,1$ м/с, $\eta = 5$ Па·с, $H_0 = 50$ м по формуле (4.20) определяем критическое отношение $(l/d_{\tau})_{\text{кр}} = 58,9$, которое превышает фактическое $l/d_{\tau} = 27,78$. Следовательно, для выбранного инжектора можно подобрать круглые отверстия, обеспечивающие заданный закон распределения композиции. По формуле (4.22) оцениваем объем композиции V_I , вытекающий из критических отверстий инжектора до момента его заполнения. Получаем $V_I = 0,296 \cdot 10^{-3}$ м³. Тогда $V_I/V_{II} = 0,015 < 0,25$ ($V_{II} = (M/2\rho) - V_I$) и не нужно задумываться над корректировкой диаметров, найденных по формуле (4.21) или рис. 4.4.

Принимаем число пар отверстий $n = 4$ и размещаем их на длине l с шагом 0,25 м. После подстановки $n = 4$; $l/d_{\tau} = 27,78$; $\eta = 5$ Па·с; $v_0 = 1,1$ м/с в формулу (4.21) получаем:

$$(d_i/d_{\tau})^2 = (0,2406 (1 + 0,2321 (i - 1)) - 0,006) 0,1258.$$

Изменяя i от 1 до 4, получим критические диаметры отверстий: $d_1 = 4,64$; $d_2 = 5,16$; $d_3 = 5,64$; $d_4 = 6,07$ мм. Поскольку эти диаметры максимально возможные (критические), то их следует уменьшить на 0,1...0,2 мм, округляя до десятых долей мм. После этого ряд диаметров отверстий, позволяющий достаточно равномерно распределить заливаемый объем композиции на длине l , будет иметь такой вид:

$$d_1 = 4,5; \quad d_2 = 5; \quad d_3 = 5,5; \quad d_4 = 5,9 \text{ мм.}$$

Решение поставленной задачи с помощью диалоговой системы

имитации привело к следующему ряду критических диаметров: $d_1=4,9$; $d_2=5,3$; $d_3=5,7$; $d_4=6$ мм, который практически совпадает с найденным по формуле (4.21). При этом $V_I/V_{II} = 0,013$.

Для оценки дальности боя струи опытным путем установили коэффициент скорости $\varphi = 0,44$. По формуле (4.27) для критических диаметров отверстий напор у первой пары отверстий равен $H_1 = 12,12$ м. У последней четвертой пары $H_4 = 6,06$ м. Вычислительный эксперимент дал следующие значения напоров: $H_1 = 12,26$ м и $H_4 = 6,32$ м. Согласно (4.26) необходимая дальность боя струи $X_0 = 0,4825$ м при $H_1 = 12,12$ м и $\varphi = 0,44$ обеспечивается возвышением первой пары отверстий $Z_{01} = 0,025$ м и последней четвертой пары $Z_{04} = 0,05$ м.

Приведенный пример показывает, что решение задачи о заливке композиции в полость слоистых панелей по стендовому способу доведено до уровня приемлемого для практики инженерных расчетов, выполняемых при проектировании и управлении этим процессом.

4.5. Расчет технологических параметров непрерывной заливки полимерных композиций при производстве многослойных панелей

На сегодня многослойные панели, изготавливаемые по непрерывному способу, могут иметь ширину до 1,3 м, толщину до 0,25 м, длину до 18 м и формироваться со скоростью до 25 м/мин. Основные принципы и схемы изготовления этих изделий рассмотрены в /43/. Для обеспечения процесса изготовления слоистых панелей по непрерывному способу необходима правильная взаимосвязка свойств применяемых заливочных композиций с параметрами используемого оборудования. Прежде всего это относится к процессу заливки композиции в полость панели.

Наиболее распространенным устройством, осуществляющим данный процесс, является смесительно-дозировочная установка для приготовления активированной композиции с подвижной (осциллирующей) заливочной головкой /43/. Любое используемое устройство должно обеспечивать наиболее подогнанное к сечению профиля распределение полимерной композиции, которое создает для последующей реакции вспенивания условия, обеспечивающие практически лишь вертикальный подъем пеномассы, что, в свою очередь, благоприятствует образованию оптимальных по размерам и ориентации ячеек, а также равномерному распределению плотности пенопласта по объему полости изделия.

4.5.1. Литье композиции в полость панели с помощью осциллирующей головки

В зависимости от принятого расхода композиции производительность заливочного устройства (Q , м³/мин) определяется исходя из соотношения

$$Q = v \Omega \rho_p / \rho, \quad (4.29)$$

где v – скорость движения нижней обшивки, на которую наносится активированная композиция, м/мин; Ω – площадь поперечного сечения панели по пенопласту, м²; ρ_p и ρ – плотность пенопласта и композиции, кг/м³.

При этом для заполнения полости панели отношение ρ/ρ_p , характеризующее кратность вспенивания композиции в стесненных условиях, не должно превышать кратности свободного вспенивания K . Эффективное вспенивание и формирование качественного пенопласта в значительной мере обеспечивается тогда, когда слой нанесенной композиции достаточно равномерно распределяется на поверхности нижней обшивки и имеет среднюю (расчетную толщину), превышающую критическую.

Для расчетной толщины слоя композиции (h_p , м) справедливо выражение

$$h_p = Q / v b_n \quad (4.30)$$

где b_n – ширина панели, м.

Критическая толщина слоя композиции $h_{кр}$ зависит от ее состава, температуры и условий окружающей среды. Отмечается [43], что заметное увеличение роста пены для пенополиуретановых композиций начинается с толщины 2,5 мм, для фенолоуретановых и фенольных – соответственно с 4 и 5 мм.

На характер распределения выливаемой композиции на поверхности нижней обшивки влияет ее профиль и особенности выпускного элемента смесительной головки. При постоянной скорости движения смесительной головки v_r , имеющей одно выходное отверстие, выливаемая композиция будет наноситься на плоскую поверхность обшивки в виде периодической функции треугольной формы, длина волны которой равна:

$$\lambda = v / n_r, \quad (4.31)$$

где n_r – число двойных ходов смесительной головки в мин.

Волнообразная полоса вылитой композиции будет растекаться и к

моменту вспенивания может закрыть (не закрыть) всю поверхность нижней обшивки. Длина развертки этой полосы за одну минуту выпуска составит

$$L = \sqrt{U^2 + 4a_r^2 p_r^2}, \quad (4.32)$$

где a_r – амплитуда колебаний смесительной головки, м.

Тогда погонная масса полосы выпускаемой композиции равна:

$$\bar{m} = Q\rho / L. \quad (4.33)$$

Для равномерного закрытия всей плоскости горизонтальной поверхности нижней обшивки слоем жидкой композиции необходимо правильно выбрать соотношение между амплитудой колебаний смесительной головки a_r и шириной панели b_n ($a_r > b_n$), между длиной волны λ и шириной свободного растекания полосы выливаемой композиции B , определяемой по (4.23) к моменту окончания индукционного периода вспенивания. Желательно, чтобы $B \geq \lambda/2$. Для уменьшения λ следует увеличивать скорость движения смесительной головки U_r . При высокой скорости движения полосы U и ограниченной U_r нужно использовать несколько выходных отверстий или смесительных головок, дающих несколько волнообразных полос, расположенных на обшивке со сдвигом, который кратен числу выходных отверстий. Соотношение между a_r и b_n устанавливается экспериментально на основе геометрических и технологических соображений. Тогда, когда толщина слоя композиции, определенная по формуле (4.30), не превышает минимальной толщины

$$h = \bar{m} / \rho B, \quad (4.34)$$

найденной из условия свободного растекания полосы композиции, то композиция не может покрыть всю поверхность нижней обшивки. Для устранения этого недостатка потребуется улучшить смачиваемость поверхности нижней обшивки. При этом желательно, чтобы формирующаяся толщина слоя композиции не оказалась ниже критической $h_{кр}$.

При использовании профилированной нижней обшивки задача распределения композиции на ее поверхности усложняется. Представляется, что в этом случае целесообразно отказаться от применения подвижной заливочной головки и использовать более простое устройство, включающее стационарную смесительную головку с выпускным элементом в виде перфорированного трубчатого иньектора и позволяющее наносить композицию отдельно на продольные выступы и впадины нижней обшивки в соответствии с профилем поперечного сечения панели.

4.5.2. Процесс литья композиции на нижнюю обшивку панели с помощью перфорированного инжектора

Расчет геометрических параметров перфорированного инжектора можно осуществить путем вычислительного эксперимента на диалоговой системе имитации после соответствующей корректировки математической модели. Предусмотрев при этом однорядное расположение выходных отверстий, достаточно большую порцию заливаемой композиции, при которой будет доминировать вторая стадия движения композиции, и правило выбора критических диаметров отверстий, обеспечивающих выбранный закон распределения объема выливаемой композиции между отверстиями. Поскольку профили нижней обшивки обычно периодические, то и закон распределения объема композиции между отверстиями должен быть периодическим. Толщина слоя жидкой композиции во впадинах профиля обшивки должна быть больше, чем на выступах. Следует отметить, что с количественной стороны характер распределения объема композиции между отверстиями инжектора и по ширине обшивки чаще всего не будет совпадать, так как композиция стекает с выступов профиля во впадины.

Из (4.34) с учетом (4.28) устанавливаем выражение для определения минимальной толщины слоя композиции, которая может сформироваться на плоской горизонтальной поверхности выступа профиля после завершения процесса свободного растекания,

$$h = \sqrt{2\sigma(1 - \cos\Theta)} / \rho g. \quad (4.35)$$

Если толщина слоя композиции, найденная из (4.35), больше рассчитанной исходя из выбранного закона ее распределения между отверстиями инжектора, то композиция не будет стекать с выступов профиля во впадины и не покроет поверхность обшивки полностью.

Когда задана геометрия профиля обшивки и она увязана с геометрией инжектора, когда известны расходы композиции из выходных отверстий инжектора и время индукционного периода вспенивания, тогда с помощью выражения (4.23) можно оценить распределение композиции по ширине обшивки к моменту подъема пены. Численный анализ показал, что предпочтительнее всего оси выходных отверстий инжектора располагать в плоскостях симметрии выступов и впадин профиля обшивки и обеспечивать одинаковый расход композиции из всех выходных отверстий.

Для периодических профилей была построена аппроксимирующая формула, позволяющая определить максимально возможные (критические)

диаметры отверстий инжектора в зависимости от наиболее существенных факторов. Данные необходимые для построения этой формулы собирались путем вычислительного эксперимента на диалоговой системе имитации. Рассматривался трубчатый инжектор, имеющий внутренний диаметр d_i , относительную толщину стенки $\delta/d_i = 0,13$ и число отверстий n , расположенных в один ряд с одинаковым шагом. Поиск критических диаметров отверстий инжектора выполнялся исходя их условия (4.17), при котором для любого отверстия расчетный объем вытекшей композиции не отклонялся от заданного более чем на 10%. При проведении вычислительного эксперимента и выборе структуры аппроксимирующей формулы (модели) учитывалась реальная область факторного пространства и опыт, накопленный при построении аналогичной формулы (4.21).

После подгонки выбранной модели к собранным данным получили следующее выражение для определения отношения диаметра критического i -го отверстия d_i к внутреннему диаметру инжектора d_i

$$(d_i / d_i)^2 = \left\{ \left[\left(\frac{1,36}{n+2,09} + 0,08 + \left(\frac{25,53}{n-1} - 1,73 \right) (i-1) 10^{-2} \right) / \sqrt{l/d_i} \right] - \right. \\ \left. - \left(6,3 - \frac{14,4}{n+1} \right) 10^{-3} - (1,52 - 0,389\sqrt{n}) (i-1) 10^{-3} \right\} \left(0,68 + \frac{3,2}{\eta+5} \right) (1,12 - 0,19U_0^2), \quad (4.36)$$

где i – порядковый номер отверстия инжектора по ходу движения композиции ($i = 1, \dots, n$); η – вязкость композиции; U_0 – начальная скорость движения композиции в момент входа в инжектор; l – длина перфорированной части инжектора; отношение l/d_i не должно превышать критической величины $(l/d_i)_{кр}$, найденной по (4.20).

При решении задачи аппроксимации стремились к тому, чтобы выражение (4.36) оценивало результаты вычислительного эксперимента снизу в следующей области факторного пространства: $3 \leq n \leq 12$; $1 \leq \eta \leq 15$ Па·с; $0,4 \leq U_0 \leq 1,2$ м/с; $20 \leq H_0 \leq 70$ м; $30 \leq l/d_i \leq (l/d_i)_{кр}$. В какой мере это удалось можно судить по табл. 4.6, в которой приведена упорядоченная по n случайная выборка данных о результатах сравнения отношения (d_i/d_i) , определенного по (4.36) (числитель) и при вычислительном эксперименте (знаменатель) для $H_0 = 50$ м. Из табл. 4.6 видно, что только в одном случае из девяти критические диаметры отверстий d_i , найденные по аппроксимирующей формуле (4.36), незначительно превышают те, которые установлены при вычислительном эксперименте. По всем данным (78 опытов), использованным при построении

формулы (4.36), наихудшая нижняя оценка критических диаметров выходных отверстий инжектора отличается от результата вычислительного эксперимента не более чем на 10%.

На рис. 4.5 приведена составная номограмма для решения уравнения (4.36), образованная из пяти элементарных номограмм с введением четырех немых шкал вспомогательных переменных K_1 , K_2 , K_3 и K_4 . Ответ по этой номограмме находится после пяти наложений линейки. Ключ пользования и одновременно решение числового примера на номограмме показаны штриховой ломаной (дано: $i = 3$, $n = 6$, $l/d_r = 20$, $\eta = 15$ Па·с; $U_0 = 0,9$ м/с; ответ: $(d/d_r)^2 \cdot 10^2 = 6,3$). Эта номограмма и формула (4.36) позволяют быстро и просто выполнять инженерные расчеты.

Таблица 4.6

Величина $(d/d_r)^2 \cdot 10^2$, найденная по (4.36) (числитель) и при вычислительном эксперименте (знаменатель)

№ пп	l/d_r	U_0 , м/с	η , Па·с	n	Порядковый номер критического отверстия						
					1	2	3	4	5	8	11
1	20	0,8	5	11	<u>3,60</u>	<u>3,76</u>	<u>3,92</u>	<u>4,08</u>	<u>4,25</u>	<u>4,73</u>	<u>5,21</u>
					3,60	3,80	4,00	4,27	4,55	5,12	5,64
2	100	0,8	5	11	<u>1,33</u>	<u>1,39</u>	<u>1,45</u>	<u>1,51</u>	<u>1,57</u>	<u>1,74</u>	<u>1,92</u>
					1,35	1,40	1,48	1,52	1,60	1,78	1,96
3	25,7	0,5	8	8	<u>3,74</u>	<u>4,08</u>	<u>4,42</u>	<u>4,75</u>	<u>5,08</u>	<u>6,09</u>	
					3,84	4,32	4,84	5,32	5,80	7,10	
4	25,7	0,8	5	8	<u>3,77</u>	<u>4,11</u>	<u>4,45</u>	<u>4,78</u>	<u>5,12</u>	<u>6,13</u>	
					3,74	4,13	4,55	4,84	5,14	6,12	
5	119	0,5	8	8	<u>1,50</u>	<u>1,63</u>	<u>1,77</u>	<u>1,90</u>	<u>2,04</u>	<u>2,37</u>	
					1,60	1,74	1,88	2,06	2,26	2,70	
6	20	0,8	2	5	<u>6,47</u>	<u>7,58</u>	<u>8,69</u>	<u>9,80</u>	<u>10,9</u>		
					6,25	7,48	8,62	9,82	10,7		
7	240	0,8	2	5	<u>1,55</u>	<u>1,82</u>	<u>2,09</u>	<u>2,35</u>	<u>2,62</u>		
					1,60	1,96	2,32	2,89	3,00		
8	20	1,2	5	5	<u>4,81</u>	<u>5,64</u>	<u>6,46</u>	<u>7,29</u>	<u>8,10</u>		
					5,20	6,02	6,92	7,65	8,22		
9	100	0,8	5	3	<u>3,20</u>	<u>4,21</u>	<u>5,23</u>				
					3,24	4,54	6,46				

При проектировании перфорированных инжекторов для литья композиции на нижнюю обшивку следует помнить, что на входе в инжектор устанавливается скорость движения композиции U_{OK} , которая меньше начальной скорости U_0 , связанной с производительностью смесительной головки до заполнения инжектора композицией. Скорость U_{OK} определяет фактическую производительность заливочного устройства Q и нужно уметь ее оценивать. Для этого можно воспользоваться формулой (4.10) с учетом (4.9) и того, что напор у первого отверстия инжектора при установившемся движении композиции определяется из выражения (4.27).

В отдельных случаях может оказаться, что проектируемое отношение l/d_f превышает критическую величину, определяемую по (4.20), и расчет выполнить нельзя. Имеется много вариантов выхода из такой ситуации. Например, пойти на увеличение внутреннего диаметра инжектора d_f и напора в смесительной головке H_0 или установку нескольких инжекторов, подключенных к независимым смесительным головкам.

Пример расчета 4.2

Расчет технологических параметров литья композиции на обшивку панели с помощью качающегося портала проще, чем при использовании стационарного устройства с перфорированным инжектором. Поэтому рассмотрим пример расчета этих параметров для наиболее сложного случая.

Пусть с помощью перфорированного инжектора, подключенного к стационарной смесительной головке ($H_0 = 50$ м), требуется осуществить литье композиции на профилированную обшивку панели шириной $b_n = 0,75$ м с трапециевидными гофрами. Обшивка движется со скоростью $v = 4$ м/мин. Профиль имеет следующие геометрические параметры: период 188 мм, высота выступа (глубина впадины) 56 мм, ширина плоской части выступа (впадины) 94 мм.

Площадь поперечного сечения панели по пенопласту $\Omega = 0,1$ м² при его плотности $\rho_n = 80$ кг/м³. Композицию характеризуют следующие показатели: время индукционного периода вспенивания $\tau_{ин} = 60$ с; вязкость $\eta = 5$ Па·с; плотность $\rho = 1200$ кг/м³; коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 0,06$ Н/м; косинус краевого угла на поверхности обшивки $\cos\theta = 0,1$.

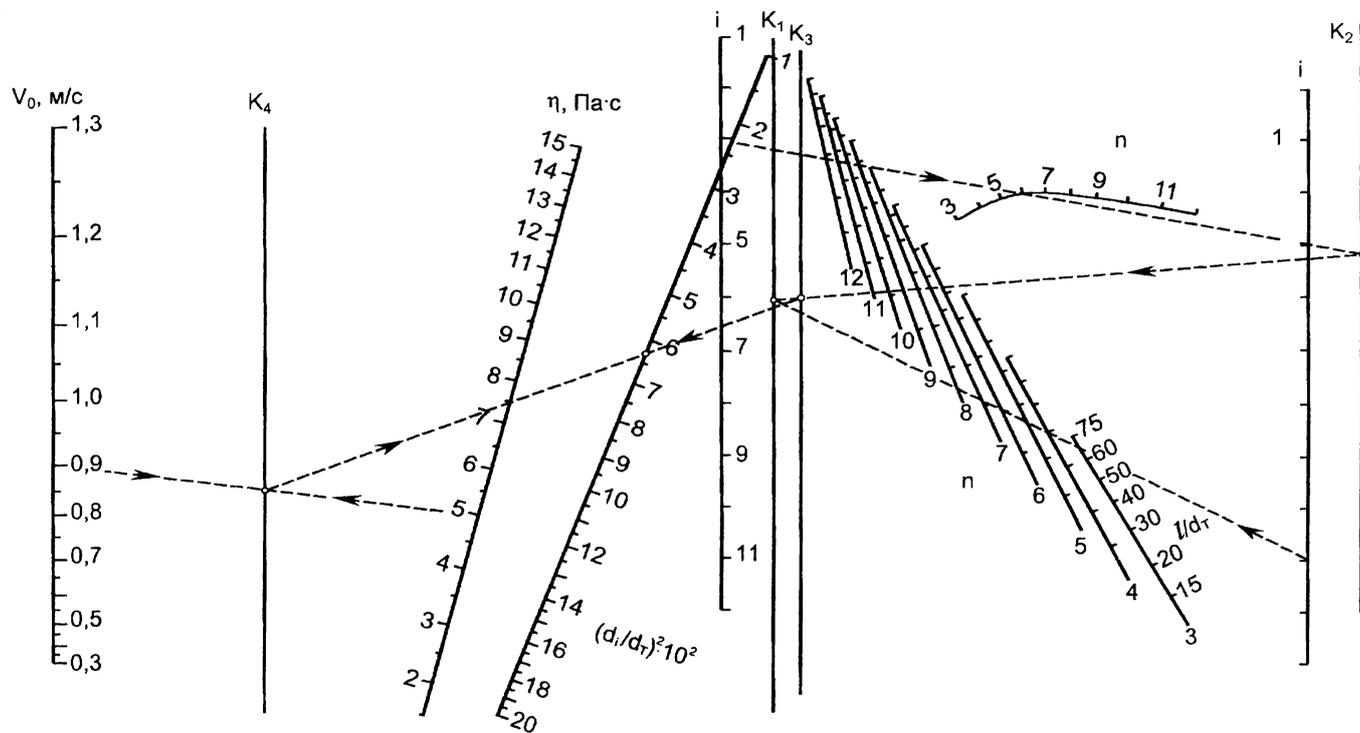


Рис.4.5. Номограмма для определения $(d_i/d_r)^2$, построенная по формуле (4.36)

Для литья композиции на четыре выступа и впадины обшивки назначаем $n = 8$ выходных отверстий инжектора и расставляем их в один ряд с шагом равным половине периода профиля $188/2 = 94$ мм. Следовательно, длина перфорированной части инжектора $l = 0,658$ м. На этой длине из каждого отверстия инжектора должен обеспечиваться одинаковый расход композиции, при котором на поверхности обшивки образуется полоса с погонной массой $\bar{m} = 1$ кг/м. По формуле (4.29) определяем требуемую производительность заливочного устройства $Q = 4 \cdot 0,1 \cdot 80/1200 = 0,267$ м³/мин. По (4.30) получаем расчетную толщину наносимого слоя композиции $h_p = 0,267/4 \cdot 0,75 = 8,89$ мм. По (4.35) находим минимальную толщину слоя композиции, которая могла бы сформироваться на поверхности выступа профиля при свободном растекании, $h = \sqrt{2 \cdot 0,06 \cdot (1 - 0,1)/1200 \cdot 9,81} = 3,03$ мм.

Поскольку $h < h_p$, то в пределах индукционного периода вспенивания композиция будет стекать с выступов во впадины профиля, покрывая всю поверхность обшивки и давая желательный периодический характер распределения композиции по ширине обшивки.

Вычисления по уравнению (4.23) показали, что образующаяся на горизонтальной поверхности обшивки панели полоса композиции, имеющая погонную массу $\bar{m} = 1$ кг/м, растечется на ширину 94 мм через 1с после истечения из выпускных отверстий инжектора. Следовательно, к этому моменту композиция покроеет поверхность нижней обшивки панели на всю ширину $b_n = 0,75$ м и будет стекать с выступов профиля в его впадины. Через $\tau_{ин} = 60$ с перед подъемом пены толщина слоя композиции на выступе профиля составит 4,3 мм, а во впадине – 13,4 мм. При таких исходных толщинах слоя жидкой композиции создаются благоприятные условия для роста пены.

Выбираем диаметр трубчатого инжектора $d_t = 30$ мм. Тогда получаем отношение $l/d_t = 21,93$. Определяем установившуюся скорость движения композиции на входе инжектора $v_{ок} = 4Q/\pi d_t^2 = 37,8$ м/мин или 0,63 м/с. Подбираем начальную скорость движения композиции v_0 , при которой $v_{ок} = 0,63$ м/с.

Пусть $v_0 = 0,7$ м/с. По (4.27) определяем напор, формирующийся при этой скорости у первого отверстия инжектора $H_1 = 4,66$ м. Затем с помощью (4.10) и (4.9) оцениваем $v_{ок} = 0,633$ м/с. Таким образом, принятая начальная

скорость v_0 , устанавливаемая по расходу композиции из смесительной головки до заполнения инжектора, должна обеспечивать требуемую установившуюся скорость $v_{ок}$. С изменением вязкости композиции нужно изменять скорость v_0 . Окончательно скорость v_0 устанавливается по результатам пробной заливки.

Из выражения (4.20) или рис. 4.3 определяем критическое отношение $(l/d_r)_{кр} = 130,77$, которое оказывается больше фактического $(l/d_r) = 21,93$. Это означает, что можно приступить к определению критических диаметров отверстий инжекторов по формуле (4.36) или номограмме, приведенной на рис. 4.5. При $n = 8$; $\eta = 5$ Па·с; $v_0 = 0,7$ м/с и $(l/d_r) = 21,93$ получаем соотношение

$$(d_i/d_r)^2 = (4,2277 + 0,3773 (i - 1)) \cdot 10^{-2},$$

из которого в результате последовательной подстановки i от 1 до 8 при $d_r = 30$ мм находим ряд критических диаметров отверстий инжектора: $d_1 = 6,17$; $d_2 = 6,44$; $d_3 = 6,7$; $d_4 = 6,95$; $d_5 = 7,19$; $d_6 = 7,42$; $d_7 = 7,64$; $d_8 = 7,86$ мм. Для повышения надежности расчета с точки зрения обеспечения устойчивости процесса заливки композиции значения этих максимально возможных диаметров рекомендуется уменьшить на $0,1 \dots 0,2$ мм (диаметры крайних отверстий на $0,2 \dots 0,3$ мм), округляя до десятых долей мм.

При решении рассмотренной задачи путем вычислительного эксперимента на диалоговой системе имитации для начальной скорости $v_0 = 0,7$ м/с получили установившуюся скорость движения композиции $v_{ок} = 0,632$ м/с, напор у первого отверстия инжектора $H_1 = 4,87$ м и следующий ряд критических диаметров отверстий: $d_1 = 6,17$; $d_2 = 6,5$; $d_3 = 6,75$; $d_4 = 7,15$; $d_5 = 7,45$; $d_6 = 7,7$; $d_7 = 7,9$; $d_8 = 8,0$ мм. Эти данные практически совпадают с приведенными результатами расчетов по инженерным (аппроксимирующим) формулам.

Таким образом, построенные инженерные формулы дают возможность легко определять требуемые параметры оборудования и устанавливать необходимые режимы процесса заливки вспенивающихся полимерных композиций, что позволяет обеспечить высокую точность при проектировании оборудования, а в практике промышленного производства слоистых изделий значительно повышает оперативность переналадки технологического процесса.

Рассмотренная методика расчета технологических параметров непрерывной заливки полимерных композиций позволила заложить основы оригинальной технологии формирования пенопластовой плиты внутри армокаркаса с целью получения термопакета для трехслойных стеновых панелей или дополнительной теплозащиты жилых зданий.

4.6. Оценка усадочных и температурных напряжений в пенопласте при производстве многослойных панелей

При производстве легких многослойных строительных конструкций с утеплителем из заливочных пенопластов важно иметь представление о значениях напряжений, возникающих в пенопласте вследствие его технологической усадки и перепада температур. Достаточно большая разница деформаций пенопласта и обшивок может привести к значительным внутренним напряжениям в пенопласте, который будет разрушаться. На стадии изготовления слоистых изделий нужно свести к разумному минимуму вероятность разрушения пенопласта и последующего расслоения конструкций.

Для слоистых панелей, особенно с гофрированными обшивками, поперечные усадочные и температурные напряжения, формирующиеся в пенопласте на технологической стадии, и теоретически, и экспериментально изучены еще недостаточно. Отсутствие необходимой информации ограничивает возможности выработки обоснованных технологических решений, направленных на улучшение качества изготавливаемых изделий. Поэтому был выполнен анализ поперечных усадочных и температурных напряжений в слоистых панелях с металлическими гофрированными обшивками, углы которых являются источниками концентрации напряжений в поперечном направлении.

Для достижения заданной цели проводили вычислительный эксперимент на ЭВМ по программе, реализующей метод конечных элементов и позволяющей решать широкий круг задач. В вычислительном эксперименте принято, что в плоскости поперечного сечения панели напряжения отсутствуют (плоская задача), материалы панели линейно упруги, между обшивками и пенопластом обеспечиваются надежные адгезионные связи. Как свидетельствуют результаты испытаний образцов, адгезионная прочность соединений может превышать прочность пенопластов /43/ и принятое допущение вполне приемлемо. При изучении влияния технологической усадки пенопласта ее монотонное нарастание во времени, сопровождающееся механической релаксацией, не учитывалось и в

расчеты закладывалась максимальная величина, достигаемая после завершения процесса отверждения материала. Это, естественно, приводило к получению верхних оценок напряжений в пенопласте.

Вначале выбиралась минимальная ширина панели, необходимая и достаточная для получения представления о напряженном состоянии пенопласта, возникающем в поперечном направлении от технологической усадки. Для этого в вычислительном эксперименте были сопоставлены двухслойные панели шириной равной длине одной и трех волн гофров (рис. 4.6).

Профилированная обшивка толщиной 1 мм имела прямоугольные гофры высотой 50 и шириной 125 мм, выполненные без сопряжения прямолинейных участков. Материал обшивок (сталь) наделался следующими физико-механическими свойствами: модуль упругости $E_{ст}=2,1 \cdot 10^5$ МПа, модуль сдвига $G_{ст}=8,1 \cdot 10^4$ МПа и коэффициент Пуассона $\mu=0,3$. Высота слоя пенопласта в тонкой части панели составляла 100мм. Площадь поперечного сечения панели, приходящаяся на одну волну гофров, была разбита на 214 конечных элементов прямоугольной формы (182 элемента принадлежали пенопласту, а 32 – обшивке), для каждого из которых рассчитывались усредненные значения показателей напряженно-деформированного состояния. Для слоев пенопласта, примыкающих к обшивке, использовались более мелкие элементы. Распечатки расчетов представлялись в табличной форме и давали достаточно полную информацию о напряженно-деформированном состоянии панелей в поперечных сечениях. По этим данным строились изолинии напряжений для пенопласта.

На рис. 4.6 показана часть результатов численного эксперимента в виде изолиний максимальных нормальных напряжений σ_1 для одной из панелей. Эти напряжения вычислены в предположении, что линейно упругий пенопласт имеет $E=10$ МПа, $G=4,8$ МПа, $\mu=0,4$ и в нем произошла усадка $\epsilon=1,5\%$. Следует отметить, что рассматриваемый профиль обшивки дает завышенные оценки напряжений в пенопласте у источников их концентрации по сравнению с обычно используемыми трапециевидными гофрами, у которых прямолинейные участки сопрягаются по плавным кривым. С точки зрения решаемой задачи главные напряжения σ_1 можно учитывать в качестве основных, так как даже при испытаниях на сдвиг в подавляющем большинстве случаев они являются причиной разрушения образцов пенопластов /18/.

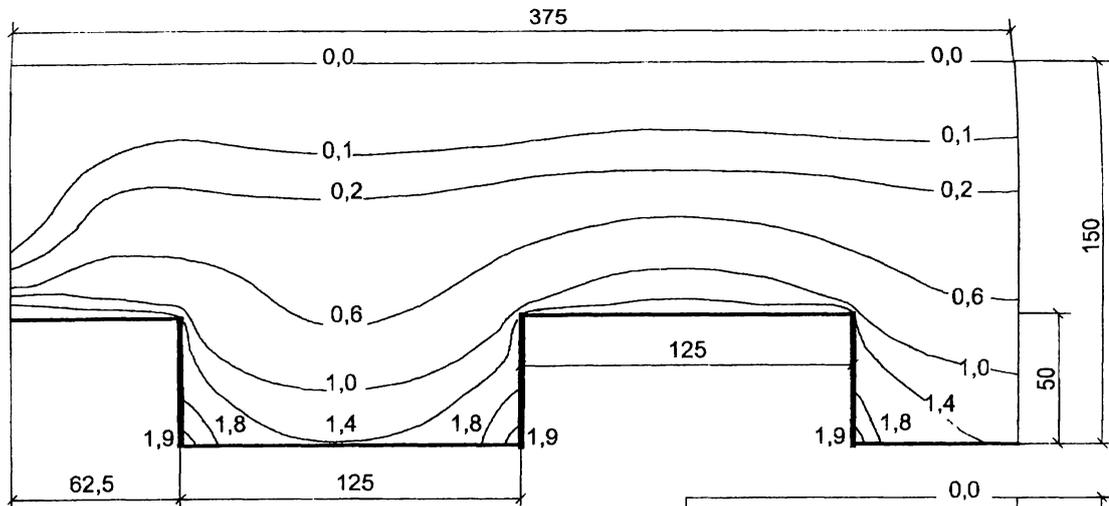
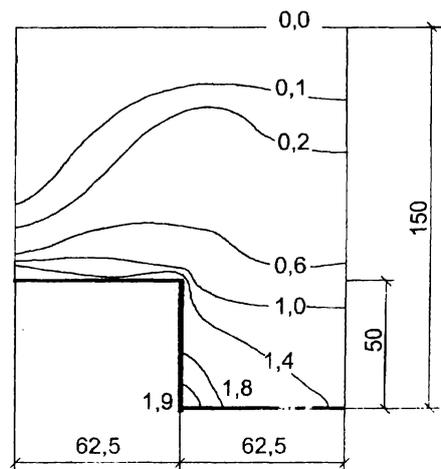


Рис.4.6. Изолинии максимальных нормальных напряжений σ_1 (Па. 10^5) в пенопласте при его усадке $\varepsilon = 1,5\%$ для двухслойных панелей различной ширины



Из рис. 4.6 видно, что углы обшивки являются источниками концентрации напряжений в пенопласте и значения напряжений в этих местах не зависят от числа гофров. Повторяющиеся участки профиля панелей имеют одинаковое напряженное состояние.

Аналогичные выводы получены при изучении температурных напряжений в слоистых панелях поляризационно-оптическим методом /2, 41/. Поэтому при последующем численном экспериментировании, в основном, рассматривались симметричные расчетные схемы панелей, имеющие ширину равную длине одной волны гофров. Отношение длин толстой и тонкой частей панели принималось постоянным и равным единице, так как его уменьшение или увеличение в реальном диапазоне практически не отражалось на величине напряжений у источников их концентрации /41/.

При изучении усадочных напряжений с помощью вычислительного эксперимента варьировали не только величину технологической усадки пенопласта ϵ , но и значения его упругих характеристик (E , G , μ), толщину обшивок δ и их число (одна или две), относительную высоту гофров и положение оси симметрии панели. Выяснилось, что варьирование коэффициента Пуассона μ для пенопласта в реальном диапазоне изменения оказывает пренебрежимо малое влияние на напряженно-деформированное состояние панелей. Это позволило в дальнейших расчетах зафиксировать его значение на уровне $\mu = 0,4$.

Изменение внутренних напряжений в любой точке пенопласта прямо пропорционально изменению его технологической усадки. Следовательно, характер картины изолиний напряжений не зависит от варьирования величины ϵ . Характер картины поля напряжений практически не меняется и при варьировании значениями модулей E и G . Увеличение или уменьшение величины E и G вызывает отклонения значений напряжений того же направления. Однако E влияет сильнее G .

Варьирование толщины металлических (сталь, алюминий) обшивок δ в реальном диапазоне не вносит заметного изменения в напряженно-деформированное состояние пенопласта, так как его погонная жесткость при растяжении (сжатии) более чем в сто раз меньше таковой для обшивок. На этом основании в последующем вычислительном эксперименте рассматривались только стальные обшивки толщиной 1 мм.

Введение верхней плоской обшивки при достаточном слое пенопласта (в реальных изделиях вполне достаточно) практически не приводит к росту

напряжений у источников их концентрации (углы обшивок), так как по мере удаления от этих источников напряжения быстро затухают. Для рассмотренных панелей (см. рис. 4.6) уменьшение высоты гофров в два раза не дает существенного снижения значений напряжений в слоях пенопласта, примыкающих к нижней гофрированной обшивке. Только замена гофрированных обшивок на плоские устраняет опасные источники концентрации напряжений и ведет к заметному уменьшению их значений (величина максимальных нормальных напряжений σ_1 снижается на четверть и более, а максимальных касательных напряжений τ_m почти в двое). Это свидетельствует о том, что картина напряженного состояния пенопласта при наличии гофрированных обшивок в продольном направлении более благоприятна, чем в поперечном. Если ось симметрии площади поперечного сечения оказывается в тонкой части панели, то в наших примерах ее боковые части оканчиваются уширением. В этом случае напряжения σ_1 у источника концентрации в боковой части панели заметно уменьшаются. На основе опытных данных авторы работы /41/ пришли к такому же выводу, предлагая для смягчения краевой концентрации напряжений изготавливать панели так, чтобы их боковые свободные части кончались уширением.

На основании анализа данных, полученных с помощью вычислительного эксперимента, для определения значений усадочных напряжений по главным площадкам в слоях пенопласта, примыкающих к углам обшивок, можно предложить аппроксимирующую формулу вида мультипликативной группы

$$\sigma_i = \sigma_i^0 k_\epsilon k_E k_G, \quad (4.37)$$

где σ_i^0 – значение базового напряжения в опасной точке, установленное по изолиниям соответствующих напряжений; k_ϵ , k_E , k_G – коэффициенты, учитывающие отклонения заданных значений усадки ϵ , модуля упругости E и модуля сдвига G рассматриваемого пенопласта от соответствующих значений для базового случая (ϵ^0 , E^0 , G^0).

В качестве базового случая приняты изолинии усадочных напряжений, возникающих в пенопласте трехслойной панели с верхней плоской обшивкой. Наличие такого случая позволяет находить оценки опасных напряжений в пенопласте слоистых панелей не только с гофрированными, но и с плоскими обшивками. На рис. 4.7, 4.8, 4.9 приведены изолинии главных напряжений σ_1^0 , σ_2^0 и максимальных касательных напряжений τ_m^0 для пенопласта, имеющего $E^0 = 10$ МПа, $G^0 = 4,8$ МПа, $\mu = 0,4$ и $\epsilon^0 = 1,5\%$.

Размеры панели совпадают с теми, которые указаны на рис. 4.6. При сравнении рис. 4.6 и 4.7 обнаруживается, что введение верхней плоской обшивки не приводит к существенному изменению значений напряжений σ_1 и характера изолиний у источников концентрации напряжений (углы нижней гофрированной обшивки).

В соответствии с формулой (4.37) и данными вычислительного эксперимента в реальной области факторного пространства у источников концентрации значения максимальных нормальных напряжений в пенопласте могут быть найдены из выражения

$$\sigma_1 = \sigma_1^0 (\varepsilon/\varepsilon^0) (E/E^0) \left[1,1 - 0,1(E/E^0) \right] \left[0,9 + 0,1(G/G^0) \right], \quad (4.38)$$

где σ_1^0 – значение базового напряжения для опасной точки, выбираемое по рис. 4.7.

Аналогичное выражение предлагается и для определения значений минимальных нормальных напряжений в пенопласте около углов гофрированной обшивки

$$\sigma_2 = \sigma_2^0 (\varepsilon/\varepsilon^0) (E/E^0) \left[1,1 - 0,1(E/E^0) \right] \left[0,9 + 0,1(G/G^0) \right], \quad (4.39)$$

где σ_2^0 – значение базового напряжения, принимаемое по рис. 4.8.

Для разномодульного пенопласта в формулу (4.38) и (4.39) значение модуля упругости E подставляются с учетом знака напряжения σ_i^0 ($i = 1, 2$). При положительном знаке σ_i^0 используется значение модуля упругости E при растяжении, а при отрицательном знаке σ_i^0 берется величина E при сжатии. Поиск верхней оценки значений максимальных касательных напряжений τ_m в опасной точке может быть выполнен двумя путями. Если имеются базовые изолинии для τ_m^0 (рис. 4.9), то

$$\tau_m = \tau_m^0 (\varepsilon/\varepsilon^0) (E/E^0) \left[1,2 - 0,2(E/E^0) \right] \left[0,8 + 0,2(G/G^0) \right], \quad (4.40)$$

где τ_m^0 – значение базового напряжения в опасной точке, устанавливаемое по рис. 4.9; значение E для разномодульного пенопласта находится как полусумма модулей упругости при сжатии $E_{сж}$ и растяжении E_p .

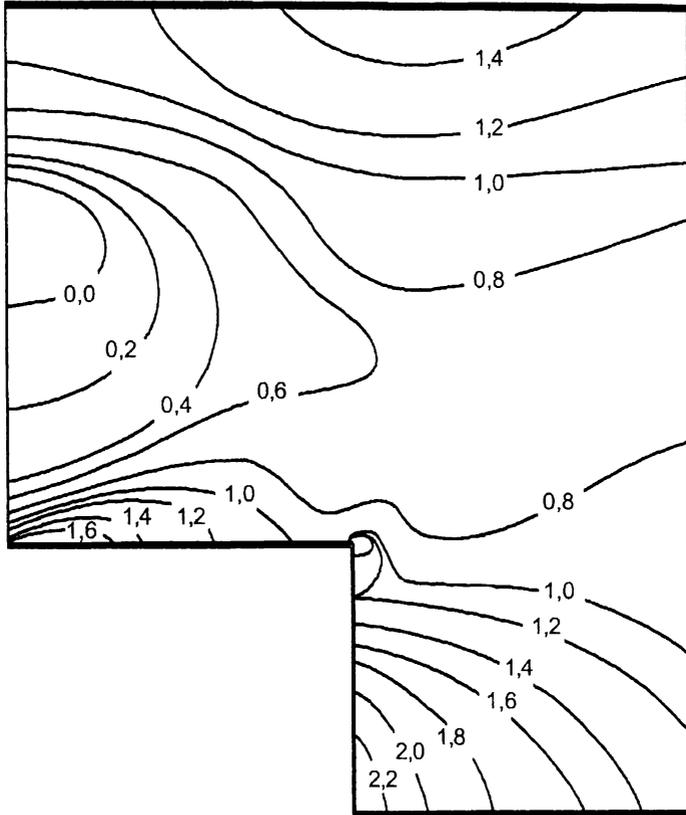


Рис.4.7. Изолинии максимальных нормальных напряжений σ_1^0 ($\text{Па} \cdot 10^5$) в пенопласте трехслойной панели при его усадке $\varepsilon^0 = 1,5\%$

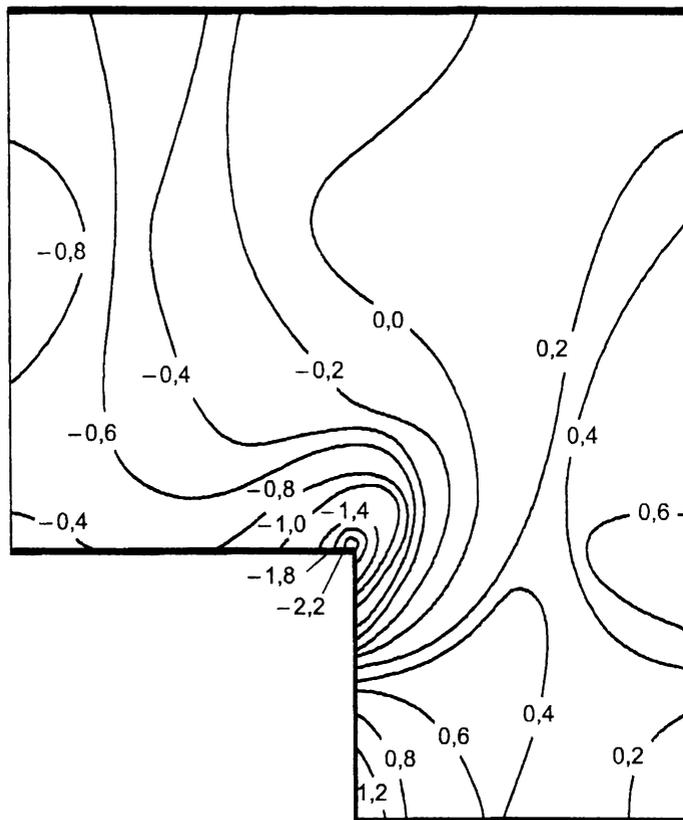


Рис.4.8. Изолинии минимальных нормальных напряжений σ_2^0 (Па·10⁵) в пенопласте трехслойной панели при его усадке $\epsilon^0 = 1,5\%$

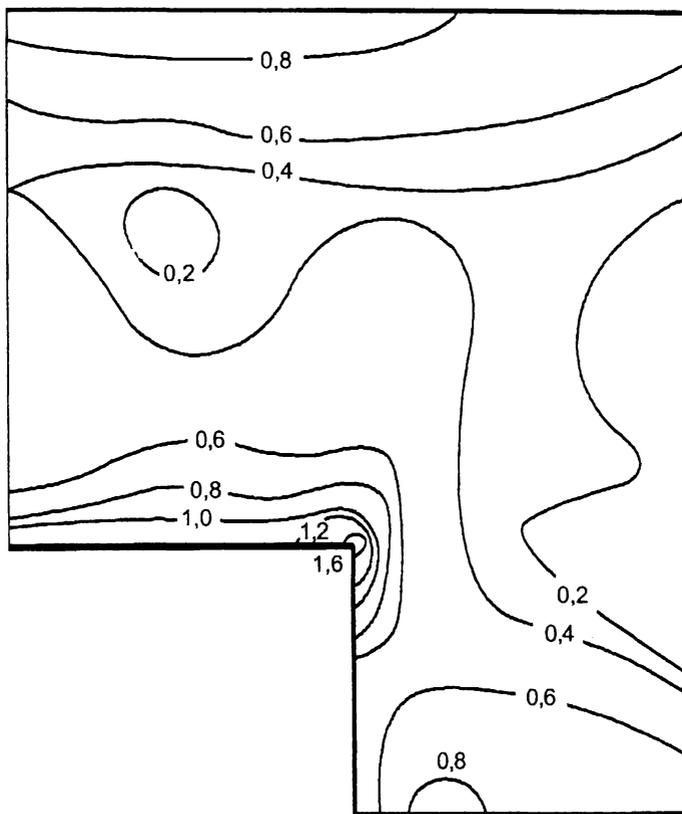


Рис.4.9. Изолинии максимальных касательных напряжений τ_m^0 (Па·10⁵) в пенопласте трехслойной панели при его усадке $\epsilon^0 = 1,5\%$

Можно обойтись и без изолиний для τ_m^0 , так как при плоском напряженном состоянии для любой точки

$$\tau_m = (\sigma_1 - \sigma_2)/2. \quad (4.41)$$

Исходя из (4.41), с помощью изолиний для σ_1^0 и σ_2^0 (см. рис.4.7 и 4.8) устанавливается положение опасной по τ_m точки и для нее по (4.38) и (4.39) определяют σ_1 и σ_2 , которые затем подставляются в (4.41).

Приведенные результаты вычислительного эксперимента пригодны и для оценки температурных напряжений, возникающих в пенопласте из-за различия коэффициентов линейного расширения материалов панели при ее охлаждении или нагревании. При охлаждении панели формулами (4.38), (4.39) и (4.40) следует пользоваться тогда, когда температурный коэффициент линейного расширения пенопласта превышает таковой материала обшивки. Если соотношение между этими коэффициентами противоположное, то формулы позволяют оценить последствия нагревания.

Одна из особенностей рассмотренного случая состоит в том, что пенопласт как бы обжимает обшивку панели. Возможен и другой случай, при котором обшивки панели обжимают пенопласт. Так, на технологической стадии при формировании слоя пенопласта за счет экзотермической теплоты температура обшивок панели может повыситься до 100°C и более. Если после этого панель оказывается на открытом воздухе, температура которого обычно не превышает комнатной, то тонкие металлические обшивки быстро охлаждаются (рис. 4.10) и обжимают твердеющий пенопласт.

По аналогии с усадочными напряжениями с помощью вычислительного эксперимента были изучены температурные напряжения в пенопласте слоистых панелей, связанные с усадкой металлических обшивок при их резком охлаждении. Предполагалось, что температурное поле в панели стационарно, а температура пенопласта на ΔT превышает температуру стальных обшивок, имеющих температурный коэффициент линейного расширения $\alpha_{ст} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^{\circ}\text{C}$.

Базовый случай представлялся в виде трехслойной панели с гофрированной нижней обшивкой трапецевидного профиля и плоской верхней обшивкой. Толщина стальных обшивок составляла 1 мм, а их температура принята на 100°C ниже температуры пенопласта с упругими характеристиками $E^0 = 4 \text{ МПа}$, $G^0 = 2 \text{ МПа}$ и $\mu = 0,4$. Изолинии максимальных

и минимальных нормальных напряжений, построенные для этого случая, показаны на рис. 4.11 и 4.12. В расчетной конечно-элементной схеме приведенная левая половина панели разбивалась на 12 конечных элементов. Элементы, граничащие с гофрированной обшивкой имели меньшие размеры, чем остальные элементы. Внутри каждого элемента, относящегося к пенопласту, определялись перемещения и напряжения в 25 точках.

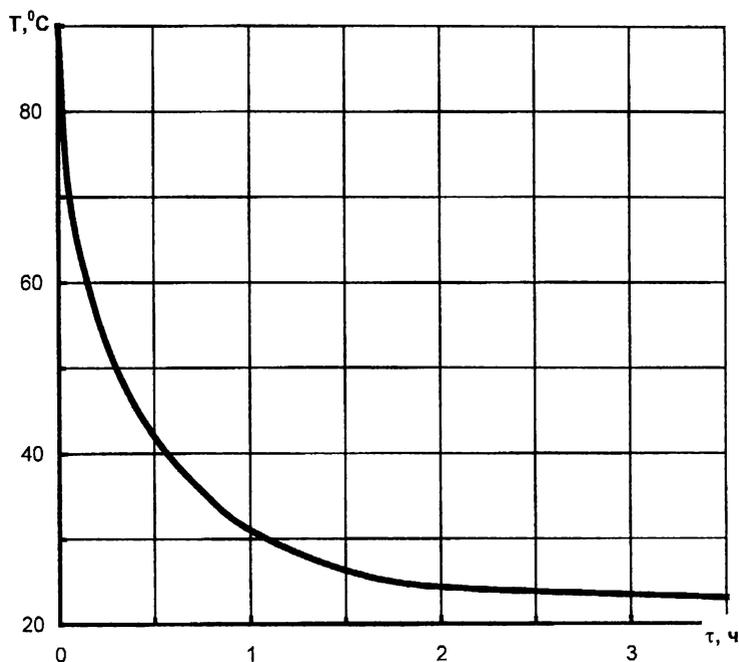


Рис. 4.10. Кинетика изменения температуры металлических обшивок трехслойной панели с пенопластом марки ФРП-1 при остывании после формования в условиях промышленного производства

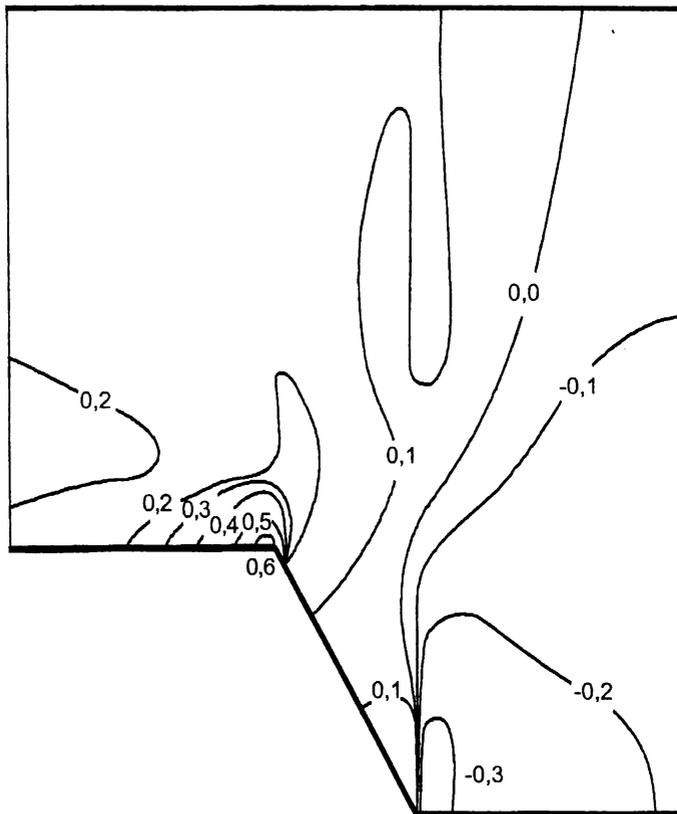


Рис.4.11. Изолинии максимальных нормальных напряжений σ_1^0 (Па·10⁵) в пенопласте трехслойной панели, имеющем температуру на 100⁰С выше температуры обшивок

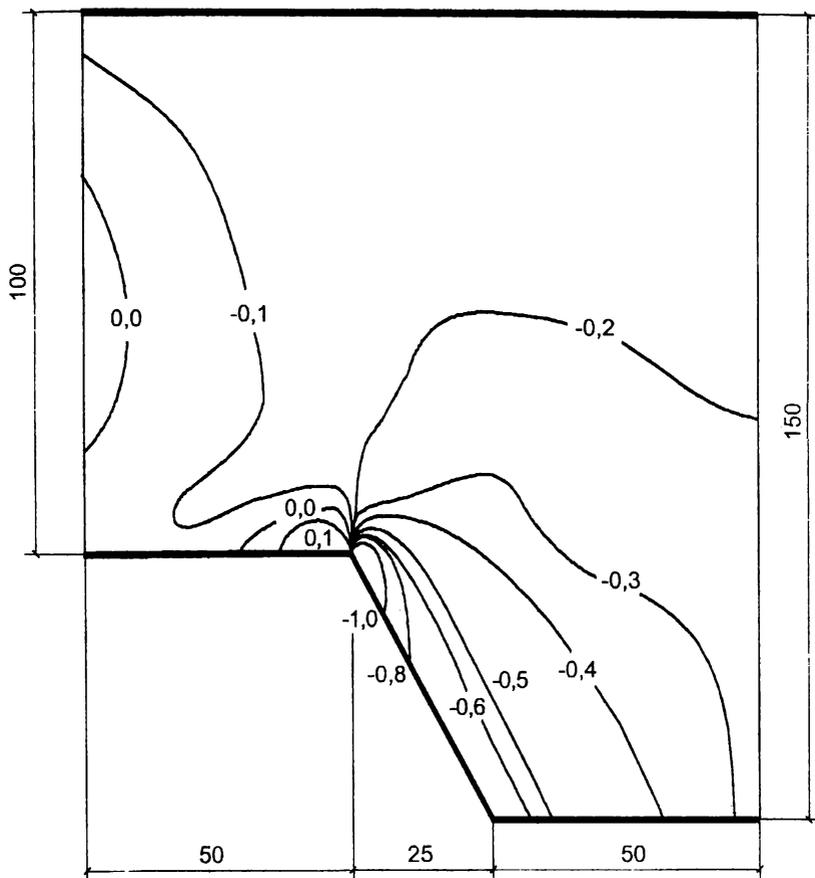


Рис.4.12. Изолинии минимальных нормальных напряжений σ_2^0 (Па·10⁵) в пенопласте трехслойной панели, имеющем температуру на 100⁰С выше температуры обшивок

Из рис. 4.11 и 4.12 следует, что источниками концентрации напряжений по-прежнему являются углы гофрированной обшивки. Замена прямых углов обшивки на тупые (117°) не привела к существенному снижению напряжений вблизи этих углов и не повлияла на общую картину изолиний. Уменьшений главных напряжений σ_1 не превышало 10%, а напряжений σ_2 – 15%. Отметим, что в образцах, имеющих сопряжения в углах по кривой с радиусом 3 мм, максимальные касательные напряжения τ_m в зоне концентрации на 29% ниже чем у образцов без закруглений в углах /41/. Увеличение радиуса закруглений даст еще большее уменьшение напряжений в опасных зонах. Имеются основания предположить, что при высоте гофров h , не превышающей суммы радиусов скруглений верхнего r_1 и нижнего r_2 углов обшивки ($h \leq r_1 + r_2$), значения местных напряжений будут приближаться к тем, которые отмечаются для плоских обшивок. Поэтому все приведенные в данной работе формулы следует использовать при соотношении $h > r_1 + r_2$. Снижение величины температурного перепада между обшивками и пенопластом ведет к прямо пропорциональному снижению напряжений в любой точке пенопласта. Характер влияния других варьируемых факторов не отличается от того, который установлен при изучении технологической усадки пенопласта. Поэтому для получения верхних оценок напряжений у источников концентрации можно воспользоваться выражением (4.37) и базовыми изолиниями температурных напряжений.

При усадке стальных обшивок относительно пенопласта максимальные σ_1 и минимальные σ_2 нормальные напряжения у источников концентрации можно определить по формуле (4.38) и (4.39) после замены коэффициента $k_\epsilon = \epsilon/\epsilon^0$ на коэффициент $k_\tau = \Delta T/\Delta T^0$, где ΔT и ΔT^0 – соответственно оцениваемый температурный перепад и базовый ($\Delta T^0 = 100^\circ\text{C}$). Базовые напряжения σ_1^0 и σ_2^0 у источников концентрации берутся на рис. 4.11 и 4.12. Максимальные касательные напряжения τ_m в опасной точке устанавливаются по формуле (4.41). Из рис. 4.11 и 4.12 видно, что опасная с точки зрения τ_m зона находится у верхнего угла гофрированной обшивки. Если вместо обшивки из стали используется обшивка из сплавов алюминия или других материалов, имеющих температурный коэффициент линейного расширения α , то коэффициент $k_\tau = (\alpha\Delta T)/(\alpha\Delta T^0)$.

Определив с помощью разработанных формул максимальные (минимальные) нормальные σ_1 (σ_2) и касательные τ_m напряжения в опасных точках и сравнив их с пределом прочности при растяжении σ_p (сжатии $\sigma_{сж}$) и сдвиге τ , не сложно оценить качество формируемого в слоистом изделии пенопласта и в случае необходимости внести изменения в технологический режим.

Рассмотрим особенности использования результатов вычислительного эксперимента для оценки усадочных и температурных напряжений в пенопласте слоистых панелей на примерах расчета.

Пример расчета 4.3

Необходимо оценить значения главных напряжений в опасных точках пенопласта панели со стальными гофрированными обшивками ($h > r_1 + r_2$) трапециевидного (или прямоугольного) профиля, возникающие от технологической усадки пенопласта $\varepsilon = 0,8\%$. Пенополиуретановый пенопласт марки ППУ-317 имеет плотность $\rho_n = 50 \text{ кг/м}^3$ и в соответствии с /43/ модуль упругости при растяжении $E_p = 10 \text{ МПа}$, при сжатии $E_{сж} = 8 \text{ МПа}$, модуль сдвига $G = 4,5 \text{ МПа}$, предел прочности при растяжении $\sigma_p = 5 \text{ Па} \cdot 10^5$, при сжатии $\sigma_{сж} = 3,4 \text{ Па} \cdot 10^5$ и сдвиге $\tau = 2 \text{ Па} \cdot 10^5$. Толщина обшивок $\delta = 0,8 \text{ мм}$.

Для определения максимальных нормальных напряжений σ_1 воспользуемся формулой (4.38) и рис. 4.7. Из рис. 4.7 видно, что опасная точка находится в зоне нижнего угла обшивки и значение базового напряжения равно $\sigma_1^0 = 2,2 \text{ Па} \cdot 10^5$ при $\varepsilon^0 = 1,5 \%$, $E^0 = 10 \text{ МПа}$, $G^0 = 4,8 \text{ МПа}$. По (4.34) находим

$$\sigma_1 = 2,2 (0,8/1,5) (10/10) [1,1 - 0,1(10/10)] [0,9 + 0,1(4,5/4,8)] = 1,17 \text{ Па} \cdot 10^5.$$

Здесь использовано $E = E_p$, так как напряжение σ_1^0 – растягивающее.

Минимальное нормальное напряжение σ_2 определяется с помощью формулы (4.39) и рис. 4.8. Для опасной точки имеем $\sigma_2^0 = -2,2 \text{ Па} \cdot 10^5$ (сжатие). С учетом того, что $E = E_{сж} = 8 \text{ МПа}$, вычисляем

$$\sigma_2 = -2,2 (0,8/1,5) (8/10) [1,1 - 0,1(8/10)] [0,8 + 0,1(4,5/4,8)] = -0,95 \text{ Па} \cdot 10^5.$$

Используя формулу (4.40) и рис. 4.9, определяем максимальные касательные напряжения τ_m в опасной точке, расположенной у верхнего угла обшивки.

Значение базового напряжения $\tau_m^0 = 1,6 \text{ Па} \cdot 10^5$. Поскольку пенопласт ППУ-317 разномодульный, то в формулу (4.40) нужно подставлять $E = (E_p + E_{сж})/2 = (10 + 8)/2 = 9 \text{ МПа}$. Тогда получим $\tau_m = 1,6(0,8/1,5)(9/10)[1,2 - 0,2(9/10)] [0,8 + 0,2(4,5/4,8)] = 0,77 \text{ Па} \cdot 10^5$.

Таким образом, полученная оценка σ_1 составляет лишь 0,23 от предела прочности при растяжении, $\sigma_2 - 0,28$ от предела прочности при сжатии, $\tau_m - 0,38$ от предела прочности при сдвиге. Поэтому при наличии надежных адгезионных связей обшивок с пенопластом последний не должен разрушиться из-за усадки на стадии изготовления панелей даже у источников концентрации напряжений тем более, что в реальных условиях местная концентрация напряжений будет еще ниже.

После выполнения аналогичного верхнего оценивания напряженного состояния пенопласта марки ФРП-1, имеющего $\rho_n = 60$ кг/м³, $E_p = 20$ МПа, $E_{сж} = 15$ МПа, $G = 6$ МПа, $\sigma_p = 1,8$ Па·10⁵, $\sigma_{сж} = 2,2$ Па·10⁵, $\tau = 0,8$ Па·10⁵ и $\epsilon = 1,5\%$ /43/, выявились другие соотношения. Расчетное напряжение σ_1 у источника концентрации превысило предел прочности при растяжении σ_p в 2,25 раза, напряжение σ_2 выше предела прочности при сжатии в 1,46 раза и величина τ_m в 3,12 раза больше предела прочности при сдвиге. В таком случае у углов профиля пенопласт может разрушиться и вызвать местное отслоение обшивок и для качественного изготовления панелей потребуются существенные изменения технологических параметров.

Пример расчета 4.4

Определить значения главных напряжений в опасных точках пенопласта панели с гофрированными обшивками толщиной 1 мм из алюминиевых сплавов при их резком охлаждении на 50⁰С после выхода панели из двухленточного конвейера. Пенопласт марки ППУ-317 к этому моменту имеет физико-механические характеристики, значения которых приведены в примере 4.3. Температурный коэффициент линейного расширения материала обшивок $\alpha = 24 \cdot 10^{-6}$ 1/⁰С.

С помощью формулы (4.38) и рис. 4.11 находим максимальное нормальное напряжение σ_1 в опасной точке. Из рис. 4.11 видно, что $\sigma_1^0 = 0,6$ Па·10⁵. Определяем коэффициент $k_\tau = (24 \cdot 10^{-6} \cdot 50) / (12 \cdot 10^{-6} \cdot 100) = 1$ и подставляем его в формулу (4.38) вместо коэффициента $k_\epsilon = \epsilon / \epsilon^0$. Тогда имеем

$$\sigma_1 = 0,6 \cdot 1 \cdot (10/4) [1,1 - 0,1(10/4)] [0,9 + 0,1(4,5/2)] = 1,43 \text{ Па} \cdot 10^5,$$

что составляет 0,20 от предела прочности при растяжении.

Из рис. 4.12 находим базовое значение минимального нормального напряжения в опасной точке $\sigma_2^0 = -1$ Па·10⁵. Затем по (4.39) вычисляем напряжение, вызванное перепадом температур,

$$\sigma_2 = -1 \cdot 1 \cdot (8/4) [1,1 - 0,1(8/4)] [0,9 + 0,1(4,5/2)] = -2,02 \text{ Па} \cdot 10^5.$$

Эта величина достигает 0,59 от предела прочности при сжатии.

При совместном рассмотрении рис. 4.11 и 4.12 опасная по максимальным касательным напряжениям τ_m точка расположена в зоне верхнего угла обшивки. Эта зона опасна и по нормальным напряжениям σ_1 и σ_2 . Поэтому τ_m вычисляется сразу же по формуле (4.41) $\tau_m = (1,43 + 2,02)/2 = 1,73 \text{ Па} \cdot 10^5$. И эта оценка не превышает предела прочности при сдвиге.

Выполненный расчет показывает, что для приведенного случая резкое охлаждение обшивок панели на 50°C не должно привести к разрушению пенопласта.

Таким образом, при наличии данных о физико-механических характеристиках материалов с помощью предложенной методики имеется возможность оценить усадочные и температурные напряжения в пенопласте при производстве многослойных панелей и выработать решения по обеспечению качества изделий на стадии их изготовления и при проектировании технологического оборудования.

* * *

Выполненное описание процессов и явлений, составляющих процесс формирования заливочных пенопластов внутри утепляемых конструкций, создает теоретическую основу для совершенствования заливочной технологии производства слоистых изделий и конструкций, позволяет расчетным путем выбрать технологический регламент, сокращающий число производственных отказов изделий и повышающий уровень показателей их исходной надежности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой небольшой книге автору в первую очередь хотелось обратить внимание читателя на ту важную роль, которую в состоянии играть математическое моделирование при решении строительно-технологических задач. Личный опыт использования математического моделирования и вычислительного эксперимента при решении указанных задач позволяет отметить высокую эффективность такого подхода.

Одна из привлекательных сторон математического моделирования заключается в том, что оно при наличии хорошей математической модели дает уникальную возможность исключительно быстро и достаточно экономно с помощью ЭВМ изучить моделируемую техническую (технологическую) систему и значительно расширить кругозор инженера.

Если исследователем построена хорошая математическая модель, которая обычно в скрытом виде содержит очень много информации об оригинале, то математическое моделирование часто приводит к неожиданным, нетривиальным выводам. Наиболее ярко это проявилось при решении довольно сложной задачи моделирования технологии изготовления слоистых конструкций с утеплителем из заливочных пенопластов, рассмотренной в четвертой главе книги. Некоторые выводы, полученные в результате вычислительного эксперимента на моделях-имитаторах, существенно изменили наши представления об изучаемом технологическом процессе.

Следует напомнить, что построить хорошую математическую модель можно только тогда, когда все этапы моделирования, подробно рассмотренные в первой главе, выполнены на достаточно высоком методологическом уровне. Это очень трудная задача. При ее решении от инженера прежде всего потребуются хорошая профессиональная и математическая подготовка. Но и этого мало. Необходимо даже в очень размытых ситуациях уметь записать физическую и техническую сущность

решаемой задачи в компактной форме на языке математики. Такая деятельность в значительной степени носит эвристический характер. Может быть поэтому в работе /28/ отмечается, что моделирование скорее искусство, чем наука. При этом искусство моделирования во многом определяется тем чувством меры, которое помогает уравновешивать имеющиеся знания с тем, что хочется узнать.

С помощью только данной книги вряд ли можно достичь заметных высот в искусстве моделирования сложных технических систем. Что-то в ней не смогло удовлетворить читателя в полной мере. Поэтому в дальнейшем Вам придется самостоятельно изучать другие книги и научные статьи, которых на эту тему написано очень много. Часть из них указана в списке литературы.

Вы должны осознать, что в современных условиях инженеру очень важно овладевать навыками моделирования для повышения эффективности своей работы. В связи с этим считаю своим долгом выразить благодарность Ю.П. Адлеру и Е.В. Марковой, которые первые своими книгами, лекциями и консультациями помогли мне увидеть перспективы этого подхода и добиться скромных успехов при решении ряда задач.

Искренне желаю и Вам успехов на этом пути.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Критическое значение G-критерия при уровне значимости $\alpha = 0,05 / 20/$

Число опытов N	Число степеней свободы ν_1						
	1	2	3	4	5	6	7
2	0,999	0,975	0,939	0,906	0,858	0,853	0,833
3	967	871	798	746	707	677	653
4	907	768	684	629	590	560	537
5	0,841	0,684	0,598	0,544	0,506	0,478	0,456
6	781	616	532	480	445	418	398
7	727	561	480	431	391	373	356
8	0,680	0,516	0,438	0,391	0,360	0,336	0,319
9	640	478	403	358	329	307	290
10	602	445	373	331	303	282	267
12	0,541	0,392	0,326	0,288	0,262	0,244	0,230
15	471	335	276	242	220	203	191
20	389	271	221	192	174	160	150

Приложение 2

Значения F-критерия Фишера при уровне значимости $\alpha = 0,05 / 20/$

Число степеней свободы ν_2	Число степеней свободы в числителе ν_1							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	161	200	216	225	230	234	237	239
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45

Критические значения t-критерия /3/

Число степеней свободы ν_2	Уровни значимости α			Число степеней свободы ν_2	Уровни значимости α		
	0,1	0,05	0,01		0,1	0,05	0,01
1	6,31	12,70	63,66	11	1,80	2,20	3,11
2	2,92	4,30	9,93	12	1,78	2,18	3,06
3	2,35	3,18	5,84	13	1,77	2,16	3,01
4	2,13	2,78	4,60	14	1,76	2,15	3,98
5	2,02	2,57	4,03	15	1,75	2,13	2,95
6	1,94	2,45	3,71	16	1,75	2,12	2,92
7	1,90	2,37	3,50	17	1,74	2,11	2,90
8	1,86	2,31	3,36	18	1,73	2,10	2,88
9	1,83	2,26	3,25	19	1,73	2,09	2,86
10	1,81	2,23	3,17	20	1,73	2,08	2,85

Значимые ранги множественного рангового критерия Дункана

при $\alpha = 0,05$ /3/

Число степеней свободы $\nu_{ост}$	p								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0
2	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09
3	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50
4	3,98	4,01	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02
5	3,64	3,74	3,79	3,83	3,83	3,83	3,83	3,83	3,83
6	3,46	3,58	3,64	3,68	3,68	3,68	3,68	3,68	3,68
7	3,35	3,47	3,54	3,58	3,60	3,61	3,61	3,61	3,61
8	3,26	3,39	3,47	3,52	3,55	3,56	3,56	3,56	3,56
9	3,20	3,34	3,41	3,50	3,52	3,52	3,52	3,52	3,52
10	3,15	3,30	3,37	3,43	3,46	3,47	3,47	3,47	3,47
11	3,11	3,27	3,35	3,39	3,43	3,44	3,45	3,46	3,46
12	3,08	3,23	3,33	3,36	3,40	3,42	3,44	3,44	3,46
15	3,01	3,16	3,25	3,31	3,36	3,38	3,40	3,42	3,43
20	2,95	3,10	3,18	3,25	3,30	3,34	3,36	3,38	3,40

ЛИТЕРАТУРА

1. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, 1976. – 279 с.
2. Албаут Г.Н., Барышников В.Н., Кон Ен Хва. Исследование напряжений в трехслойной стеновой панели при различных температурных перепадах по ее толщине // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1979. – №7. – С.118–123.
3. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1985. – 327 с.
4. Баженов Ю.М. Технология бетона. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1987. – 414 с.
5. Беккер Г.П., Переверзев Л.Б., Сценарное моделирование как метод // Техническая эстетика. – 1988. – №7. – с.3-7.
6. Берлин А.А., Шутов Ф.А. Пенополимеры на основе реакционноспособных олигомеров. – М.: Химия, 1978. – 296 с.
7. Берлин А.А., Шутов Ф.А. Химия и технология газонаполненных высокополимеров. – М.: Наука, 1980. – 504 с.
8. Веников В.А. Теория подобия и моделирования. – М.: Высшая школа, 1976. – 479 с.
9. Вознесенский В.А. Статистические методы планирования эксперимента в технико-экономических исследованиях. – 2-е изд. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 263 с.
10. Вознесенский В.А., Ковальчук А.Ф. Принятие решений по статистическим моделям. – М.: Статистика, 1978. – 192 с.
11. Дементьев А.Г., Тараканов О.Г. Структура и свойства пенопластов. – М.: Химия, 1983. – 176 с.
12. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы планирования эксперимента: Пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – 520 с.

13. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ: В 2-х кн. Кн.2. / Пер. с англ. – 2-е изд. – М.: Финансы и статистика, 1987. – 351 с.
14. Дэниел К. Применение статистики в промышленном эксперименте: Пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 304 с.
15. Закгейм А.Ю. Введение в моделирование химико-технологических процессов. – М.: Химия, 1982. – 288 с.
16. Имитационное моделирование производственных систем / Под ред. А.А.Вавилова. – М.: Машиностроение; Берлин: Техника, 1983. – 416 с.
17. Исаханов Г. В. Основы научных исследований в строительстве. – Киев: Вища школа, 1985. – 208 с.
18. Козлов К.В. Оценка прочности пенопласта при сдвиге. Расчет конструкций с применением пластмасс. // Тр. ин-та / ЦНИИСК им. Кучеренко. – 1974. – С.36–39.
19. Комлев А.Ф., Геллер З.И., Скобельцин Ю.А. Коэффициенты расхода длинных цилиндрических насадков при малых числах Рейнольдса // Изв. вузов. Нефть и газ. – 1967. – №5. – С.73–77.
20. Красовский Г.И., Филаретов Г.Ф. Планирование эксперимента. – Мн.: Изд-во БГУ, 1982. – 302 с.
21. Кузнецов Е.В. О коэффициенте сопротивления на участке трубопровода в месте отделения потока // Изв.вузов. Строительство и архитектура. – 1990. – №12. – С.108–111.
22. Маркова Е.В., Ежова Л.Н. Прямоугольники Юдена и связанные с ними планы / Научн. совет по комплексной пробл. «Кибернетика» АН СССР. – М., 1979. – 70 с.
23. Маркова Е.В., Ежова Л.Н. Унификация процедуры дисперсионного анализа для планов со многими неортогональными классификациями / Научн. совет по комплексной пробл. «Кибернетика» АН СССР. – М., 1981. – 76 с.
24. Моделирование в теоретической химии / Под ред. Б.М.Кедрова. – М.: Наука, 1975. – 176 с.
25. Моисеев Н.Н. Математические методы системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488 с.

26. Надежность и эффективность в технике: Справочник: В 10 т. / Ред. совет: В.С.Авдуевский (пред.) и др. – М.: Машиностроение, 1986. Т.1: Методология. Организация. Терминология / Под ред. А.И.Рембезы. – 224 с.
27. Надежность и эффективность в технике : Справочник: В 10 т. / Ред. совет: В.С.Авдуевский (пред.) и др. – М.: Машиностроение, 1986. Т.3: Эффективность технических систем / Под. ред. В. Ф. Уткина, Ю. В. Крючкова. – 328 с.
28. Налимов В.В., Голикова Т.И. Логические основания планирования эксперимента. – 2-е изд. – М.: Металлургия, 1981. – 152 с.
29. Никитин В.И. Повышение однородности пенопласта в слоистой панели // Современные строительные конструкции. Проблемы и перспективы: Сб.тр. – Брест: БрПИ, 1995. – С.33–37.
30. Основы теории подобия и моделирования. Терминология // Сб. рекомендуемых терминов Комитета научно-техн. терминологии АН СССР. – М., 1973. – вып. 88. – 23 с.
31. Рохваргер А.Е., Шевяков А.Ю. Математическое планирование научно-технических исследований (статистический подход). – М.: Наука, 1975. – 440 с.
32. Рыбьев И.А. Строительные материалы на основе вяжущих веществ (искусственные строительные конгломераты). – М.: Высшая школа, 1978. – 309 с.
33. Самарский А.А. Вычислительный эксперимент в задачах технологии // Вестник АН СССР. – 1984. – №3. – С.77–88.
34. Самарский А.А. Проблемы использования вычислительной техники и развития информатики // Вестник АН СССР. – 1985. – №3. – С.57–69.
35. Советов Б.Я., Яковлев С.Л. Моделирование систем. – М.: Высшая школа, 1985. – 271 с.
36. Современные методы оптимизации композиционных материалов / В.А.Вознесенский, В.Н.Выровой, В.Я.Керш и др.: Под ред. В.А.Вознесенского. – Киев: Будівельник, 1983. – 144 с.

37. Способ ускоренных испытаний долговечности отделочных покрытий зданий / Г.С.Писаренко, В.А.Гусев, М.Ю.Лещинский, Ю.А.Кузема // Строительные материалы. – 1980. – №6. – С.16–17.
38. Таблицы планов эксперимента для факторных и полиномиальных моделей: Справочник / В.З.Бродский, Л.И.Бродский, Т.И.Голикова и др.: Под ред. В.В.Налимова. – М.: Металлургия, 1982. – 752 с.
39. Хованский Г.С. Основы номографии. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
40. Хованский Г.С. Номография и ее возможности. – М.: Наука, 1977. – 128 с.
41. Чаплинский И.А., Албаут Г.Н., Кон Ен Хва. Температурные напряжения в слоистых панелях с гофрированными обшивками трапециевидного профиля // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1979. – №6. – С.39–45.
42. Численные методы решения строительно-технологических задач на ЭВМ: Учебник / В. А. Вознесенский, Т. В. Лященко, Б. Л. Огарков; Под. ред. В. А. Вознесенского. – Киев: Выща школа, 1989. – 328 с.
43. Чистяков А.М. Легкие многослойные ограждающие конструкции. – М.: Стройиздат, 1987. – 240 с.
44. Чугаев Р.Р. Гидравлика. – Л.: Энергоиздат, 1982. – 672 с.
45. Электронные вычислительные машины: В 8-ми кн.: Учеб. пособие для вузов / Под ред. А.Я.Савельева. Кн. 8. Решение прикладных задач / А.Г.Дьячко, Н.М.Когдов. – М.: Высшая школа, 1987. – 144 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ КАК СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ	6
1.1. Моделирование как метод экспериментального и теоретического исследования систем.....	6
1.2. Схема и принципы моделирования.....	17
1.3. Практика моделирования в технологии строительных материалов, изделий и конструкций.....	26
Глава 2. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА	33
2.1. Выбор вида модели.....	33
2.2. Метод наименьших квадратов, элементы планирования и статистического анализа эксперимента.....	37
2.3. Примеры построения регрессионных моделей.....	47
Глава 3. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА	59
3.1. Вводные замечания. Типы моделей.....	59
3.2. Латинские квадраты. Основные понятия. Планы эксперимента.....	60
3.3. Математические модели и статистический анализ латинских квадратов.....	64
3.4. Пример построения параметрической модели с использованием плана типа латинского квадрата второго порядка.....	69
3.5. Прямоугольники Юдена и планы эксперимента.....	78
3.6. Пример построения модели с использованием плана, производного от прямоугольников Юдена.....	85
3.6.1. Постановка задачи, модель и план.....	86
3.6.2. Дисперсионный анализ результатов эксперимента.....	89
3.6.3. Сравнение уровней факторов и модели прогноза.....	94

Глава 4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И	
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПРИ РАЗРАБОТКЕ	
ТЕХНОЛОГИИ (НА ПРИМЕРЕ ТЕХНОЛОГИИ	
ИЗГОТОВЛЕНИЯ СЛОИСТЫХ КОНСТРУКЦИЙ С	
УТЕПЛИТЕЛЕМ ИЗ ЗАЛИВОЧНЫХ ПЕНОПЛАСТОВ).....	98
4.1. Описание проблемы и постановка задачи, предварительный	
физический эксперимент.....	98
4.2. Математическое описание процесса движения	
вспенивающихся полимеров в перфорированном	
инъекторе.....	105
4.3. Вычислительный эксперимент и критические	
геометрические параметры перфорированных	
инъекторов.....	113
4.4. Инженерный расчет технологических параметров заливки	
полимерных композиций в полость панели по стендовому	
способу.....	122
4.5. Расчет технологических параметров непрерывной заливки	
полимерных композиций при производстве многослойных	
панелей.....	131
4.5.1. Литье композиции в полость панели с помощью	
осциллирующей головки.....	132
4.5.2. Процесс литья композиции на нижнюю обшивку	
панели с помощью перфорированного инжектора.....	134
4.6. Оценка усадочных и температурных напряжений в	
пенопласте при производстве многослойных панелей.....	141
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	158
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	160
ЛИТЕРАТУРА.....	162

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Никитин Вадим Иванович

**Моделирование
и вычислительный эксперимент
в строительно-технологических
задачах**

Учебное пособие

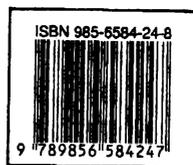
Редактор Строкач Т.В.

Технический редактор Никитчик А.Д.

Художник Никитин К.В.

Компьютерный набор: Никитин К.В., Жукович И.Н.

Компьютерная верстка: Никитин К.В., Жукович И.Н., Афонин А.В.



Подписано в печать 25.05.2001. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная №1.
Печать офсетная. Гарнитура Times. Усл. печ. л. 9,8. Уч.-изд. л. 10,5. Тираж 200 экз.
Заказ № 317

Издательство Брестского государственного технического университета.
Лицензия ЛВ № 382 от 01.09.2000. 224017, Брест, Московская, 267.

Отпечатано на ризографе Брестского государственного технического университета.
Лицензия ЛП № 178 от 01.09.2000. 224017, Брест, Московская, 267.