Л.И. Коршун, В.И. Игнатюк, А.С. Хамутовский

Основы устойчивости стержневых систем

Допущено
Министерством образования и науки Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для студентов строительных специальностей
высших учебных заведений

Брест 1995

УДК 624.04 (075.8)

Коршун Л.И., Игнатюк В.И., Хамутовский А.С. Основы устойчивости стержневых систем: Учеб. пособие / Брест. политехн. ин-т. - Брест, 1994. - 64 с., 40 ил., 5 табл.

Рассматривается расчет стержневых систем - прямых стержней различного вида, рам и арок - на устойчивость. Излагается суть явления потери устойчивости, основные понятия теории устойчивости и методы расчета. Рассматриваются различные подходы к решению уравнений устойчивости, включая с применением ЭВМ. Приведены примеры расчетов.

Учебное пособие предназначено для студентов строительных специальностей; может быть полезно также аспирантам и инженерам-проектировщикам.

Рецензенты: кафедра строительной механики Белорусской политехнической академии;

директор научно-технического центра Госстроя Республики Беларусь в г. Бресте канд. техн. наук Найчук А.Я.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие посвящено одному из важных и сложных разделов строительной механики - расчету сооружений на устойчивость, состоит из трех глав и включает материал, в рамках представленного объема пособия, соответствующий программе по строительной механике для студентов строительных специальностей.

В первой главе изложены суть явления потери устойчивости, исторические аспекты его исследования, основные понятия и методы расчета теории устойчивости.

Во второй главе рассматриваются методы расчета на устойчивость прямых сжатых стержней с различными условиями закрепления их концов, обсуждаются особенности расчета систем с одной, с несколькими и с бесконечным числом степеней свободы.

Третья глава посвящена основам расчета на устойчивость рам и арок. Достаточно подробно изложен для расчета на устойчивость рам метод перемещений, приведены примеры расчетов. Выполнен анализ решения уравнений устойчивости различными способами, включая с применением ЭВМ по программе, разработанной В.И.Игнатюком. Приведена подробная таблица фунций, используемых в уравнениях устойчивости метода перемещений.

При написании учебного пособия авторы использовали накопленный опыт преподавания раздела по устойчивости стержневых систем в Брестском политехническом институте.

Разделы учебного пособия подготовлены: глава I, § 2.I-2.3, 2.4.I, 2.4.4 главы 2 и § 3.3 главы 3 написаны В.И.Игнатюком; § 2.4.2, 2.4.3 А.С.Хамутовским и глава 3 (§ 3.I, 3.2, 3.4-3.6) - Л.И.Коршуном.

Авторы выражают благодарность рецензентам учебного пособия - кафедре строительной механики Белорусской политехнической академии и директору научно-технического центра Госстроя Республики Беларусь в г. Бресте, канд. техн. наук Найчуку А.Я.

Замечания и пожелания просим направлять по адресу: 224017, г. Брест, ул. Московская, 267, Брестский политехнический институт, кафедра строительной механики.

ГЛАВА I. ОСНОВЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ. ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

I.I. Вводные замечания

Ранее в курсе строительной механики рассмотрены методы решения двух задач:

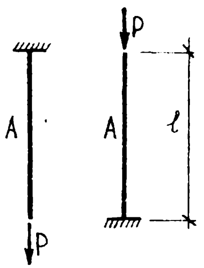
I) определение внутренних усилий в сооружениях от действия внешних силовых нагрузок, а также изменения температур, осадки опор и т.п.;

2) определение перемещений в этих же системах от действия тех же нагрузок и остальных факторов.

Как известно, результаты решения первой задачи используются в расчетах на прочность, а второй – в расчетах на жесткость.

Однако действующими нормами предусмотрено выполнение и ряда других расчетов сооружений, в том числе расчета сооружений либо их элементов на устойчивость. Чем объясняется необходимость такого расчета?

Рассмотрим два стержня, выполненных из одного материала, имеющих одинаковые длину ℓ и поперечное сечение A и загруженных одинаковыми по величине силами P, но одна из которых растягивающая, а вторая – сжимающая. С точки зрения расчета на прочность оба стержня совершенно одинаковы, условие прочности для них имеет вид



$$\sigma = \frac{P}{A} \leqslant R \quad \text{или} \quad P_{пр} \leqslant A \cdot R .$$

Отсюда следует, что несущая способность обоих стержней должна бы быть одинаковой. Но оказывается, что это не так. Сжатый стержень при определенных соотношениях размеров может разрушиться при нагрузке, меньшей AR (при напряжениях меньших R). Причиной этого является потеря устойчивости сжатого стержня, когда при некоторых значениях сжимающей нагрузки первоначально прямолинейный стержень внезапно искривляется. В результате к напряжениям сжатия добавляются напряжения изгиба, что приводит к разрушению стержня за счет исчерпания прочности материала.

Результаты экспериментальных испытаний сжатых стоек, в которых было обнаружено явление выпучивания (продольного изгиба), впервые опубликовал в 1729 г. П.Мусшенбрук. Теоретически задачу об устойчивости впервые решил в 1744 г. Л.Эйлер, который показал, что прямой центрально сжатый стержень при определенных значениях сжимающих сил наряду с прямолинейной может иметь и криволинейную – выпученную –

форму равновесия. Наименьшие сжимающие силы, при которых возможно указанное выпучивание системы, назвали критическими, а само явление — потерей устойчивости. С того времени теория устойчивости получила глубокое и всестороннее развитие для различных систем, начиная со стержневых и кончая пространственными континуальными системами.

Большой вклад в развитие теории устойчивости, начиная с Л.Эйлера, внесли Ж.Л.Лагранж, А.М.Ляпунов, И.Г.Бубнов, А.Н.Крылов, Б.Г.Галеркин, Ф.С.Ясинский, С.П.Тимошенко, И.М.Рабинович, И.И.Безухов, И.И.Гольденблат, Г.Ю.Джанелидзе, М.А.Лаврентьев, А.Ю.Ишлинский, А.А.Ильюшин, В.З.Власов, В.В.Новожилов, А.С.Вольмир, А.Р.Ржаницын, В.В.Болотин, Н.М.Беляев, А.Ф.Смирнов, Ю.Н.Работнов, В.Д.Клюшников и многие другие ученые и исследователи.

С понятием устойчивости мы сталкиваемся повсеместно — во всех сжатых элементах (стержнях) ферменных конструкций, в том числе в мостовых фермах, в сжатых стойках и стержнях рамных систем, в сжатых континуальных(пластинчатых и оболочечных) системах.

История знает много примеров крупных катастроф инженерных сооружений, когда устойчивость их элементов не проверялась расчетом, за что практика жестко наказывала создателей таких сооружений.

Таким образом, исследование напряженного состояния элементов конструкций, в которых один или два размера малы по сравнению с другими, исходя только из условий прочности часто явно недостаточно; в этих случаях необходим дополнительный анализ устойчивости этих элементов, конструкций и сооружений.

В курсе строительной механики мы рассматриваем наиболее простые задачи расчета сооружений на устойчивость, однако все они имеют непосредственную практическую направленность и на них базируются решения более сложных задач.

I.2. Равновесие и устойчивость. Потеря устойчивости и критическая нагрузка.

Равновесие системы — это состояние системы, при котором сохраняется её неподвижность относительно некоторой базовой системы, например, относительно Земли. Различают устойчивое, неустойчивое и безразличное состояния равновесия.

Устойчивым называют равновесное положение системы, при котором, получив малое отклонение от этого положения, система возвращается к нему. Например, положение шарика на рис. I.I а, при отклонении от которого шарик, поколебавшись около среднего положения, через некоторое время остановится в этом положении. Аналогично будет вести себя сжатая полоса (рис. I.2) при малых значениях силы – если слегка отклонить верхний конец полосы и отпустить, то полоса, поколебавшись, остановится в исходном положении.

Неустойчивым будет состояние системы, в котором сколь угодно малые ее отклонения приводят к нарастанию перемещений. Например, положение шарика на выпуклой поверхности (рис. I.1б). Стержень на рис. I.2 при нагрузке превышающей критическую ($P_{кр}$) также при любом сколь угодно малом возмущении (отклонении, импульсе) изогнется и останется в этом изогнутом состоянии.

Безразличным равновесным состоянием называют такое, при котором система, получив отклонение, останется на месте (состояние шарика на рис. I.Iв).

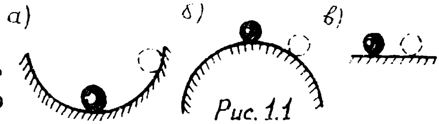


Рис. 1.1

Под устойчивостью сооружений понимают способность их сохранять соответствующую нагрузке первоначальную форму равновесия в деформированном состоянии. Устойчивость является необходимым состоянием для любой инженерной конструкции. Состояние системы, при котором первоначальная форма ее равновесия становится неустойчивой, рассматривается как потеря устойчивости, которая в итоге приводит к разрушению конструкций и сооружений.

Рис. 1.2

Нагрузка, при которой становится возможной потеря устойчивости системы, называется критической нагрузкой.

Различают два вида потери устойчивости. Потерю устойчивости, связанную с бифуркацией (разветвлением) равновесных форм, когда первоначальная форма деформации системы при критической нагрузке становится неустойчивой и переходит в новую равновесную форму, качественно отличную от первоначальной, называют потерей устойчивости I-го рода (потеря устойчивости по Эйлеру). Например, центрально сжатый стержень на рис. I.2, имеющий в первоначальном устойчивом состоянии только продольные деформации, после потери устойчивости получит и деформации изгиба.

Явление, когда при достижении определенной величины (критической) нагрузки начинается интенсивный рост деформаций, развивающийся даже при отсутствии приращения нагрузки, называют потерей устойчивости 2-го рода. При этом никакой бифуркации равновесных состояний и смены вида деформирования не происходит, деформации развиваются в одном направлении и меняются только в количественном отношении. В данном пособии рассматриваются задачи, связанные с потерей устойчивости только I-го рода. Этот подход, несмотря на определенную идеализацию систем и сооружений, сохраняет основные особенности работы сооружений и позволяет сравнительно просто получить решения, достаточно хорошо отвечающие экспериментальным данным и практическим требованиям.

Различают также потери устойчивости "в малом" и "в большом", проиллюстрировать которые удобно опять на примере шарика, находящегося на более сложной поверхности (рис. 1.3). При положении шарика А его поведение зависит от характера и величины возмущений.

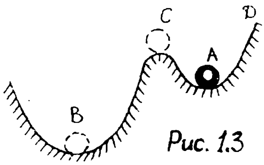


Рис. 1.3

При малом возмущении (отклонении, импульсе) он будет испытывать ограниченные колебания около положения А, не выходя за пределы ямки САД. Если возмущение будет достаточно большим, то шарик может перескочить через неустойчивое равновесное положение С и попасть в левую ямку – в положение В. Здесь говорят, что в положении А шарик устойчив "в малом", но неустойчив "в большом". Для деформируемых систем неустойчивость "в большом" следует учитывать при решении задач за пределами упругости, в нелинейной постановке.

1.3. Методы исследования устойчивости упругих систем

При исследовании устойчивости как линейных, так и нелинейных систем применяются следующие критерии (методы): статический, энергетический, динамический.

Статический метод основан на рассмотрении отклоненного, деформированного положения системы, которое она может приобрести после потери устойчивости. Предполагается, что нагрузка незначительно превысила критическую и система, потеряв устойчивость, перешла в новое отклоненное, изогнутое состояние. Анализируя это состояние, записываются уравнения, характеризующие равновесие системы (характеристические уравнения). Для простых систем – это могут быть обычные уравнения статики, для сложных – дифференциальные уравнения равновесия. Уравнения равновесия могут быть записаны и в форме метода сил, метода перемещений, метода начальных параметров и т.д.

При решении дифференциальных уравнений равновесия можно:
- непосредственно интегрировать их;
- заменять уравнениями в конечных разностях;
- заменять дифференциальные уравнения интегральными;
- использовать метод последовательных приближений

и т.д.

Энергетический метод основан на анализе полной потенциальной энергии системы П. Известно (принцип Дирихле), что в состоянии устойчивого равновесия потенциальная энергия системы имеет минимальное значение, а в безразличном состоянии разность двух соседних значений потенциальной энергии $\Delta\Pi$ (изменение потенциальной энергии) равна нулю:

$$\Delta\Pi = \Delta U + \Delta T, \qquad (I.I)$$

где ΔU – изменение потенциальной энергии внутренних сил (энергии деформирования системы); ΔT – изменение потенциальной энергии внешних сил, равной с обратным знаком работе внешних сил ΔA:

$$\Delta T = -\Delta A$$

Указанные закономерности хорошо иллюстрируются на примерах систем, представленных на рис. I.I и I.2. Шарик (рис. I.I) при отклонении от состояния устойчивого равновесия (a) должен подняться вверх и значит его потенциальная энергия при этом будет возрастать (приращение энергии $\Delta\Pi$ будет положительным, т.е. $\Delta U > \Delta T$). В состоянии неустойчивого равновесия ($б$) любое отклонение шарика приводит к убыванию ею потенциальной энергии ($\Delta\Pi < 0$; $\Delta U < \Delta T$). В безразличном состоянии ($в$) при любом отклонении шарика уровень его не изменяется, то есть $\Delta\Pi = \Delta U + \Delta T = \Delta U - \Delta A = 0$. Для стержня, изображенного на рис. I.2, при внешней нагрузке $P < P_{кр}$, при отклонении стержня от начального равновесного состояния к изогнутому потенциальная энергия деформации стержня ΔU будет больше работы внешней силы P(ΔA) и система будет возвращаться к начальному положению равновесия, то есть это положение будет <u>устойчивым</u>. Если внешняя сила будет такова (а это будет иметь место при $P > P_{кр}$), что работа ее ΔA при деформации системы будет больше потенциальной энергии деформирования ΔU ($\Delta A > \Delta U$), система не сможет вернуться в начальное недеформированное состояние – это состояние системы будет <u>неустойчивым</u>. В критическом состоянии ($P = P_{кр}$), соответствующем границе между устойчивым и неустойчивым равновесиями системы и отвечающем безразличному состоянию шарика (рис. I.I в), приращение потенциальной энергии деформации системы ΔU должно быть равно работе внешних сил ΔA, то есть

$$\Delta U - \Delta A = 0 \qquad (I.2)$$

Выполненный анализ показывает, что энергетический критерий может использоваться в двух разновидностях:

I) критическая нагрузка определяется путем приравнивания нулю суммы изменений потенциальных энергий деформирования системы и внешних сил при переходе системы, потерявшей устойчивость, в новое деформированное состояние:

$$\Delta W + \Delta A = \Delta U + \Delta T = 0, \qquad (I.3)$$

где ΔW – работа внутренних сил;

2) записывается выражение полной потенциальной энергии системы П в деформированном состоянии и учитывая, что полная потенциальная энергия системы, находящейся в равновесии, имеет экстремальное (минимальное) значение, критическую силу определяют из условия экстремума этой функции:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} = 0 \; ; \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (1.4)$$

где α_i – параметры перемещений системы.

Отметим, что энергетический подход может реализовываться с помощью метода Ритца, метода Бубнова–Галеркина и т.д.

Динамический метод, являющийся наиболее общим и универсальным методом, основан на рассмотрении движения (обычно собственных колебаний) системы, вызванного некоторыми малыми возмущениями начального равновесного состояния. Если колебания лежат в определенных пределах, постепенно затухая, то состояние системы устойчиво. Если параметры колебаний (период и амплитуда) резко растут, а частота колебаний резко уменьшается, то состояние неустойчиво. Условие, определяющее переход системы к состоянию, когда колебания системы при сколь угодно малых начальных возмущениях резко возрастают (переходят просто в движение системы, изгибающее ее), и дает возможность определить критическую нагрузку для рассматриваемой системы. Обычно такое условие – это равенство нулю частоты собственных колебаний, из которого и определяется $P_{кр}$.

ГЛАВА 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМЫХ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ С РАЗЛИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ЗАКРЕПЛЕНИЯ

2.1. Степень свободы системы

Возможность деформироваться и многообразие форм деформирования для упругих систем определяется степенью свободы систем.

Степень свободы системы с точки зрения устойчивости – это число независимых геометрических параметров, необходимых для определения с их помощью положения всех точек системы, потерявшей устойчивость.

Например, стержень, представленный на рис. 2.1 а и состоящий из двух абсолютно жестких звеньев, связанных между собой шарниром с упругой связью, обладает одной степенью свободы, так как неустойчивое (отклоненное) состояние системы будет полностью определяться одним параметром (перемещением шарнира Δ_1, либо углом поворота одного из звеньев, например φ_1, и т.д.).

Степень свободы с точки зрения устойчивости для любой системы может быть определена, например, по формуле:

$$W = 3Д - 2Ш - C_0 , \qquad (2.1)$$

где Д – число абсолютно жестких дисков в системе, либо ее части, которая подвергнута сжимающим нагрузкам, если эта часть системы работает на устойчивость независимо от остальной ее части (отметим, что при выполнении кинематического анализа систем с целью определения их геометрической неизменяемости или изменяемости за диск принималось тело, в котором допускались внутренние деформации, здесь диск – это абсолютно жесткое тело); Ш – число одиночных (простых) шарниров, соединяющих диски; C_0 – число опорных кинематических связей в системе (упругие связи при этом не учитываются). Например, для системы на рис. 2.1а будем иметь $W = 3\cdot2 - 2\cdot1 - 3 = 1$. Система, изображенная на рис. 2.1б и состоящая из четырех абсолютно жестких дисков, имеет ($W = 3\cdot4 - 2\cdot3 - 3 = 3$) три степени свободы.

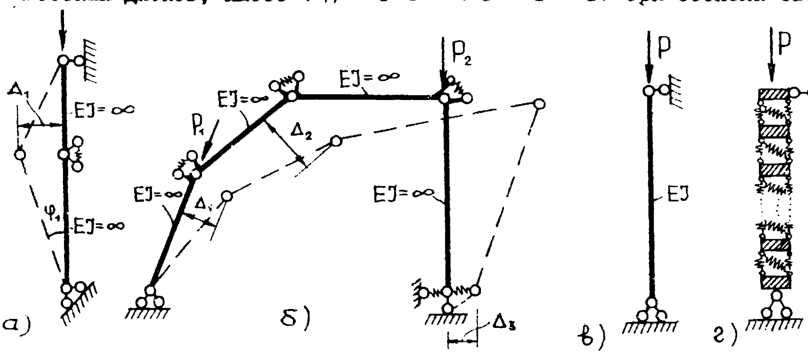


Рис. 2.1

Упругий стержень (рис. 2.1в) при определении степени свободы может быть представлен в виде совокупности бесконечно большого числа очень малых абсолютно жестких элементов, соединенных между собой упругими связями, как это показано на рис. 2.1 г. Тогда получим $W = 3\cdot\infty - 2\cdot0 - 3 = \infty$, то есть он имеет бесконечное число степеней свободы. Аналогично любая система, состоящая из нескольких упругих стержней, тоже будет иметь бесконечно большое число степеней свободы.

Рассмотрим еще один пример – систему, представленную на рис. 2.2а. Казалось бы, что эта система, ввиду того, что правая часть ее состоит из упругих стержней, имеет бесконечно большое число степеней свободы. В общем случае это так. Однако анализ потери устойчивости этой системы показывает, что правая часть здесь (обведенная пунктирной линией) выступает по отношению к стержню АВ как упругая система, препятствующая отклонению стержня АВ при его потере устойчивости, то есть работает как обычная упругая связь. Поэтому систему на рис. 2.2а можно представить в виде, изображенном на рис. 2.2б, при этом жесткость упругой связи r_{11} должна быть подобрана так, чтобы она соответствовала (равнялась) жесткости упругой системы, которую она заменила (ДСК). В итоге рассматриваемая система имеет с точки зрения устойчивости только одну степень свободы ($W = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 2 = 1$). Таким образом, определение степени свободы с точки зрения устойчивости во многих случаях (когда некоторую часть системы можно представить как упругую связь по отношению к остальной части, в которой действуют сжимающие силы) целесообразно выполнять на основе анализа только той части системы, которая непосредственно может потерять устойчивость.

Следует отметить, что число степеней свободы системы определяет (равно) число возможных форм потери устойчивости, число критических нагрузок, отвечающих каждой из этих форм, а также число уравнений, которые необходимо составить и решить при расчете системы на устойчивость. Другое дело, что использование различных подходов и методов позволяет уменьшить число уравнений, необходимых для расчета системы. Это и использование дифференциальных уравнений равновесия, и применение метода перемещений и т.д. Кроме того, с практической точки зрения для большинства систем, как правило, важно и достаточно знать только наименьшую критическую нагрузку.

2.2. Определение критических нагрузок для систем с одной степенью свободы

2.2.1. Статический метод

Рассмотрим бесконечно жесткий стержень, шарнирно опертый внизу, закрепленный упругой связью вверху и загруженный продольной сжимающей силой P (рис. 2.2б). Жесткость упругой связи равна r_{11} и представляет собой величину реактивного усилия (силы), возникающей в упругой связи при ее единичном перемещении (сжатии, растяжении).

При решении задачи статическим способом предполагаем, что сила P достигла ее критического значения $P_{кр}$ и незначительно превысила его. Система потеряла устойчивость, перейдя в новое отклоненное равновесное состояние. Для рассматриваемой системы (рис. 2.2б) потеря устойчивости может произойти только путем поворота стержня относительно точки А. Для отклоненного состояния, показанного на рисунке пунктирной линией, запишем уравнение равновесия:

$$\sum M_A = 0; \quad -P_{кр} \cdot \Delta + R \cdot l = 0; \quad -P_{кр} \Delta + r_{11} \cdot \Delta \cdot l = 0; \quad \Delta(-P_{кр} + r_{11} l) = 0.$$

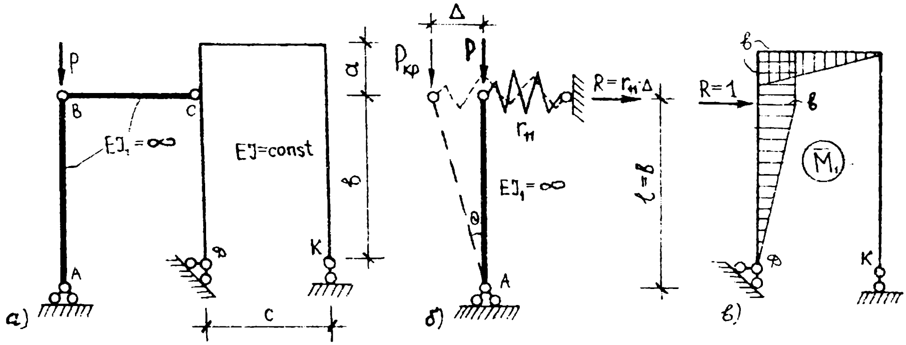


Рис. 2.2

Произведение равно нулю, когда один из сомножителей равен нулю:

а) $\Delta \neq 0$, так как в этом случае нет потери устойчивости (решение $\Delta = 0$ описывает неотклоненное равновесное состояние);

б) $(-P_{кр} + r_{11}\cdot \ell) = 0$, откуда найдем критическое значение силы P для рассматриваемой системы:

$$P_{кр} = r_{11}\cdot \ell \qquad (2.2)$$

В строительных сооружениях и системах упругая связь в виде пружины (рис. 2.2б), конечно, не встречается, но в качестве ее, как следует из рассуждений в разделе 2.I, может выступать любая конструкция – балка; рама, состоящая из элементов конечной жесткости; и т.д. Жесткость упругой связи при этом находится из рассмотрения системы, которая заменяется этой упругой связью, исходя из физического смысла жесткости r_{11}, представляющей собой реакцию связи (рамы, балки) при единичном смещении в направлении работы упругой связи

$$R = r_{11} \longrightarrow \Delta = 1 .$$

Если же в направлении работы упругой связи приложить единичную реакцию (силу), то перемещение в этом направлении будет равно δ_{11} :

$$R = 1 \longrightarrow \Delta = \delta_{11} ,$$

Откуда: $\dfrac{r_{11}}{1} = \dfrac{1}{\delta_{11}}$ или $r_{11} = \dfrac{1}{\delta_{11}}$, где $\delta_{11} = \sum\int \dfrac{\overline{M}_1^2\, dx}{EJ}$ (2.3)

Тогда для системы на рис. 2.2а, для которой эпюра $\overline{M}_1$ в раме, работающей как упругая связь, от действия единичной силы в направлении работы этой связи представлена на рис. 2.2в, будем иметь

$$\delta_{11} = \sum\int \frac{\overline{M}_1^2\cdot dx}{EJ} = \frac{в^2}{3EJ}(в+3a+c); \quad r_{11} = \frac{1}{\delta_{11}} = \frac{3EJ}{в^2\cdot(в+3a+c)} .$$

Рассмотрим еще один пример – систему, представленную на рис. 2.3. Терять устойчивость здесь также будет вертикальный бесконечно жесткий стержень путем поворота относительно точки A. Ввиду жестко-

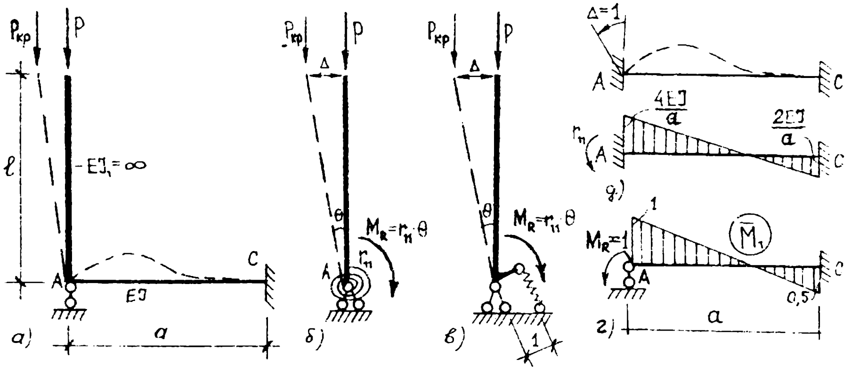


Рис. 2.3

го соединения этого стержня в точке A с горизонтальным стержнем, последний должен будет деформироваться, как показано на рис. 2.3а. Сопротивляясь этому деформированию (повороту узла в точке A) горизонтальный упругий стержень здесь будет работать как угловая упругая связь, которую можно изобразить в одном из вариантов, представленных на рис. 2.3 б,в. Жесткость этих упругих связей r_{11} представляет собой реактивный момент, возникающий в них при повороте этих связей на единичный угол. Вследствие этого при повороте на угол θ реактивный момент будет равен $M_R = r_{11}\cdot\theta$. Для определения величины r_{11} здесь можно также воспользоваться зависимостью (2.3), приложив для построения эпюры $\bar{M}_1$ единичный момент к упругой балке AC, работающей как угловая упругая связь, в точке A (см. рис. 2.3 г). Однако здесь величину r_{11} проще получить, если воспользоваться таблицами метода перемещений (см. рис. 2.3д): $r_{11} = 4EJ/a$,

Тогда для рассматриваемой системы критическую нагрузку найдем, составив уравнение равновесия в виде:

$$\sum M_A = 0\ ;\quad -P_{кр}\cdot\Delta + M_R = 0\ ;\quad -P_{кр}\cdot\ell\cdot\theta + r_{11}\cdot\theta = 0\ ;\quad \theta\cdot(-P_{кр}\cdot\ell + r_{11}) = 0\ ,$$

где учтено, что $\Delta = \ell\cdot tg\,\theta \approx \ell\cdot\theta$ и $M_R = r_{11}\cdot\theta$.

В результате при $\theta \neq 0$ получим — $P_{кр} = \frac{r_{11}}{\ell}$. (2.4)

2.2.2. Энергетический метод

Рассмотрим простую систему, рассчитанную ранее статическим способом (рис. 2.2). Запишем для нее работы внешних и внутренних сил на малых перемещениях, при переходе системы в результате потери устойчивости (при достижении нагрузкой P критической величины $P_{кр}$) в отклоненное равновесное состояние (рис. 2.4).

Работа внешней силы $P_{кр}$ на перемещении Δ_1 (точка B в результате поворота стержня опустится вниз) определится выражением

$$\Delta A = P_{кр}\cdot\Delta_1 = \frac{1}{2}P_{кр}\cdot\ell\cdot\theta^2, \qquad (2.5)$$

где $\Delta_1 = \ell - \ell\cdot\cos\theta = \ell(1-\cos\theta) = \ell\cdot 2\cdot\sin^2\frac{\theta}{2} \approx 2\cdot\ell\cdot\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{\ell\cdot\theta^2}{2}$

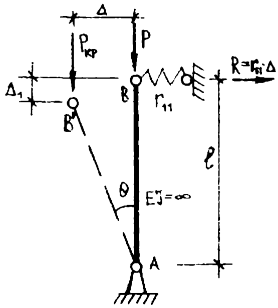


Рис. 2.4

Работа внутренней силы (силы в упругой связи)– будет равна

$$\Delta W = -\frac{1}{2}R\cdot\Delta = -\frac{1}{2}(r_{11}\cdot\Delta)\cdot\Delta = -\frac{1}{2}r_{11}\Delta^2 = -\frac{1}{2}r_{11}\ell^2\theta^2 \qquad (2.6)$$

где $\Delta = \ell\cdot\sin\theta \simeq \ell\cdot\theta$

Подставив (2.5) и (2.6) в выражение (I.3):

$$\Delta W + \Delta A = 0\ ; \quad \frac{1}{2}\cdot P_{кр}\cdot\ell\cdot\theta^2 - \frac{1}{2}r_{11}\cdot\ell^2\theta^2 = 0\ ,$$

получим при $\theta \neq 0$ величину критической нагрузки для рассматриваемой системы $P_{кр} = r_{11}\cdot\ell$, которая полностью совпадает с результатом, полученным статическим способом.

Отметим, что в случае наличия в системе угловой упругой связи, как например, в системе на рис. 2.3, работа внутренней силы (момента M_R) будет определяться выражением

$$\Delta W = -\frac{1}{2}M_R\cdot\theta. \qquad (2.7)$$

2.2.3. Динамический метод

Рассмотрим ту же систему, изображенную на рис. 2.4. Возможное движение системы, заключающееся в повороте ее относительно точки A, запишется по второму закону Ньютона в виде

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = M\ , \qquad (2.8)$$

где J – момент инерции массы рассматриваемого стержня относительно точки A ;

M – вращающий момент, действующий относительно точки A и равный

$$M = P_{кр}\cdot\ell\cdot\theta - r_{11}\cdot\ell^2\cdot\theta\ ,$$

Подставив выражение M в (2.8) и выполнив преобразования, получим уравнение движения системы

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\cdot\theta = 0\ , \qquad (2.9)$$

где обозначено: $$\omega^2 = \frac{(r_{11}\cdot\ell - P_{кр})\cdot\ell}{J}\ . \qquad (2.10)$$

Решение уравнения (2.9) может быть представлено в виде

$$\theta = \theta_0\cdot\cos\omega t\ , \qquad (2.11)$$

где θ_0 – угол, определяющий начальное отклонение стержня.

Это уравнение свободных гармонических колебаний с частотой ω

и с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Критическому состоянию соответствует такое, при котором стержень, выведенный из первоначального равновесного состояния, получает конечные или бесконечные перемещения, не возвращаясь в исходное состояние, а это значит, что период колебаний должен стремиться к бесконечности, а частота колебаний – соответственно к нулю. Приравняв (2.10) к нулю, получим – $P_{кр} = r_{11} \cdot \ell$, что совпадает с ранее определенными значениями $P_{кр}$ для этой задачи статическим и энергетическим способами.

2.3. Определение критических нагрузок для систем с несколькими степенями свободы

Рассмотрим на примере простой системы с двумя степенями свободы (рис. 2.5). Задачу решим статическим способом. Пусть сила P достигла критического значения $P_{кр}$ и система потеряла устойчивость, перейдя в отклоненное равновесное состояние (показано штриховой линией).

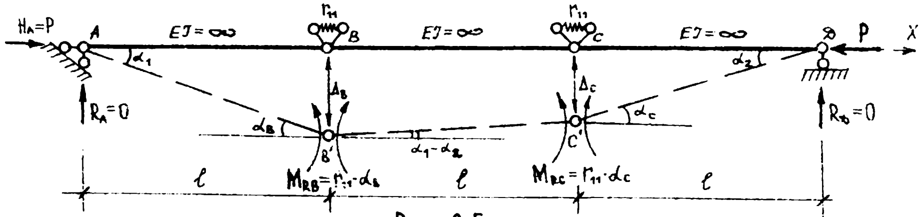


Рис. 2.5

Составим уравнения равновесия частей системы, взяв суммы моментов относительно шарниров B′ и C′ (учитывая, что из $\sum X = 0$ – $H_A = P$ а из $\sum M_A = 0$ и $\sum M_D = 0$ — $R_D = 0$ и $R_A = 0$) :

$$1)\ \sum M_B^{лев} = 0 ; \quad P \cdot \Delta_B - M_{RB} = 0 ; \quad P \cdot \alpha_1 \cdot \ell - r_{11}(2\alpha_1 - \alpha_2) = 0 ; \qquad (2.12)$$

где: $\Delta_B = \alpha_1 \cdot \ell$; $M_{RB} = r_{11} \cdot \alpha_B$; $\alpha_B = \alpha_1 + (\alpha_1 - \alpha_2) = 2\alpha_1 - \alpha_2$

$$2)\ \sum M_C^{прав} = 0 ; \quad -P \cdot \Delta_C + M_{RC} = 0 ; \quad P \cdot \alpha_2 \cdot \ell + r_{11}(2\alpha_2 - \alpha_1) = 0 , \qquad (2.13)$$

где: $\Delta_C = \alpha_2 \cdot \ell$; $\alpha_C = \alpha_2 - (\alpha_1 - \alpha_2) = 2\alpha_2 - \alpha_1$; $M_{RC} = r_{11} \cdot \alpha_C$;

После преобразования уравнений (2.12) и (2.13) получим однородную линейную систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (P \cdot \ell - 2 \cdot r_{11}) \cdot \alpha_1 + r_{11} \cdot \alpha_2 = 0 ; \\ r_{11} \cdot \alpha_1 + (P \cdot \ell - 2 \cdot r_{11}) \cdot \alpha_2 = 0 ; \end{cases} \qquad (2.14)$$

которая имеет два варианта решений:

1) тривиальное решение – $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, которое определяет начальное недеформированное состояние системы;

2) нетривиальное решение, которое не дает возможности определить величины α_1 и α_2, но дает уверенность в том, что α_1 и α_2 не равны нулю и соответственно может происходить потеря устойчивости системы, соответствует равенству нулю главного определителя системы

$$\begin{vmatrix} P\cdot\ell-2\cdot r_{11} & r_{11} \\ r_{11} & P\cdot\ell-2\cdot r_{11} \end{vmatrix} = 0 . \qquad (2.15)$$

Такой определитель в теории устойчивости называют <u>определителем устойчивости</u>. Раскрывая этот определитель, получим уравнение, которое называют <u>уравнением устойчивости</u>:

$$(P\cdot\ell-2\cdot r_{11})^2 - r_{11}^2 = 0 \ ; \qquad (2.16)$$

Решение этого квадратного относительно P уравнения дает возможность найти два значения критических сил для рассматриваемой системы.

$$P_{кр}^1 = \frac{r_{11}}{\ell} \ ; \quad P_{кр}^2 = \frac{3\cdot r_{11}}{\ell} \ . \qquad (2.17)$$

За расчетную критическую нагрузку всегда, естественно, принимается наименьшая критическая сила, здесь это – $P_{кр}^1 = r_{11}/\ell$.

При решении задач устойчивости систем с несколькими степенями свободы интерес представляют не только значения критических нагрузок, но и выяснение формы потери устойчивости, то есть той конфигурации системы, которую она приобретет после потери устойчивости.

Для этого в рассматриваемой задаче нужно найти связь между α_1 и α_2 из одного из исходных уравнений, например, из первого

$$(P\cdot\ell-2\cdot r_{11})\cdot\alpha_1 + r_{11}\cdot\alpha_2 = 0 \ ,$$

откуда

$$\alpha_1 = -\frac{P\cdot\ell-2\cdot r_{11}}{r_{11}}\cdot\alpha_2 \ ,$$

Тогда для первой критической силы $\left(P_{кр}^1 = \frac{r_{11}}{\ell}\right)$ получим $\alpha_1 = \alpha_2$ для второй критической силы $\left(P_{кр}^2 = \frac{3r_{11}}{\ell}\right)$ – $\alpha_1 = -\alpha_2$. В соответствии с этим формы потери устойчивости с точностью до одного параметра (например, α_1) имеют вид, представленный на рис. 2.6.

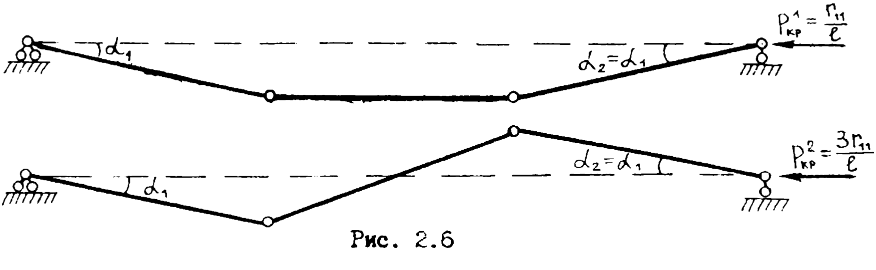


Рис. 2.6

2.4. Устойчивость стержней с бесконечным числом ~~степеней~~ свободы

2.4.1. Дифференциальные уравнения равновесия.

Для систем с бесконечным числом степеней свободы в качестве уравнений равновесия, описывающих отклоненное деформированное состояние, используют дифференциальное уравнение равновесия, описывающее равновесие каждого из бесконечно малых элементов системы. При этом это уравнение может быть записано в двух вариантах:

1) Как приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня второго порядка, известное нам из сопротивления материалов

$$EJ\,y'' = M. \qquad (2.18)$$

При записи этого уравнения для изгибающих моментов следует соблюдать правило знаков, представленное на рис. 2.7.

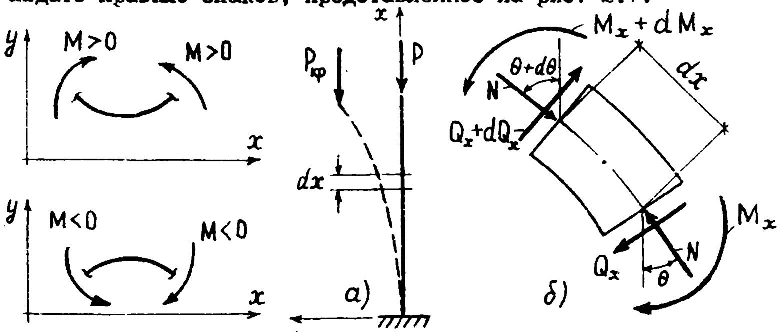


Рис. 2.7 Рис. 2.8

2) Часть используют и дифференциальное уравнение равновесия четвертого порядка, которое можно получить, рассмотрев равновесие бесконечно малого элемента с учетом его поворота при потере устойчивости стержня (рис. 2.8). При этом несложно показать, что сжимающая сила N в стержне с точностью до бесконечно малых величин второго порядка будет неизменной по длине стержня, то есть $N = P_{кр}$.

Запишем уравнение равновесия бесконечно малого элемента стержня после потери устойчивости

$$\Sigma Y = 0; \qquad N\sin\theta - N\sin(\theta+d\theta) + Q_x\cos\theta - (Q_x+dQ_x)\cdot\cos(\theta+d\theta) = 0. \quad (2.19)$$

Учитывая, что для малых θ – $\sin\theta \approx \theta$; $\sin(\theta+d\theta) \approx \theta+d\theta$; $\cos\theta \approx 1$; $\cos(\theta+d\theta) \approx 1$, получим (2.19) в виде

$$N\cdot\theta - N\cdot(\theta+d\theta) + Q_x - Q_x - dQ_x = 0$$

или

$$N d\theta + dQ = 0,$$

после чего, разделив это уравнение на dx , и учитывая, что $Q = \frac{dM}{dx} = \frac{d(EJy'')}{dx} = EJy'''$ и что $\theta = y'$, будем иметь

$$N\frac{d\theta}{dx}+\frac{d(EJy''')}{dx}=0 \quad \text{или} \quad EJy^{IV}+Ny''=0. \tag{2.20}$$

Для случая же, когда $N = P_{кр}$

$$EJ\cdot y^{IV}+P_{кр}y''=0. \tag{2.21}$$

2.4.2 Устойчивость упругих стержней постоянного сечения с произвольными условиями закрепления концов

Такие стержни имеют (см. п. 2.1) бесконечное число степеней свободы. При решении задачи воспользуемся статическим методом. Криволинейную форму равновесия стержня с упруго податливыми опорами (рис. 2.9) опишем дифференциальным уравнением второго порядка:

$$EJy''=M. \tag{2.22}$$

Правило знаков для изгибающего момента M принимается по рис. 2.7. Жесткости упругих связей при угловом смещении сечения на единицу соответственно равны r_{22} и r_{33}, а линейном – r_{11}. Заметим, что при составлении расчетной схемы реальные строительные конструкции заменяют упругими связями. Физический смысл и способ определения жесткостей таких связей изложен в п. 2.2.1.

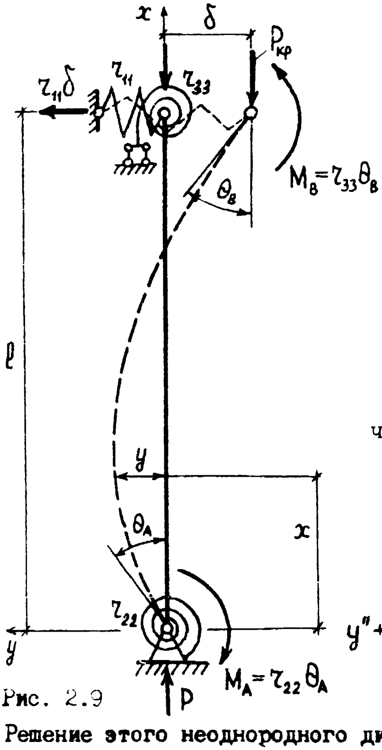


Рис. 2.9

Изгибающий момент в произвольном сечении x рассматриваемой системы определяется выражением

$$M=-P(\delta+y)+r_{11}\delta(\ell-x)+r_{33}\theta_B,$$

подставив которое в (2.22) и выполнив преобразования, получим

$$y''+n^2y=\delta\left[\frac{r_{11}(\ell-x)}{EJ}-n^2\right]+\frac{r_{33}\theta_B}{EJ}, \tag{2.23}$$

где $n^2=\dfrac{P}{EJ}$; $\nu=n\ell$. (2.24)

Решение этого неоднородного дифференциального уравнения ищется в виде:

$$y=A\cos nx+B\sin nx+\delta\left[\frac{r_{11}(\ell-x)}{n^2EJ}-1\right]+\theta_B\frac{r_{33}}{n^2EJ}. \tag{2.25}$$

Постоянные интегрирования A и B, а также неопределенные величины δ и θ_B найдем из граничных условий:

1) при $X = 0 - Y = 0$; $\quad A + \delta\left[\frac{r_{11}l}{n^2EJ} - 1\right] + \theta_B \frac{r_{33}}{n^2EJ} = 0;$

2) при $X = 0 - y' = \theta_A = \frac{M_A}{r_{22}}$, где $M_A = \delta(r_{11}l - n^2EJ) + \theta_B r_{33}$,

т.е. $y' = -An\sin nx + Bn\cos nx - \delta\frac{r_{11}}{n^2EJ} = \frac{\delta(r_{11}l - n^2EJ) + \theta_B r_{33}}{r_{22}}$;

тогда

$$Bn - \delta\left(\frac{r_{11}}{n^2EJ} + \frac{r_{11}l - n^2EJ}{r_{22}}\right) - \theta_B\frac{r_{33}}{r_{22}} = 0;$$

3) при $X = l - y = -\delta$; $\quad A\cos nl + B\sin nl + \theta_B\frac{r_{33}}{n^2EJ} = 0;$

4) при $X = l - y' = -\theta_B$; $\quad -An\sin nl + Bn\cos nl - \delta\frac{r_{11}}{n^2EJ} + \theta_B = 0.$

В результате получим систему четырех однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных величин A, B, δ, θ_B. Для нахождения ненулевого решения этой системы уравнений приравняем определитель четвертого порядка, составленный из коэффициентов при неизвестных, к нулю:

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \left(\frac{r_{11}l}{n^2EJ} - 1\right) & \frac{r_{33}}{n^2EJ} \\ 0 & n & -\left(\frac{r_{11}}{n^2EJ} + \frac{r_{11}l - n^2EJ}{r_{22}}\right) & -\frac{r_{33}}{r_{22}} \\ \cos nl & \sin nl & 0 & \frac{r_{33}}{n^2EJ} \\ -n\sin nl & n\cos nl & -\frac{r_{11}}{n^2EJ} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия определителя, например, по третьему столбцу получим уравнение устойчивости в виде:

$$r_{33}\left\{\frac{\operatorname{tg} nl}{EJ}\left(1 - \frac{r_{11}l}{n^2EJ}\right) + \frac{2r_{11}(1 - \cos nl)}{n^3(EJ)^2\cos nl} + \frac{n}{r_{22}}\left[1 - \frac{r_{11}l}{n^2EJ}\left(1 - \frac{\operatorname{tg} nl}{nl}\right)\right]\right\} -$$

$$-n\left(\frac{r_{11}l}{n^2EJ} - 1\right) + \operatorname{tg} nl\left(\frac{r_{11}}{n^2EJ} + \frac{r_{11}l - n^2EJ}{r_{22}}\right) = 0. \qquad (2.26)$$

Используя (2.26) можно получить характеристические уравнения, из которых определяется критический параметр n и соответственно критическая сила $P_{кр} = n^2 EJ$ для любых случаев опирания концов стержня. Естественно, что при решении характеристического уравнения отыскивается его наименьший положительный корень, которому отвечает минимальная критическая нагрузка и самая простая форма потери устойчивости. Остальному спектру корней уравнения соответствуют большие критические нагрузки и более сложные формы потери устойчивости, которые возможны при создании определенных условий.

Если в уравнение (2.26) положить $r_{33} = 0$, что соответствует отсутствию этой упругой связи (рис. 2.10), то получим уравнение устойчивости

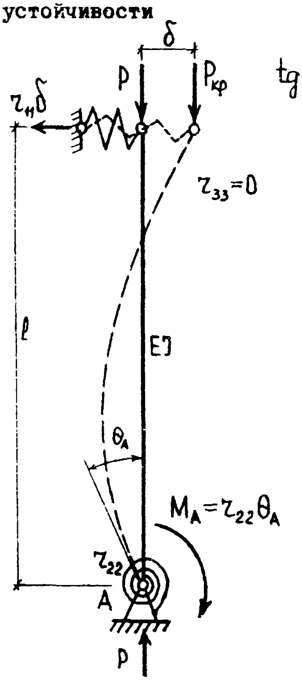


Рис. 2.10

$$\operatorname{tg} n\ell = n\ell \frac{\dfrac{r_{11}\ell}{n^2 EJ} - 1}{\dfrac{r_{11}\ell}{n^2 EJ} + \dfrac{(r_{11}\ell - n^2 EJ)\ell}{r_{22}}}, \qquad (2.27)$$

которое приведено в [4] .

При жесткостях всех упругих связей равных бесконечности (стержень с защемленными концами) из (2.26) получим

$$n\ell \sin n\ell - 2(1 - \cos n\ell) = 0. \qquad (2.28)$$

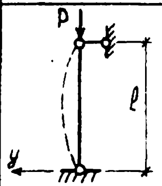
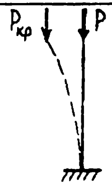
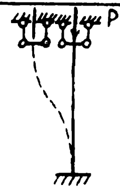
Это уравнение удовлетворяется при $n\ell = 2k\pi$, где k = 1,2,3, ... Наименьшая критическая нагрузка будет при k = 1 — $P_{кр} = 4\pi^2 EJ/\ell^2$. Для других стержней на жестких и упругих опорах характеристические уравнения устойчивости можно получить из (2.26) или (2.27), изменяя жесткости упругих связей. В таблице 2.1 приведены пять схем стоек на жестких опорах. Для каждой из них приведены жесткости упругих связей, уравнение устойчивости, его наименьший положительный корень, критическая сила, уравнение упругой линии, коэффициент свободной длины и расчетная длина стержня, параметр устойчивости .

Как отмечалось, впервые задача об устойчивости прямолинейного упругого стержня шарнирно опертого по обеим концам, была решена Л.Эйлером.

В уравнениях кривых, по которым выпучиваются стержни, величины A, Б, C, D определить нельзя. Известно только, что это прогибы в

Таблица 2.I

Решение задачи устойчивости для упругих стержней

Номер схемы	1	2	3	4	5
Схемы					
Жесткости упругих связей	$r_{11}=\infty$, $r_{22}=0$, $r_{33}=0$	$r_{11}=0$, $r_{33}=0$, $r_{22}=\infty$	$r_{11}=\infty$, $r_{22}=\infty$, $r_{33}=0$	$r_{11}=\infty$, $r_{22}=\infty$, $r_{33}=\infty$	$r_{11}=0$, $r_{22}=\infty$, $r_{33}=\infty$
Уравнение устойчивости	$\sin nl=0$	$\cos nl=0$	$\mathrm{tg}\, nl=nl$	$nl\sin nl-2(1-\cos nl)=0$	$\sin nl=0$
Наименьший корень	$nl=\pi$	$nl=\frac{\pi}{2}$	$nl=4{,}493$	$nl=2\pi$	$nl=\pi$
Критическая сила	$P_{кр}=\pi^2\frac{EJ}{l^2}$	$P_{кр}=\frac{\pi^2}{4}\frac{EJ}{l^2}$	$P_{кр}=20{,}19\frac{EJ}{l^2}$	$P_{кр}=4\pi^2\frac{EJ}{l^2}$	$P_{кр}=\pi^2\frac{EJ}{l^2}$
Уравнение упругой кривой	$y=A\sin\frac{\pi x}{l}$	$y=B\left(\cos\frac{\pi x}{2l}-1\right)$	$y=D[\sin nx-$ $-nl\cos nx+n(l-x)]$	$y=C\left(1-\cos\frac{2\pi x}{l}\right)$	$y=A\left(1-\cos\frac{\pi x}{l}\right)$
μ	1	2	0,7	0,5	1
l_0	l	$2l$	$0{,}7l$	$0{,}5l$	l
$\nu=\frac{\pi}{\mu}=\upsilon$	π	$\frac{\pi}{2}$	4,493	2π	π

каком-то сечении стержня. Расстояния до этих сечений от начала координат соответственно равны: схемы I и 5 – $0{,}5\ell$, схема 2 – ℓ, схема 3 – $0{,}35\ell$, схема 4 – $0{,}25\ell$.

Как видно из таблицы 2.I, критическая сила зависит от способа закрепления концов стержня, при этом добавление каждой новой связи увеличивает ее. Ф.С.Ясинский, стремясь обобщить решение Л.Эйлера, ввел понятие свободной (приведенной, расчетной) длины стержня ℓ_0, связанной с действительной длиной соотношением $\ell_0 = \mu\ell$. Здесь μ – коэффициент свободной длины стержня, зависящий от способа закрепления его концов. Величины этого коэффициента, а также свободные длины стержней приведены в таблице 2.I. Часто используется и параметр устойчивости $\nu = \vartheta = n\ell$, который связан с μ соотношением $\nu = \vartheta = \pi/\mu$. Поэтому критическую силу прямолинейного стержня можно определять по любой из формул:

$$P_{кр} = n^2 EJ = \frac{\nu^2 EJ}{\ell^2} = \frac{\vartheta^2 EJ}{\ell^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu\ell)^2} = \frac{\pi^2 EJ}{\ell_0^2}. \qquad (2.29)$$

Свободная длина ℓ_0 имеет четкий геометрический смысл – это длина полуволны синусоиды, по которой теряет устойчивость упругий стержень.

Стойки с упругими связями и стержни рам изгибаются по более сложным кривым, и часто кривые, по которым теряют устойчивость стержни, неизвестны. В таких случаях свободную длину сжатого стержня можно определить, если найденную для него критическую силу приравнять выражению $\pi^2 EJ/\ell_0^2$. Определенная таким образом,свободная длина стержня является условной его характеристикой, но она применяется в практических расчетах.

Расчеты сжатых элементов на прочность и устойчивость при работе материала в упругой и в упруго-пластической стадии производят по формуле

$$\sigma = \frac{P}{\varphi A} \leqslant R, \qquad (2.30)$$

где φ – коэффициент продольного изгиба стержня, зависящий от материала и гибкости элемента, который изменяется в пределах $0 < \varphi \leqslant 1$. Определяется он по специальным таблицам [8]. Гибкость стержня – это отношение его свободной длины к минимальному радиусу инерции поперечного сечения

$$\lambda = \frac{\ell_0}{r_{min}} = \frac{\ell_0}{\sqrt{A/J_{min}}}, \qquad (2.31)$$

где J_{min}, A – соответственно минимальный момент инерции и площадь поперечного сечения стержня. Так как свободная длина и коэффициент продольного изгиба имеют важное значение для практических расчетов на устойчивость, то приведем (см. [8]) значение коэффициента свободной длины стержня μ для некоторых часто встречающихся стержней и нагрузок.

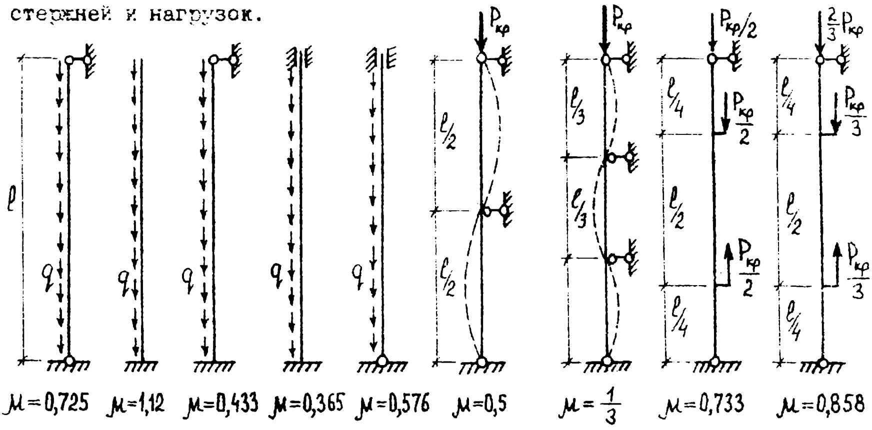


Рис. 2.II

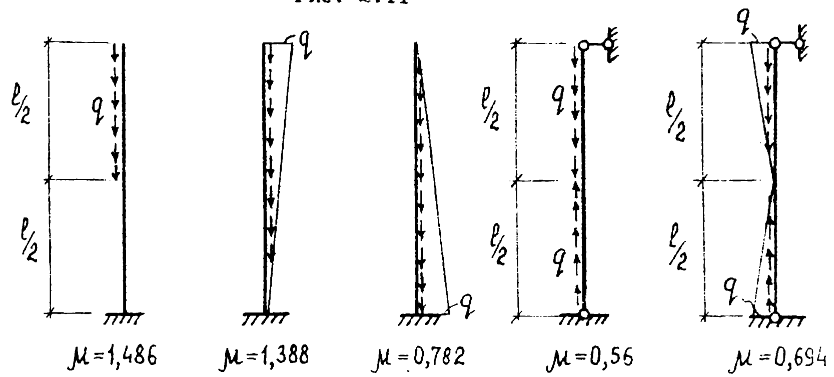


Рис. 2.I2

В общем случае для упругой стадии работы материала формула Эйлера для стержней, показанных на рис. 2.II имеет вид

$$P_{кр}=\frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}\,; \qquad q_{кр}l=\frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}\,.$$

При нагрузке неравномерно распределенной по длине стержня (рис. 2.I2) ее критическое значение определяется по формуле

$$\frac{q_{кр}l}{2}=\frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}\,.$$

Для стоек с упругими связями уравнения устойчивости более сложное, чем для аналогичных стержней на жестких опорах. Поэтому для нахождения наименьшего положительного корня этого уравнения лучше пременить один из численных методов решения нелинейных уравнений, например, метод половинного деления, Ньютона, Мюллера и т.д. При решении уравнения важно знать интервал, в котором находится искомый корень. Найдем этот интервал для некоторых частных случаев опирания стоек.

1. Пусть жесткости упругих связей принимают значения $r_{11}=0$, $r_{33}=0$, $0\leqslant r_{22}\leqslant\infty$. Тогда получим стойку показанную на рис. 2.13. Уравнение

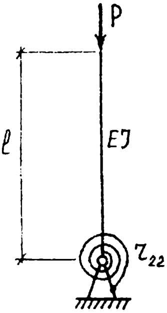


Рис. 2.13

устойчивости получим из (2.27), которое при $r_{11}=0$ принимает вид:

$$tg\,\nu=\frac{r_{22}\ell}{\nu EJ}. \tag{2.32}$$

При $r_{22}=\infty$ стержень превращается в жестко защемленную консоль, для которой $\nu=\pi/2$. Так как добавление связей увеличивает критическую нагрузку, то конечному значению жесткости r_{22} соответствует меньшее, значение ν, т.е. корень нужно искать в интервале $0\leqslant\nu\leqslant\pi/2$.

Пример. Определить критическую нагрузку для системы, показанной на рис. 2.14 а.

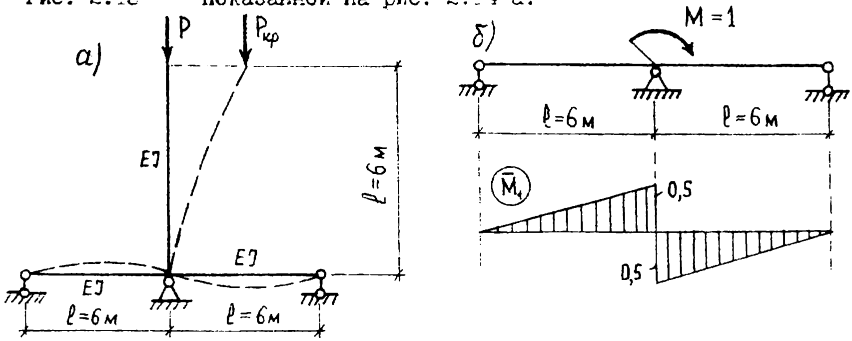


Рис. 2.14

Расчетная схема данной конструкции показана на рис. 2.13. Здесь роль упругой связи выполняет неразрезная балка (рис. 2.14 б), которая препятствует повороту нижнего конца стойки. Для определения жесткости этой упругой связи с помощью любого метода (сил, перемещений, уравнения трех моментов, моментных фокусных отношений) строится эпюра изгибающих моментов от $M=1$ и находится перемещение

$$\delta_{11}=\Sigma\int\frac{\bar{M}_1^2dx}{EJ}=\frac{1}{EJ}\cdot\frac{1}{2}0{,}5\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}0{,}5\cdot2=\frac{\ell}{6EJ};\qquad r_{22}=\frac{1}{\delta_{11}}=\frac{6EJ}{\ell}.$$

В этом случае уравнение устойчивости (2.32) примет вид:

$$f(\nu)=tg\,\nu-\frac{6}{\nu}=0.$$

Решим полученное уравнение методом деления отрезка пополам [10].

Для этого зададимся двумя значениями ν , находящимися в заданном интервале корня уравнения $0<\nu\leqslant\pi/2$, например, $a=\nu=0{,}8$ и $b=\nu=1{,}5$. Вычислим значения функции $f(\nu)$ по концам этого отрезка – $f(a)=-6{,}5$; $f(b)=10{,}1$. Поскольку $f(a)\cdot f(b)<0$ и функция $f(\nu)$ непрерывна, то искомый корень лежит в интервале $0{,}8<\nu<1{,}5$. Делим отрезок $[0{,}8;\ 1{,}5]$ пополам и вычисляем значение функции в этой точке – $f(1{,}15)=-2{,}98$. Теперь видно, что корень находится на новом суженом отрезке $[1{,}15;\ 1{,}5]$. Этот отрезок опять делится пополам и процесс вычислений повторяют. После нескольких приближений получим $\nu=1{,}3496$, при котором $P_{кр}=1{,}3496^2EJ/\ell^2=1{,}821EJ/\ell^2=0{,}051EJ$.

2. $r_{33}=0$, $r_{22}=0$, $0\leqslant r_{11}\leqslant\infty$ (рис. 2.15).

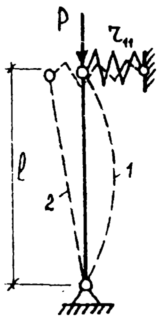


Рис. 2.15

Из (2.27) уравнение устойчивости получается в виде: $tg\,\nu\,(r_{11}\ell^3-\nu^2EJ)=0$.

Оно имеет два решения:

а) $\nu=\pi$ и $P_1=\pi^2EJ/\ell^2$;

б) $\nu^2=r_{11}\ell^3/EJ$ и $P_2=r_{11}\ell$.

Первому решению соответствует потеря устойчивости по синусоиде, а второму – прямолинейное отклонение стержня как абсолютно жесткого. Из вычисленных двух значений, критическая сила будет равна меньшему из этих значений $P_{кр}=min(P_1,\ P_2)$.

Пример. Определить критическую нагрузку для стержня рис. 2.15, если жесткость стержня EJ , а упругой связи – $r_{11}=2EJ/\ell^3$.

Находим два значения силы: $P_1=\pi^2EJ/\ell^2$,

$P_2=r_{11}\ell=2EJ/\ell^2$. $P_{кр}=min(P_1,P_2)=2EJ/\ell^2$.

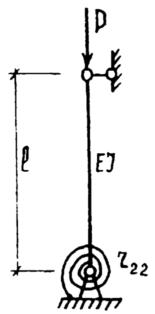


Рис. 2.16

3. $r_{11}=\infty$, $r_{33}=0$, $0\leqslant r_{22}\leqslant\infty$ (рис. 2.16)

Из (2.27) получим: $tg\,\nu=\dfrac{\nu}{1+\nu^2EJ/r_{22}\ell}$.

Для определения интервала нахождения корня рассмотрим два случая, когда $r_{22}=0$ (шарнирно опертый стержень) — $\nu=\pi$, и $r_{22}=\infty$ (стержень с шарнирно опертым и защемленным концами) — $\nu=4{,}493$. Тогда интервал нахождения корня: $\pi\leqslant\nu\leqslant4{,}493$.

4. $r_{22}=\infty$, $r_{33}=0$, $0\leqslant r_{11}\leqslant\infty$ (рис. 2.17).

Уравнение устойчивости $tg\,\nu=\nu-\nu^3\dfrac{EJ}{r_{11}\ell^3}$.

Здесь также рассмотрим два предельных случая:

а) $r_{11}=0$ соответствует $\nu=\pi/2$;

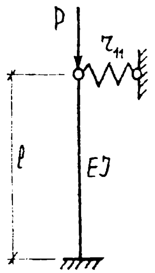


Рис. 2.17

б) $r_{11}=\infty$ соответствует $\nu = 4{,}493$.

Следовательно: $\pi/2 \leqslant \nu \leqslant 4{,}493$.

5. $r_{11}=0$, $r_{22}=\infty$, $0 \leqslant r_{33} \leqslant \infty$ (рис. 2.18)

Из (2.26) получим уравнение устойчивости

$$r_{33}\, l\, tg\, \nu + \nu EJ = 0;$$

а) $r_{33}=0$ соответствует $\nu = \pi/2$;

б) $r_{33}=\infty$ соответствует $\nu = \pi$, и следовательно;

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \nu \leqslant \pi.$$

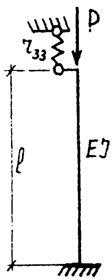


Рис. 2.18

Заметим, что для стоек, рассмотренных в данном параграфе, уравнения устойчивости можно получить, воспользовавшись уравнениями метода начальных параметров [3,7], которые можно представить в матричной форме. Тогда уравнение устойчивости получается из матрицы $R^* = BRД$ путем вычеркивания столбцов, соответствующих известным параметрам в начале стержня, и строк, соответствующих неизвестным параметрам в его конце, с последующим раскрытием определителя из оставшихся элементов и приравниванием его к нулю.

Здесь:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{22} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad Д = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/r_{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{33} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{2.33}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{l \sin\nu}{\nu} & -\dfrac{l^2(1-\cos\nu)}{\nu^2 EJ} & -\dfrac{l^3(\nu - \sin\nu)}{\nu^3 EJ} \\ 0 & \cos\nu & -\dfrac{l\sin\nu}{\nu EJ} & -\dfrac{l^2(1-\cos\nu)}{\nu^2 EJ} \\ 0 & \dfrac{EJ\nu\sin\nu}{l} & \cos\nu & \dfrac{l\sin\nu}{\nu} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.34}$$

Для стойки, показанной на рис. 2.9, в начале участка прогиб $y_0=0$, угол поворота $\theta_0 = \theta_A$ — ?, изгибающий момент $M_0=M_A = r_{22}\,\theta_0$, поперечная сила Q_0 — ?, а в конце $y = Q_B/r_{11}$, θ_B — ?, $M_B = r_{33}\,\theta_B$, Q_B — ?, поэтому необходимо в матрице R^* вычеркнуть первый и третий столбцы, вторую и четвертую строки. После раскрытия определителя и

преобразований получим уравнение устойчивости (2.26).

Жесткости упругих связей могут изменяться в пределах от нуля до бесконечности. Если жесткость какой-то упругой связи принимает любое свое крайнее значение, то соответствующий элемент матриц В или Д становится нулевым. Так, например, для стойки с двумя защемленными концами матрицы В и Д будут единичными. Тогда уравнение устойчивости получится из матрицы R, путем вычеркивания первого и второго столбцов, третьей и четвертой строк. После раскрытия определителя получим уравнение (2.28).

2.4.3 Устойчивость стержней переменного и постоянного сечений, загруженных несколькими силами

Рассмотренные ранее стержни постоянного сечения, исходя из характера продольного изгиба, не являются экономичными. Устойчивость их может быть повышена, если материал частично переместить из одного места стержня в другое. Например, для шарнирно опертого и защемленного с двух концов стержней целесообразно больше материала сосредоточить в середине стойки (рис. 2.19а), а для консольного – переместить материал со свободного конца к защемлению (рис. 2.19б). Наиболее экономичными по расходу материала будут стойки непрерывного переменного сечения, закон распределения материала которых вдоль оси найден с учетом условий оптимальности (рис. 2.19в). На практике встречаются стержни постоянного сечения, у которых продольные силы приложены не только по его торцам, но и в других промежуточных сечениях (рис. 2.19г).

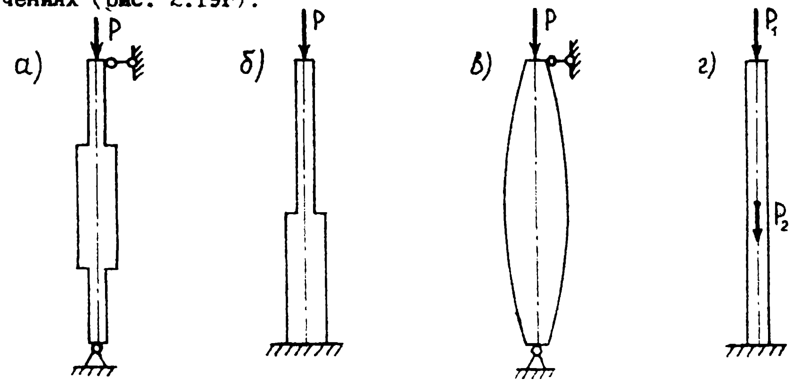


Рис. 2.19

Получение уравнения устойчивости для стержней кусочно-постоянного сечения или же постоянного, но с продольными силами, приложенными по его длине, статическим методом связано с грамоздскими математическими выкладками, поэтому проиллюстрируем применение этого метода на частном примере (рис. 2.20).

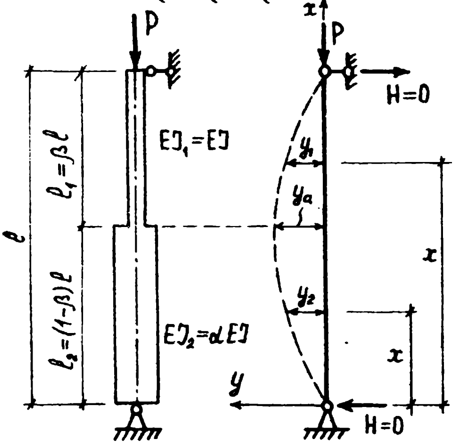


Рис. 2.20

Участок I: $(\ell_2 \leqslant x \leqslant \ell)$

$$EJ_1 y_1'' = -Py_1;\quad y_1'' + n_1^2 y_1 = 0;$$

$$n_1^2 = \frac{P}{EJ_1} = \frac{P}{EJ};\quad \nu_1 = n_1 \ell_1;$$

$$y_1 = A_1\cos n_1 x + B_1 \sin n_1 x.$$

Участок 2: $(0 \leqslant x \leqslant \ell_2)$

$$EJ_2 y_2'' = -Py_2;\quad y_2'' + n_2 y_2 = 0;$$

$$n_2^2 = \frac{P}{EJ_2};\quad \nu_2 = n_2 \ell_2;$$

$$y_2 = A_2\cos n_2 x + B_2 \sin n_2 x.$$

Постоянные интегрирования найдем из граничных условий.

1. $x=0;\ y_2=0;\qquad A_2 + B_2\cdot 0 = 0;$

2. $x=\ell_2;\ y_1=y_2;\ A_1\cos n_1\ell_2 + B_1\sin n_1\ell_2 - A_2\cos n_2\ell_2 - B_2\sin n_2\ell_2 = 0;$

3. $x=\ell_2;\ y_1'=y_2';\ -A_1 n_1\sin n_1\ell_2 + B_1 n_1\cos n_1\ell_2 + A_2 n_2\sin n_2\ell_2 - B_2 n_2\cos n_2\ell_2 = 0;$

4. $x=\ell;\ y_1=0;\qquad A_1\cos n_1\ell + B_1\sin n_1\ell = 0.$

Приравняем определитель из коэффициентов при неизвестных A_1, B_1, A_2, B_2 к нулю (ищется не нулевое решение). После его раскрытия получим: $n_1\sin n_2\ell_2\cos n_1(\ell-\ell_2) + n_2\cos n_2\ell_2\sin n_1(\ell-\ell_2) = 0$.

Так как $\ell_1 = \ell - \ell_2$, то после преобразований получим:

$$\cos\nu_1\cos\nu_2\left[\frac{\operatorname{tg}\nu_1}{\nu_1} + \frac{(1-\beta)}{\beta}\,\frac{\operatorname{tg}\nu_2}{\nu_2}\right] = 0. \tag{2.35}$$

Пример. Определить критическую нагрузку для стержня показанного на рис. 2.20, если $\alpha = 4$, $\beta = 0{,}5$.

При решении уравнения (2.35) нужно рассмотреть несколько случаев: 1) $\cos\nu_2 = 0$ — $\nu_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$; однако такая форма потери устойчивости невозможна, так как в этом случае угол поворота среднего сечения стойки равен нулю, что соответствует симметричной форме потери устойчивости, которая невозможна для несимметричной конструкции. В самом деле: а) при $x = 0$ — $y_2 = A_2 = 0$, $y_2' = B_2 n_2\cos n_2 x$;

б) при $x = \ell_2 = \ell/2$ — $y_2' = B_2 n_2 \cos\frac{\pi}{2} = 0$;

2) $\cos\nu_1 = 0$ — $\nu_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$; так как $y_1'(\ell_2) = y_2'(\ell_2)$,

то при $x = \ell/2$ угол поворота среднего сечения равен нулю, а это невозможно вследствие выше изложенных причин;

3) $\dfrac{tg\,\nu_1}{\nu_1} + \dfrac{tg\,\nu_2}{\nu_2} = 0.$

Найдем зависимость между параметрами ν_1 и ν_2 и перейдем к одной переменной:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\ell_1}{\ell_2}\sqrt{\frac{P\cdot EJ_2}{P\cdot EJ_1}} = \sqrt{\frac{4EJ}{EJ}} = 2; \qquad \nu_1 = 2\nu_2;$$

тогда $$\frac{tg\,2\nu_2}{2\nu_2} + \frac{tg\,\nu_2}{\nu_2} = 0; \qquad \frac{tg\,\nu_2}{1 - tg^2\nu_2} + tg\,\nu_2 = 0;$$

$tg\,\nu_2(2 - tg^2\nu_2) = 0$. Решение $tg\,\nu_2 = 0$ не устраивает, так как в этом случае $\sin\nu_2 = 0$ и при $x = \ell_2 = \ell/2$ $y_2 = B_2\sin\nu_2 = 0$.
В этом случае прогиб стойки посредине пролета равен нулю и происходит кососимметричная форма потери устойчивости, которая невозможна для несимметричных конструкций. Тогда $2 - tg^2\nu_2 = 0$; $tg\,\nu_2 = 1{,}4142$, $\nu_2 = 0{,}9553 = 0{,}30408\,\pi$ и

$$P_{кр} = \frac{\nu_2^2\,EJ_2}{\ell^2} = \frac{1{,}479\,\pi^2 EJ}{\ell^2}.$$

Для стоек, рассматриваемых в данном параграфе, уравнение устойчивости проще получить, если воспользоваться уравнением упругой линии стержня в форме метода начальных параметров. Так, например, для стойки с упругими связями, имеющей s участков кусочно-постоянной жесткости, уравнение устойчивости получится из матрицы

$$R^* = B\cdot R_s\cdot R_{s-1}\ldots R_i\ldots R_2\cdot R_1\cdot Д$$

по правилам, которые изложены в § 2.4.2. Здесь В, Д не что иное, как (2.33), R_s, .. , R_i — матрицы (2.34) последнего и i-го участков. Получим уравнения устойчивости для стержней на рис. 2.21. При **жестких опорах** матрицы В и Д-единичные. Кроме того, для консольных стоек уравнения метода начальных параметров можно упростить, приняв за параметры состояния углы поворота и изгибающие моменты. Тогда для двухступенчатой стойки

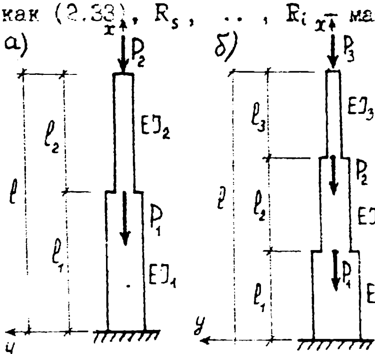


Рис. 2.21

$$R^* = R_2 \cdot R_1 = \begin{bmatrix} \cos\nu_2 & -\dfrac{\ell_2 \sin\nu_2}{\nu_2 EJ_2} \\ \dfrac{EJ_2 \nu_2 \sin\nu_2}{\ell_2} & \cos\nu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\nu_1 & -\dfrac{\ell_1 \sin\nu_1}{\nu_1 EJ_1} \\ \dfrac{EJ_1 \nu_1 \sin\nu_1}{\ell_1} & \cos\nu_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\cos\nu_1 \cos\nu_2 - \dfrac{\nu_1 \ell_2 EJ_1}{\nu_2 \ell_1 EJ_2} \sin\nu_1 \sin\nu_2\right) & \left(-\dfrac{\ell_1 \sin\nu_1 \cos\nu_2}{\nu_1 EJ_1} - \dfrac{\ell_2 \cos\nu_1 \sin\nu_2}{\nu_2 EJ_2}\right) \\ \left(\dfrac{EJ_2 \nu_2}{\ell_2} \cos\nu_1 \sin\nu_2 + \dfrac{EJ_1 \nu_1 \sin\nu_1 \cos\nu_2}{\ell_1}\right) & \left(-\dfrac{\nu_2 \ell_1 EJ_2}{\nu_1 \ell_2 EJ_1} \sin\nu_1 \sin\nu_2 + \cos\nu_1 \cos\nu_2\right) \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что в начале стержня $\theta_0 = 0$, M_0 – ?, а в конце θ_2 – ?, а $M_2 = 0$, вычеркнем в полученной матрице первый столбец и первую строку. Уравнение устойчивости после преобразований получится в виде:

$$\operatorname{tg}\nu_1 \operatorname{tg}\nu_2 = \frac{EJ_1 \nu_1 \ell_2}{EJ_2 \nu_2 \ell_1}. \qquad (2.36)$$

Здесь: $\nu_2 = \ell_2 \sqrt{\dfrac{P_2}{EJ_2}}$; $\nu_1 = \ell_1 \sqrt{\dfrac{P_1 + P_2}{EJ_1}}$.

Для трехступенчатого стержня уравнение устойчивости получается аналогично из матрицы $R^* = R_3 \cdot R_2 \cdot R_1$. Оно имеет вид:

$$1 - \frac{\nu_3 \ell_2 EJ_3}{\nu_2 \ell_3 EJ_2} \operatorname{tg}\nu_2 \operatorname{tg}\nu_3 - \frac{\ell_1}{\nu_1 EJ_1} \operatorname{tg}\nu_1 \left(\frac{EJ_3 \nu_3}{\ell_3} \operatorname{tg}\nu_3 + \frac{EJ_2 \nu_2}{\ell_2} \operatorname{tg}\nu_2\right) = 0.$$

Пример. Определить критическую силу для стойки показанной на рис. 2.21а, если $P_2 = P$, $P_1 = 3P$, $EJ_2 = EJ$, $EJ_1 = 2EJ$, $\ell_1 = \ell_2 = \ell/2$.

Найдем соотношение между критическими параметрами:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \sqrt{\frac{4P \cdot EJ}{P \cdot 2EJ}} = \sqrt{2} = 1{,}4142; \qquad \nu_1 = 1{,}4142\, \nu_2.$$

Уравнение устойчивости (2.36) при заданных исходных данных примет вид:

$$f(\nu) = \operatorname{tg}\nu_2 \operatorname{tg}(1{,}4142\,\nu_2) - 2{,}8284 = 0.$$

Решать данное нелинейное трансцендентное уравнение будем методом Ньютона, согласно которому новое приближение корня равно

$$\nu^{n+1} = \nu^n - f(\nu^n) / f'(\nu^n).$$

Здесь n показывает номер итерации, а

$$f'(\nu^n) = \frac{tg\,(1{,}4142\,\nu_2^n)}{\cos^2(\nu_2^n)} + \frac{1{,}4142\ tg\,\nu_2^n}{\cos^2(1{,}4142\,\nu_2^n)}\ .$$

Пусть первое приближение корня $\nu_2^1 = 0{,}85$. Тогда $\nu_1^1 = 1{,}4142 \cdot \nu_2^1 = 1{,}2021$, $f(\nu_2^1) = 0{,}11768$, $f'(\nu_2^1) = 18{,}33667$, $\nu_2^2 = 0{,}85 - \frac{0{,}11768}{18{,}33667} = 0{,}8436$.

Второе приближение: $\nu_1^2 = 1{,}193$, $f(\nu_2^2) = 0{,}0031$, $f'(\nu_2^2) = 17{,}3811$, $\nu_2^3 = 0{,}8436 - \frac{0{,}0031}{17{,}3811} = 0{,}8434$. На этом процесс итераций заканчиваем:

$$P_2 = P_{кр} = \frac{\nu_2^3\ EJ_2}{\ell_2^2} = \frac{0{,}8434^2\ EJ}{(0{,}5\,\ell)^2} = \frac{2{,}845\,EJ}{\ell^2}\ .$$

2.4.4. Энергетический метод

Выражение полной потенциальной энергии для стержневых систем с бесконечным числом степеней свободы, загруженных продольными сжимающими силами, может быть записано в виде:

$$Э = Э_0 + \Delta U + \Delta T = Э_0 + \frac{1}{2}\int EJ(y'')^2 dx - \frac{1}{2}P_{кр}\int (y')^2 dx\,, \qquad (2.37)$$

где $Э_0$ – энергия, накопленная системой до критического состояния; EJ – закон изменения жесткости стержней.

Условие равенства нулю приращения энергии при потере устойчивости $\Delta U + \Delta T = 0$ (2.37) приводит к формуле С.П.Тимошенко

$$P_{кр} = \frac{\int EJ(y'')^2 dx}{\int (y')^2 dx}\,, \qquad (2.38)$$

для определения критических нагрузок, по которой необходимо знать закон изменения изогнутой линии оси стержня $y = y(x)$, что часто является очень непростой проблемой. При этом, задаваясь какой-то кривой, в большинстве случаев сложно оценить, насколько она близка к действительной и с какой погрешностью определена критическая сила. Поэтому на практике формула (2.38) используется редко.

Указанных выше недостатков удается избежать, если энергетический подход использовать в форме метода Ритца–Тимошенко, согласно которому изогнутая линия оси стержня задается в виде ряда

$$y = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_n f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)\,, \qquad (2.39)$$

где a_i – неизвестные постоянные коэффициенты;

$f_i(x)$ – некоторые функции, которыми следует задаваться так, чтобы выполнялись граничные условия задачи (стержня).

После подстановки (2.39) в (2.37) получим выражение Э=Э(a_i), в которое коэффициенты a_i будут входить в квадрате.

С энергетической точки зрения действительная кривая изогнутого стержня всегда соответствует минимальным затратам энергии при ее реализации, то есть реализуется всегда та форма, которая требует меньших затрат энергии. Поэтому используя энергетический метод и задаваясь различными кривыми, пусть и удовлетворяющими граничным условиям, мы всегда будем получать значения критических нагрузок большими действительных, либо равными им (если угадаем кривую), но никогда не получим меньшего значения. Таким образом, энергетический метод оценивает критические нагрузки сверху.

Учитывая это, Ритц предложил искать форму потери устойчивости из условия минимума энергии

$$\frac{\partial Э}{\partial a_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n). \qquad (2.40)$$

В результате получим n алгебраических однородных уравнений относительно неизвестных a_i. Составляя определитель этой системы уравнений, можно найти критические нагрузки.

Рассмотрим применение метода Ритца-Тимошенко на примере стержня, изображенного на рис. 2.22. Зададимся кривой в виде ряда

$$y = a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + \ldots + a_{n-1}x^n = \sum_{i=1}^{n-1} a_n x^{n+1}.$$

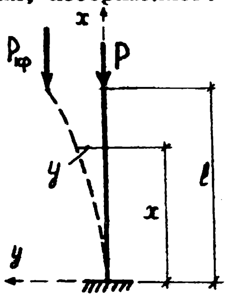


Рис. 2.22

Для простоты дальнейших расчетов здесь возьмем только два слагаемых

$$y = a_1x^2 + a_2x^3.$$

Производные от этого выражения имеют вид

$$y' = 2a_1x + 3a_2x^2; \qquad y'' = 2a_1 + 6a_2x.$$

Подставляя последние выражения в (2.37), получим

$$\frac{EJ}{2}\int_0^l (y'')^2 dx = \frac{EJ}{2}\int_0^l (2a_1 + 6a_2x)^2 dx = 2EJ(a_1^2 l + 3a_1a_2 l^2 + 3a_2^2 l^3);$$

$$\frac{P_{кр}}{2}\int_0^l (y')^2 dx = \frac{P_{кр}}{2}\int_0^l (2a_1x + 3a_2x^2)^2 dx = \frac{P_{кр}}{2}\left(\frac{4}{3}a_1^2 l^3 + 3a_1a_2 l^4 + \frac{9}{5}a_2^2 l^5\right);$$

$$Э = Э_0 + a_1^2\left(2EJl - \frac{2}{3}P_{кр}l^3\right) + a_1a_2\left(6EJl^2 - \frac{3}{2}P_{кр}l^4\right) + a_2^2\left(6EJl^3 - 0{,}9P_{кр}l^5\right).$$

Условие минимума энергии (2.40) приводит к системе двух уравнений:

$$\frac{\partial Э}{\partial a_1} = 0; \qquad 2a_1\left(2EJl - \frac{2}{3}P_{кр}l^3\right) + a_2\left(6EJl^2 - \frac{3}{2}P_{кр}l^4\right) = 0;$$

$$\frac{\partial Э}{\partial a_2} = 0; \qquad a_1\left(6EJl^2 - \frac{3}{2}P_{кр}l^4\right) + 2a_2\left(6EJl^3 - 0{,}9P_{кр}l^5\right) = 0,$$

определитель которой

$$\begin{vmatrix} \left(4EJl - \frac{4}{3}P_{кр}l^3\right) & \left(6EJl^2 - \frac{3}{2}P_{кр}l^4\right) \\ \left(6EJl^2 - \frac{3}{2}P_{кр}l^4\right) & \left(12EJl^3 - 1{,}8P_{кр}l^5\right) \end{vmatrix} = 0$$

приводит к квадратному уравнению

$$0{,}15\,P_{кр}^2 l^4 - 5{,}2\,P_{кр}l^2EJ + 12(EJ)^2 = 0.$$

Решая это уравнение, получим $P_{кр} = 2{,}48\frac{EJ}{l^2}$. Для рассматриваемого стержня известно точное значение $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2} = 2{,}47\frac{EJ}{l^2}$. Расхождение результатов составляет $\approx 0{,}4\%$. Таким образом, как видно из этого примера, в ряде случаев при использовании метода Ритца-Тимошенко достаточно взять даже два слагаемых, чтобы получить хороший результат.

С другой стороны, метод Ритца-Тимошенко позволяет оценивать точность результата путем оценки степени сходимости критической нагрузки с увеличением числа членов ряда (2.39).

Глава 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКИХ РАМ И АРОК.

3.1. Общие замечания по расчету на устойчивость рам.

При рассмотрении задач устойчивости плоских рам, так же как и для отдельных стержней, условно различаются два типа задач: потеря устойчивости первого рода (потеря устойчивости по Эйлеру) и потеря устойчивости второго рода (потеря устойчивости при сжато-изогнутом деформировании элементов с начального момента загружения). В пособии рассмотрена лишь задача потери устойчивости первого рода.

При этом приняты следующие допущения:

- рассматривается только узловая нагрузка, не вызывающая поперечного изгиба стержней;
- соотношение между узловыми нагрузками P_1, P_2, P_3, ... принимается заданным и неизменным с ростом нагрузок;
- стержни принимаются идеально прямыми, нерастяжимыми и несжимаемыми, то есть не учитываются их продольные деформации;
- проекция изогнутого стержня на первоначальное направление принимается равной первоначальной длине стержня;
- все перемещения рамы при потере устойчивости принимаются величинами весьма малыми по сравнению с размерами элементов;
- поперечные и продольные силы определяются по недеформированной схеме системы, то есть не учитывается их изменение в момент потери устойчивости;
- учитывается влияние продольных сил на изгибающие моменты и поперечные силы в сечениях элементов.

Такой подход, естественно, является приближенным. Даже при идеально прямолинейных стержнях и строго узловых нагрузках элементы изгибаются за счет укорочения стержней и действия их собственной массы. Однако этот подход широко применяется, в связи с его относительной простотой, и не только для рам с узловой нагрузкой, но и при неузловой нагрузке. В последнем случае соотношения сжимающих сил во всех элементах определяются исходя из обычного статического расчета рамы одним из известных методов строительной механики. Затем при этом соотношении узловых нагрузок может быть осуществлен расчет рамы на устойчивость с позиций задачи устойчивости первого рода. При этом результаты расчета могут оказаться грубо приближенными и реальные критические силы будут меньше найденных.

Так как соотношение узловых нагрузок P_1, P_2, P_3, ... принимается неизменным, то все они могут быть выражены через один параметр P, критическое значение которого ($P_{кр}$) и следует определять.

Рассмотрим раму, изображенную на рис. 3.Iа. Она загружена узловой нагрузкой, центрально приложенной к стойке. Необходимо определить $P_{кр}$. К решению задачи можно подойти с позиции расчета на устойчивость прямолинейного стержня с упруго закрепленным верхним концом (с упругим поворотом и упругим линейным смещением).

Принципиально задача ясна, практически же трудно осуществима из-за сложности определения жесткости упругого закрепления. Эта трудность особенно ощутима при расчете сложной рамы (рис. 3.Iб), а также при наличии нескольких сил (рис. 3.I.в). В таких случаях более рациональным оказывается расчет на устойчивость рамы в целом.

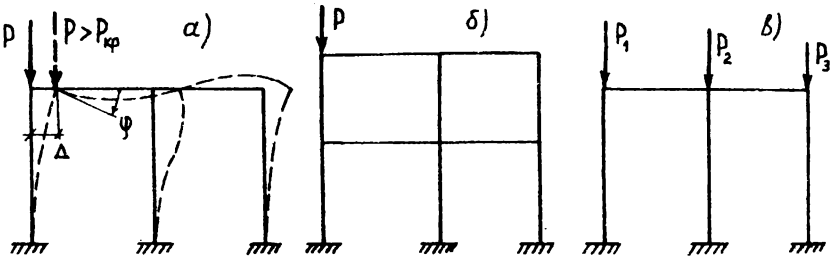


Рис. 3.I

При расчете рам на устойчивость статическим методом применяются те же методы, что и при статическом расчете на прочность: метод перемещений, метод сил, смешанный метод. Однако эти методы видоизменяются. Видоизменение их обусловлено тем, что при расчете на устойчивость нет необходимости определять неизвестные усилия либо перемещения, а требуется отыскать критическое значение нагрузки ($P_{кр}$), при которой происходит бифуркация равновесных форм деформированного состояния и появление качественно новой формы деформаций (изгибных деформаций). В процессе расчета учитывается влияние на изгибные деформации сжатых элементов продольных сил, то есть в определенной степени расчет осуществляется с учетом деформированного состояния системы.

Среди всех методов статического расчета на прочность применительно к задачам устойчивости наиболее эффективным во многих случаях оказывается метод перемещений, как наиболее простой и удобный для использования ЭВМ.

3.2. Расчет рам на устойчивость методом перемещений

Предположим имеется рама (рис. 3.2.а), загруженная в узле центрально приложенной к стойке силой P. Требуется определить $P_{кр}$.

За основные неизвестные принимаются те же факторы, что и при расчете на прочность: независимые угловые перемещения жестких узлов и линейные перемещения жестких и шарнирных узлов рамы. В данном случае неизвестными являются Z_1 и Z_2 – угловые перемещения жестких узлов. Аналогично выбирается и основная система-путем постановки связей, препятствующих перемещениям узлов (рис. 3.2б). Далее строятся эпюры от единичных перемещений узлов (единичные эпюры) (рис. 3.2в и 3.2.г). Особенностью построения эпюр является то, что в стержнях, сжатых центрально приложенной силой, учитывается влияние продольной силы на изгибные деформации стержней и эпюры в этих стержнях носят не прямолинейный, а криволинейный характер.

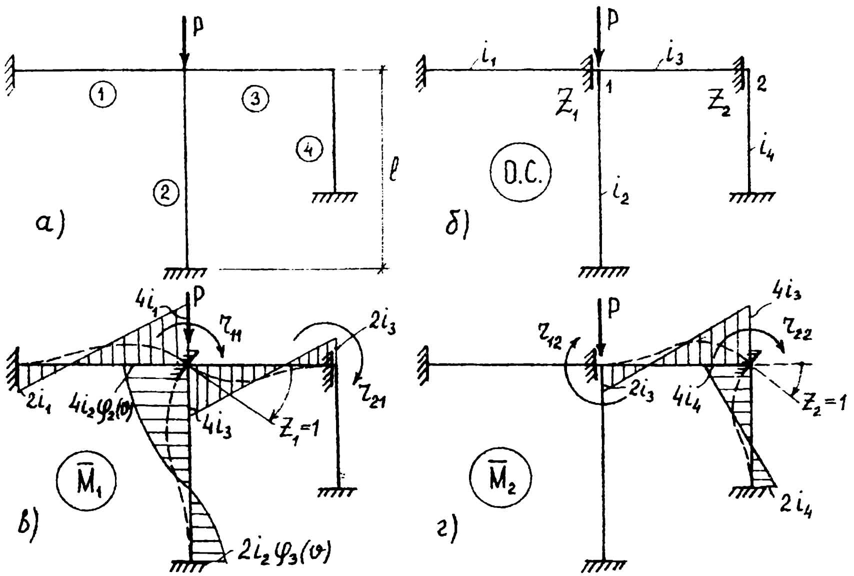


Рис. 3.2

Из условий равновесия узлов в основной системе имеем:

$$r_{11} = 4i_1 + 4i_3 + 4i_2\varphi_2(\vartheta); \qquad r_{12} = r_{21} = 2i_3; \qquad r_{22} = 4i_3 + 4i_4.$$

В этих выражениях: i – погонная жесткость стержня, $\varphi_2(\vartheta)$ – поправочный коэффициент, учитывающий влияние продольной силы на величину изгибающего момента в центрально сжатой стойке при повороте узла на единичный угол. В данном случае поправочный коэффициент (множитель) имеет вид:

$$\varphi_2(\vartheta) = \frac{\vartheta(tg\,\vartheta - \vartheta)}{8\,tg\,\vartheta\left(tg\frac{\vartheta}{2} - \frac{\vartheta}{2}\right)}, \tag{3.1}$$

где $\vartheta = \ell\sqrt{\frac{P}{EJ}}$ — параметр критической нагрузки, по значению которого определяется

$$P_{кр} = \frac{\vartheta^2 EJ}{\ell^2}. \tag{3.2}$$

В рассматриваемом примере канонические уравнения метода перемещений имеют вид:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 = 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Их особенностью является отсутствие свободных членов, что соответсттвует узловому приложению нагрузки и, следовательно, отсутствию грузовой эпюры моментов. При ненулевом (нетривиальном) решении относительно Z, что имеет место в момент потери устойчивости, определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, должен равняться нулю, т.е.

$$R = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.4)$$

Раскрывая условие (3.3) получаем:

$$\left[4i_1 + 4i_3 + 4i_2\varphi_2(\vartheta)\right]\left(4i_3 + 4i_4\right) - \left(2i_3\right)^2 = 0. \qquad (3.4')$$

Это и есть уравнение устойчивости, из решения которого находится наименьшее значение ϑ, лежащее в пределах $(0 \div 2\pi)$, а затем по (3.2) $P_{кр}$. При $\vartheta=0$ $\varphi_2(\vartheta)=1{,}0$, а при $\vartheta=2\pi$ происходит первый разрыв этой функции.

Обобщая сказанное на общий случай расчета рамы на устойчивость (при "n" неизвестных) методом перемещений, приходим к следующему (нераскрытому) виду уравнения устойчивости

$$R = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.5)$$

Раскрытие определителя (3.5) осуществляется известными приемами линейной алгебры. В условии (3.5) часть коэффициентов канонических уравнений будет иметь вид чисел, вторая часть (минимум один коэффициент) будет содержать поправочные множители, учитывающие влияние продольных сил. Поправочные множители в виде трансцендентных фукций параметра ϑ будут при моментах и поперечных силах в центрально сжатых стержнях. Всего имеется шесть таких функций (выражение функции $\varphi_2(\vartheta)$ записано ранее (3.1)):

$$\varphi_1(\vartheta) = \frac{\vartheta^2 \operatorname{tg}\vartheta}{3(\operatorname{tg}\vartheta - \vartheta)}; \qquad \varphi_3(\vartheta) = \frac{\vartheta(\vartheta - \sin\vartheta)}{4\sin\vartheta\left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} - \frac{\vartheta}{2}\right)};$$

$$\varphi_4(\vartheta) = \varphi_1\left(\frac{\vartheta}{2}\right); \qquad \eta_1(\vartheta) = \frac{\vartheta^3}{3(\operatorname{tg}\vartheta - \vartheta)}; \qquad \eta_2(\vartheta) = \eta_1\left(\frac{\vartheta}{2}\right). \qquad (3.6)$$

Коэффициенты r_{ik}, содержащие поправочные множители (3.1), (3.6) определяются исходя из заранее полученных, например, методом начальных параметров, решений, приведенных в таблице (3.1).

В получаемое уравнение устойчивости в зависимости от конкретных данных может войти один или несколько поправочных множителей. В частном случае, когда в уравнение устойчивости войдет только один поправочный множитель, оно будет линейным относительно этого множителя (см. например уравнение (3.4)), который в этом случае легко определяется из решения уравнения и по значению которого затем по табл. I Приложения несложно найти соответствующее этому решению значение критического параметра ϑ , а по (3.2) – величину $P_{кр}$. В более сложных случаях, когда в уравнение устойчивости входит несколько поправочных функций (3.I), (3.6), уравнение устойчивости будет нелинейным и решить его можно либо с использованием специальных методов решения нелинейных уравнений, либо способом подбора: задаются значением параметра ϑ , по таблице I Приложения находят соответствующие значения функций (3.I), (3.6), которые подставляются в уравнение устойчивости, после чего проверяется равенство нулю его левой части. Решение уравнений устойчивости удобно выполнять по специальным программам с помощью ЭВМ. Подробнее все особенности решения уравнений устойчивости обсуждаются в следующем параграфе.

Пример. Для заданной рамы (рис. 3.3) требуется определить значение критической нагрузки.

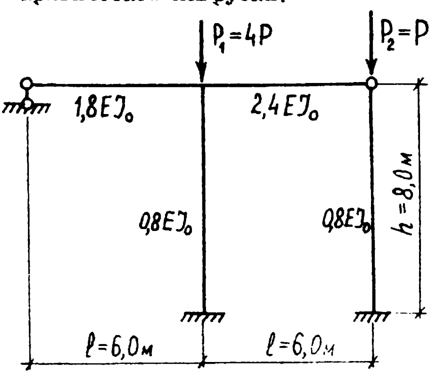


Рис. 3.3

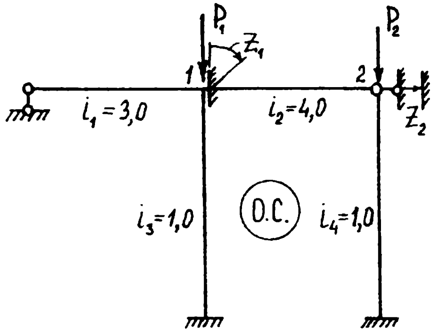
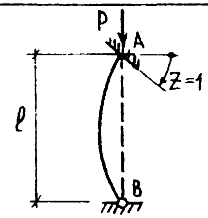
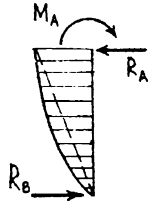
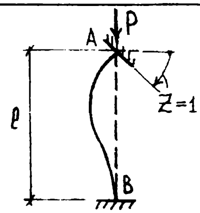
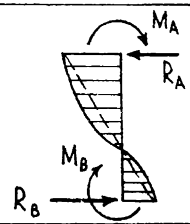
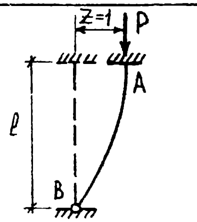
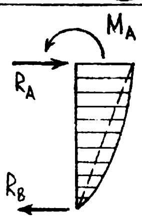
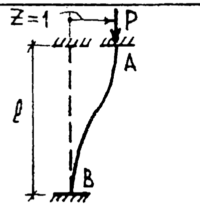
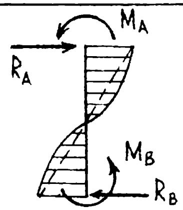
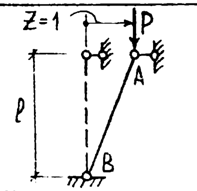
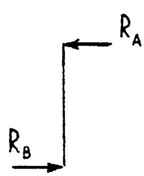


Рис. 3.4

Решение. Определяем степень кинематической неопределимости: $n = n_y + n_л = 1+1=2$ (неизвестные угол поворота жесткого узла и линейное перемещение ригеля). Основная система приведена на рис. 3.4. При значении $EJ_0 = 10$ величины погонных жесткостей ($i = EJ/\ell$) приведены на основной системе (рис. 3.4). Так как внешняя нагрузка узловая, то эпюры моментов в основной системе от нее не будет, свободные члены канонических уравнений равны нулю и последние принимают вид:

Таблица 3.I.

Таблица реактивных моментов и сил
в сжатых стержнях от единичных смещений узлов

№№ п/п	Схемы стержней	Реактивные моменты и силы	Формулы по определению реактивных моментов и сил
1.			$M_A = 3i\varphi_1(\upsilon)$, $M_B = 0$, $R_A = R_B = \frac{3i}{\ell}\varphi_1(\upsilon)$.
2.			$M_A = 4i\varphi_2(\upsilon)$, $M_B = 2i\varphi_3(\upsilon)$, $R_A = R_B = \frac{6i}{\ell}\varphi_4(\upsilon)$.
3.			$M_A = \frac{3i}{\ell}\varphi_1(\upsilon)$, $M_B = 0$, $R_A = R_B = \frac{3i}{\ell^2}\eta_1(\upsilon)$.
4.			$M_A = M_B = \frac{6i}{\ell}\varphi_4(\upsilon)$, $R_A = R_B = \frac{12i}{\ell^2}\eta_2(\upsilon)$.
5.			$R_A = \frac{i}{\ell^2}\upsilon^2$, $R_B = \frac{i}{\ell^2}\upsilon^2$.

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 = 0. \end{cases}$$

Для определения коэффициентов r_{11}, r_{22}, $r_{12}=r_{21}$ используем единичные эпюры в основной системе (эпюры от единичных значений неизвестных). Единичные эпюры, построенные с учетом указанных ранее замечаний, приведены на рис. 3.5.

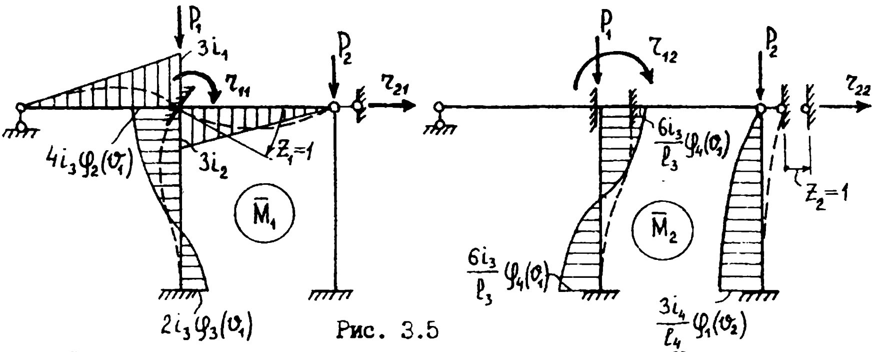


Рис. 3.5

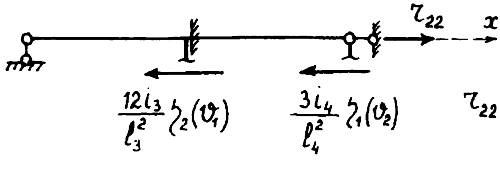
Вычисляем реактивные усилия во введенных связях. Из условия равновесия моментов во введенной связи I по эпюре $\bar{M}_1$ получаем:

$$r_{11} = 3i_1 + 3i_2 + 4i_3\varphi_2(v_1) = 21 + 4\varphi_2(v_1).$$

Из такого же условия по эпюре $\bar{M}_2$ имеем:

$$r_{12} = r_{21} = -\frac{6i_3}{l_3}\varphi_4(v_1) = -\frac{3}{4}\varphi_4(v_1).$$

Из условия равновесия ($\Sigma X=0$) отсеченного от стоек ригеля по эпюре $\bar{M}_2$ с учетом действующих в сечениях поперечных сил получим:



$$r_{22} = \frac{12i_3}{l_3^2}\eta_2(v_1) + \frac{3i_4}{l_4^2}\eta_1(v_2) = \frac{3}{16}\eta_2(v_1) + \frac{3}{64}\eta_1(v_2).$$

Параметры

$$v_1 = l_1\sqrt{\frac{P_1}{EJ_1}} = h\sqrt{\frac{4P}{0{,}8EJ_0}} = 2{,}0\,h\sqrt{\frac{P}{0{,}8EJ_0}};$$

$$v_2 = l_2\sqrt{\frac{P_2}{EJ_2}} = h\sqrt{\frac{P}{0{,}8EJ_0}}.$$

находятся между собой в соотношении:

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} = 2, \qquad \text{откуда} \qquad \vartheta_1 = 2\vartheta_2 .$$

С учетом этого коэффициенты канонических уравнений равны

$$r_{11} = 21 + 4\,\varphi_2(2\vartheta_2); \qquad r_{12} = r_{21} = -\frac{3}{4}\,\varphi_4(2\vartheta_2);$$

$$r_{22} = \frac{3}{16}\,\eta_2(2\vartheta_2) + \frac{3}{64}\,\eta_1(\vartheta_2),$$

а условие (3,5) принимает вид

$$R(\vartheta) = \begin{vmatrix} 21 + 4\varphi_2(2\vartheta_2) & -0,75\,\varphi_4(2\vartheta_2) \\ -0,75\varphi_4(2\vartheta_2) & 0,1875\,\eta_2(2\vartheta_2) + 0,04687\,\eta_1(\vartheta_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая его получаем уравнение устойчивости в виде:

$$3,937\eta_2(2\vartheta_2) + 0,9843\,\eta_1(\vartheta_2) + 0,750\,\varphi_2(2\vartheta_2)\cdot\eta_2(2\vartheta_2) + \qquad (3.7)$$
$$+ 0,1875\varphi_2(2\vartheta_2)\cdot\eta_1(\vartheta_2) - 0,5625\,\varphi_4^2(2\vartheta_2) = 0.$$

Путем подбора находится значение ϑ_2, при котором его левая часть обращается в нуль с определенной погрешностью. При этом воспользуемся таблицей значений функций $\varphi(\vartheta)$ и $\eta(\vartheta)$, приведенной в приложении (табл. I). Опуская весь процесс подбора, приведем два ближайших по таблице значения ϑ_2, между которыми находится точное решение уравнения устойчивости.

При $\vartheta_2 = 1,51$ уравнение устойчивости (3.7) приводит к результату $0,4256 - 0,341 = -0,0315 \neq 0$, погрешность решения уравнения составляет $\frac{0,0315\cdot 100\%}{0,3941} = 7,99\ \%$

При $\vartheta_2 = 1,52$ получаем $0,3565 - 0,3918 = -0,353 \neq 0$, погрешность $\frac{0,0353\cdot 100\%}{0,3565} = 9,90\ \%$

Функция $R(\vartheta)$ (3.7) между этими значениями поменяла знак. Построив график, представленный на рис. 3.6,

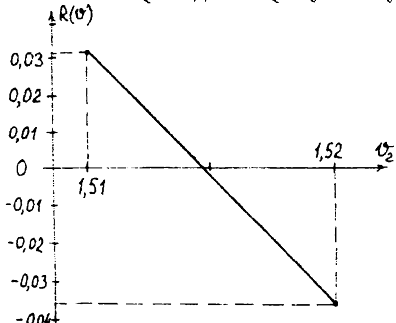


Рис. 3.6

с некоторой погрешностью можно предположить, что решением рассматриваемого уравнения (3.7) будет $\vartheta_2 = 1,515$, для которого получим $0,3903 - 0,3929 = -0,0026$, погрешность $\frac{0,0026\cdot 100\%}{0,3913} = 0,66\ \%$,

где значение функции η_1 при $\vartheta_2 = 1,515$ определяется путем интерполирования ($\eta_1(1,515) = 0,0707$). Найденное значение параметра ϑ_2 и принимаем окончательно в качестве критического – $\vartheta_{2кр} = 1,515$; ему соответствует – $\vartheta_{1кр} = 3,03$. Тогда значения критических сил, действующих в узлах рамы, равны

$$P_{1кр} = \frac{\vartheta_{1кр}^2 \cdot 0,8 \cdot EJ_o}{h^2} = \frac{3,03^2 \cdot 0,8 \cdot EJ_o}{8^2} = 0,1148\ EJ_o;$$

$$P_{2кр} = \frac{\vartheta_{2кр}^2 \cdot 0,8 \cdot EJ_o}{h^2} = \frac{1,515^2 \cdot 0,8\ EJ_o}{8^2} = 0,0287\ EJ_o; \qquad \frac{P_{1кр}}{P_{2кр}} = 4$$

3.3. О решении уравнений устойчивости в расчетах рам на устойчивость методом перемещений

Анализ выражений $R(\vartheta)$, входящих в уравнения устойчивости (3.5), показывает, что $R(\vartheta)$ даже в простых системах чаще всего является сложной функцией, имеющей на участке от 0 до 2π не одно нулевое значение, то есть уравнение $R(\vartheta) = 0$ имеет на этом участке несколько решений. Например, для системы на рис. 3.3, рассчитанной выше, функция $R(\vartheta)$ имеет вид, представленный на рис. 3.7, из которого видно, что в пределах изменения ϑ_2 от 0 до 2π, эта функция имеет пять нулевых значений. Мы же при решении уравнений устойчивости должны найти минимальное критическое значение параметра устойчивости.

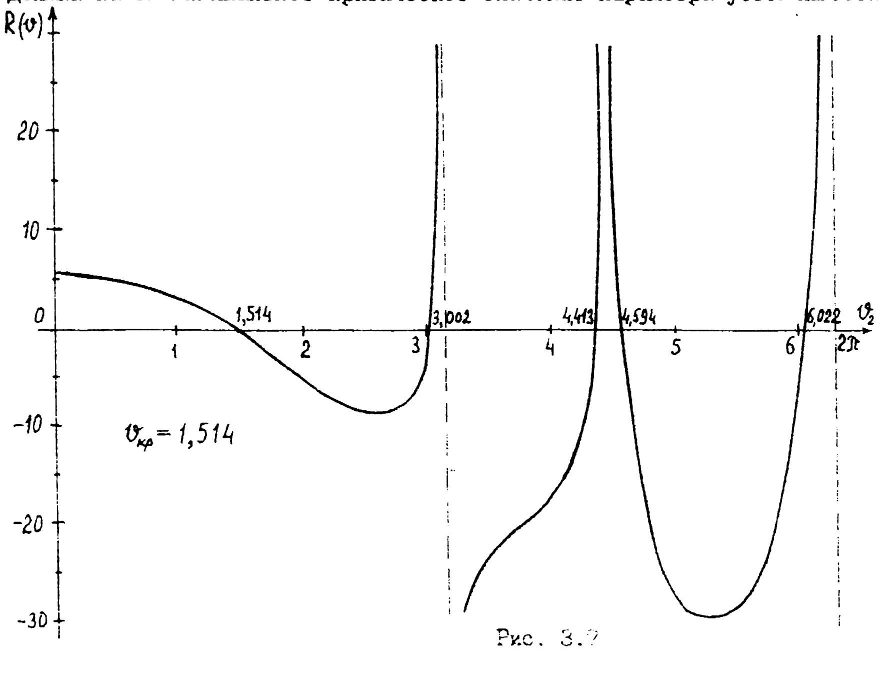


Рис. 3.7

С другой стороны уравнение устойчивости $R(\vartheta) = 0$ (3.5) в большинстве случаев зависит от нескольких параметров устойчивости ϑ_i $(i = 1 \dots n_\vartheta)$, каждый из которых характеризует в заданной системе (раме) определенный (i -тый) сжатый стержень $\left(\vartheta_i = \ell_i \sqrt{N_i / EJ_i}\right)$ и которые соотносятся между собой с помощью постоянных для заданной системы коэффициентов, определяемых выражением:

$$k_{ij} = \frac{\vartheta_i}{\vartheta_j} = \frac{\ell_i}{\ell_j} \sqrt{\frac{N_i}{N_j} \frac{EJ_j}{EJ_i}} \,. \qquad (3.8)$$

Поэтому при решении уравнений устойчивости (3.5) обычно задаются одним из параметров ϑ_i (базовым), который обозначим через ϑ (без индекса) и через который выражаются все остальные параметры устойчивости:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_i} = k_i \; ; \qquad \vartheta_i = \frac{\vartheta}{k_i} \,. \qquad (3.9)$$

Область задания параметров ϑ_i при подборе их критических значений находится в пределах максимального периода для всех из функций (3.6), то есть в пределах от 0 до 2π. Поэтому в качестве базового параметра ϑ целесообразно принимать наибольший из всех ϑ_i, то есть $\vartheta = max(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n\vartheta})$. В этом случае все k_i будут не меньше единицы ($k_i \geq 1$) и ни один из параметров ϑ_i при подборе также не выйдет за пределы 2π.

Учитывая сложный характер функций $R(\vartheta)$ и наличие на участке от 0 до 2π нескольких решений, при подборе критических параметров устойчивости вручную имеет смысл сузить область задания базового параметра ϑ, для чего необходимо выяснить, в каких пределах он может изменяться в заданной конкретной системе. Это можно сделать на основе предельного анализа каждого из сжатых стержней и учета влияния этих стержней друг на друга исходя из их совместной работы в системе.

Предельный анализ сжатых стержней выполняется следующим образом. Анализируются условия закрепления концов стержня с учетом того, что связи по концам с изменением жесткостей примыкающих стержней в ту или другую сторону могут в пределе быть либо абсолютно жесткими, либо очень слабыми – в пределе отсутствовать вообще. На основе этого анализа для каждого из стержней можно получить два их предельных варианта, один из которых будет отвечать исчезновению упругих связей и соответственно минимальному значению параметра устойчивости, а второй превращению упругих связей в абсолютно жесткие и соответственно максимальному значению параметра устойчивости. Все возможные варианты, которые можно при этом получить описываются схемами стержней, приведенными в табл. 2.I, где для них приведены и соответствующие значения параметра ϑ $\left(\vartheta = \frac{\pi}{\mu}\right)$.

Таким образом получим возможные пределы изменения параметра для каждого из стержней

$$\vartheta_{i\,min} < \vartheta_i = \frac{\vartheta}{k_i} < \vartheta_{i\,max}\,.$$

Умножив все части этого выражения на k_i получим возможные пределы изменения базового параметра через характеристики каждого из стержней

$$k_i \cdot \vartheta_{i\,min} < \vartheta < k_i \cdot \vartheta_{i\,max} \qquad (i = 1 \ldots n_\sigma).$$

Учитывая совместную работу всех стержней в рамках заданной системы с учетом их взаимного воздействия друг на друга, получим условие для определения пределов изменения базового параметра ϑ для всей рассматриваемой системы в виде:

$$\min\left(k_1\vartheta_{1min}, k_2\vartheta_{2min}, \ldots, k_{n\sigma}\vartheta_{n\sigma min}\right) < \vartheta < \max\left(k_1\vartheta_{1max}, k_2\vartheta_{2max}, \ldots, k_{n\sigma}\vartheta_{n\sigma max}\right). \qquad (3.10)$$

Для примера на рис. 3.3 предельные состояния сжатых стоек при изменении жесткостей примыкающих ригелей и значения пределов изменения параметров устойчивости для этих стоек представлены ниже:

а) левая стойка: б) правая стойка:

$\frac{\pi}{2} < \vartheta_1 = 2\vartheta_2 < 2\pi$ или $\frac{\pi}{4} < \vartheta_2 < \pi$; $\qquad \frac{\pi}{2} < \vartheta_2 < 4{,}49$.

С учетом соотношения между этими параметрами $\vartheta_1 = 2 \cdot \vartheta_2$ получаем пределы изменения задаваемого (базового) параметра для всей системы, представленной на рис. 3.3.

$\min(0{,}785;\ 1{,}571) < \vartheta_2 < \max(3{,}142;\ 4{,}49)$ или $0{,}785 < \vartheta_2 < 4{,}49$.

Во избежание ошибок при ручном подборе рекомендуется также начинать подбор с нижней границы, определенной по условию (3.10), и с небольшим шагом $\Delta\vartheta$ (равным, например, 0,1 или 0,2) двигаться в сторону увеличения параметра ϑ до тех пор, пока функция $R(\vartheta)$ не поменяет знак, что будет указывать на наличие на этом участке нулевого значения функции, то есть решения уравнения $R(\vartheta) = 0$. Затем, постепенно сужая этот участок, находят искомое решение с заданной степенью точности.

Решение уравнения устойчивости вида (3.5), являющегося нелинейным трансцедентным уравнением, представляет собой, как видно, довольно трудоемкую с вычислительной точки зрения задачу. Поэтому для решения таких уравнений целесообразно применение ЭВМ, позволяющее уменьшить трудоемкость процесса.

На кафедре строительной механики Брестского политехнического института для решения рассматриваемых уравнений составлена учебная программа PARUST, реализующая решение методом деления отрезка пополам [10]. Программа, реализованная на языке Фортран, позволяет решать уравнения устойчивости (3.5) до третьего порядка ($n \leqslant 3$) с любым числом параметров устойчивости и требует ввода следующей исходной информации:

1) n , n_ϑ - степень кинематической неопределимости рамы ($n \leqslant 3$) и число параметров устойчивости;

2) k_{r_j} (j =1,...n^2) - число слагаемых в каждом из коэффициентов r_{ik} (i =1,...n; k =1,...n);

3) последовательно для каждого из коэффициентов r_{ik} (i =1,...n; k =1,...n) вводятся массивы, описывающие слагаемые этих коэффициентов; при этом каждое из слагаемых описывается тремя параметрами:

- постоянный коэффициент с учетом знака перед слагаемым;
- признак функции, принимаемый согласно обозначениям:

$\varphi_1(\vartheta) \dashrightarrow 1$; $\varphi_3(\vartheta) \dashrightarrow 3$; $\eta_1(\vartheta) \dashrightarrow 5$; $\vartheta^2 \dashrightarrow 7$;

$\varphi_2(\vartheta) \dashrightarrow 2$; $\varphi_4(\vartheta) \dashrightarrow 4$; $\eta_2(\vartheta) \dashrightarrow 6$; $\vartheta tg\vartheta \dashrightarrow 8$;

- номер параметра устойчивости ϑ_i (i =1,...k_ϑ);

Заметим, что если слагаемое в выражении r_{ik} является постоянной величиной (не содержит ф-ций $\varphi_1(\vartheta)$ и т.д.), то признак функции и номер параметра устойчивости вводятся равными нулю.

Например, для коэффициента r_{ik} , имеющего вид: $r_{ik} = 4,1\cdot\varphi_1(\vartheta_1) - 0,2\cdot\varphi_2(\vartheta_2) + 4,53$, необходимо ввести следующий массив данных (k_{r_j}=3):

$$\begin{cases} 4.1,\ 1,\ 1; \\ -0.2,\ 2,\ 2; \\ 4.53,\ 0,\ 0; \end{cases}$$

4) k_i^* (i =1,...n_ϑ) - значения коэффициентов, связующих параметры устойчивости ϑ_i с основным параметром ϑ по формуле $k_i^* = \frac{\vartheta_i}{\vartheta}$, где в качестве основного параметра устойчивости ϑ принимается один из ϑ_i (при этом для параметра ϑ_i , принятого за основной, будет k_i^* =1).

После ввода исходных данных программа PARUST выполняет решение уравнения (3.5) и выдает его результаты на дисплей и печать.

Для примера рамы, представленной на рис. 3.3, распечатка результатов имеет вид, представленный на стр. 46.

3.4. Использование симметрии при расчете рам на устойчивость

Прием использования симметрии при расчете рам на устойчивость имеет некоторые особенности в отличие от их статического расчета на прочность. Так в данном случае нельзя воспользоваться способом преобразования нагрузки, так как в теории устойчивости неприемлим принцип независимости действия сил.

Распечатка результатов расчета по программе PARUST:

```
******************************************************************
БрПИ                  КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ
   ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ УСТОЙЧИВОСТИ
ПУТЕМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ
******************************************************************
   ВЫПОЛНИЛ        ПЕТРОВ К.Н.        П-248-4
==================================================================
   ВЫРАЖЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ИХ
   ЗНАЧЕНИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАМЫ
------------------------------------------------------------------
R(I,I) =     +(    2I.0000) *          ( V0)
             +(     4.0000) *     FI2  ( VI)        = 23.59270
------------------------------------------------------------------
R(I,2) =     +(  - 0.7500) *     FI4  ( VI)        = -0.6269044
------------------------------------------------------------------
R(2,2) =     +(     0.I875) *   ETA2  ( VI)
             +(     0.0469) *   ETA1  ( V2)        =   0.I666717E-0I
------------------------------------------------------------------
              КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИ ПАРАМЕТРАХ УСТОЙЧИВОСТИ
 KV(I) = 2.0000          KV(2) = I.0000          KV(
   ПАРАМЕТРЫ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАМЫ:
  VI = 3.02937           V2 = I.5I469
==================================================================
```

В то же время в теории устойчивости строго доказывается, что симметричная система при симметричной нагрузке имеет две формы потери устойчивости: симметричную и кососимметричную. Заранее предсказать какой форме потери устойчивости будет соответствовать минимальная критическая сила в большинстве случаев невозможно. В связи с этим расчет на устойчивость следует выполнить дважды: с учетом симметричной формы потери устойчивости и кососимметричной. За расчетную критическую силу принимается меньшая из двух критических сил. В целом с использованием этого приема расчет упрощается.

Проиллюстрируем сказанное на примере. Рассмотрим симметричную раму, загруженную симметричной нагрузкой (рис. 3.8).

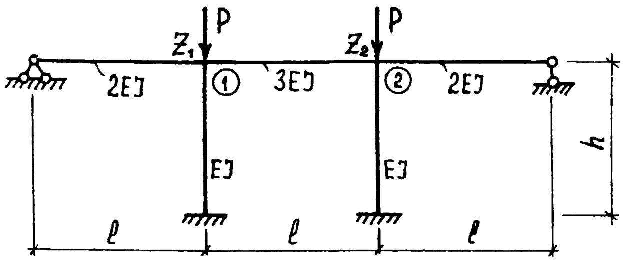


Рис. 3.8

При расчете этой рамы на устойчивость без учета симметрии, в связи с тем, что она имеет два неизвестных угла поворота жестких узлов Z_1 и Z_2, придется раскрывать определитель второго порядка:

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Если же учесть полную симметрию, то можно рассмотреть две формы потери устойчивости: симметричную и кососимметричную. Симметричная форма потери устойчивости изображена на рис. 3.9а, а кососимметричная - на рис. 3.9б.

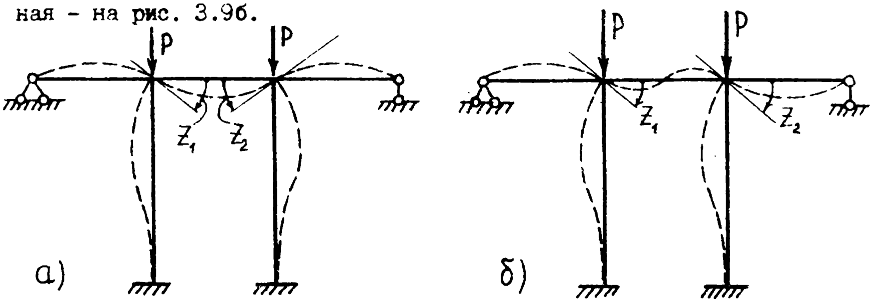


Рис. 3.9

При применении для расчета рамы метода перемещений очевидными являются соотношения: для случая а) $Z_1 = -Z_2$ и для случая б) $Z_1 = Z_2$. Далее использование симметрии можно осуществить двумя путями: путем подстановки в канонические уравнения соотношений $Z_1 = \pm Z_2$ или путем применения групповых неизвестных.

3.5. Приближенный метод расчета на устойчивость многопролетных несвободных рам.

Метод применим для приближенного расчета на устойчивость рам эстакадного или путепроводного типа, ригель которых не имеет горизонтальных смещений.(рис. 3.10).

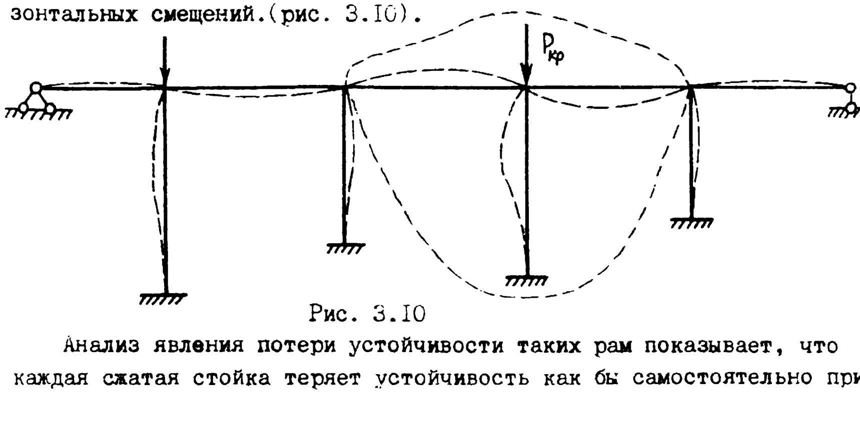


Рис. 3.10

Анализ явления потери устойчивости таких рам показывает, что каждая сжатая стойка теряет устойчивость как бы самостоятельно при упругом защемлении верхнего конца. При этом на критическую силу конкретной стойки мало влияет соотношения жесткостей стоек и узловых нагрузок, и основное влияние оказывают изгибные жесткости примыкающих к узлу стойки ригелей, создающих условия упругого защемления.

С учетом сказанного суть метода состоит в том, что исходная рама расчленяется на столько Т-образных рам, сколько имеется сжатых стоек. По концам ригелей (в смежных узлах по отношению к загруженному) принимаются шарнирные опоры, одна из которых - шарнирно неподвижная.

Далее каждая Т-образная рама рассчитывается одним из известных методов (например, методом перемещений) на устойчивость и определяются критические значения сил для каждой загруженной стойки. Для рамы в целом за критическую силу принимается минимальная из полученных. Точность метода лежит в пределах 3-8%, получаемые критические нагрузки - ниже получаемых по классическим методам..

Проиллюстрируем сказанное на примере рамы, изображенной на рис. 3.11.

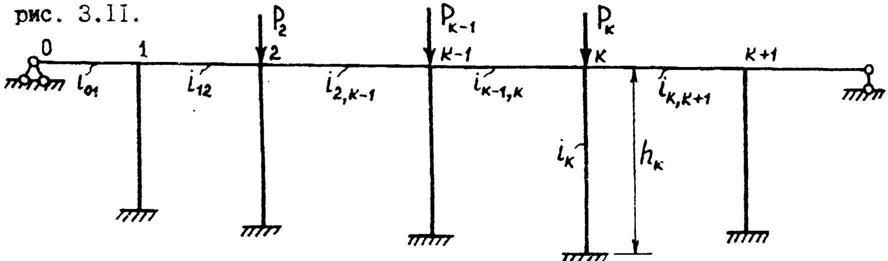


Рис. 3.11

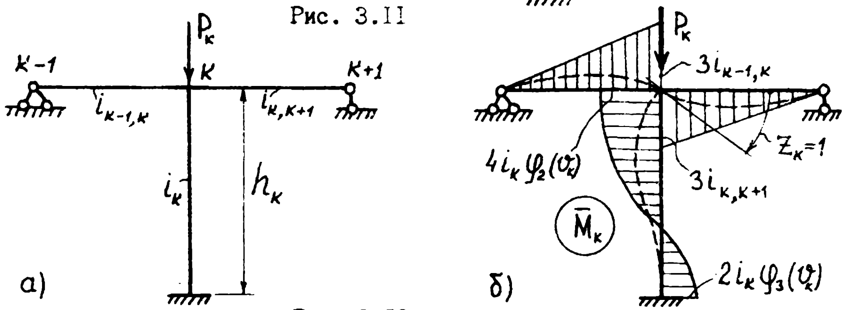


Рис. 3.12

Расчленяем раму на столько Т-образных, сколько имеется узловых нагрузок. Расчетная схема каждой из них соответствует схеме, изображенной на рис. 3.12а. Расчет осуществляем методом перемещений. Т-образная рама имеет одно неизвестное - угол поворота узла К Эпюра моментов от Z_k = 1 изображена на рис. 3.12б. Каноническое уравнение метода перемещений имеет вид:

$$r_{11} \cdot Z_1 = 0,$$

откуда получаем уравнение устойчивости:

$$r_{11} = 3i_{k-1,k} + 3i_{k,k+1} + 4i_k\varphi_2(\vartheta) = 0,$$

следовательно

$$\varphi_2(\vartheta_k) = -\frac{3i_{k-1,k} + 3i_{k,k+1}}{4i_k}.$$

значение $\varphi_2(\vartheta_k)$ определяются для всех загруженных Т-образных рам. По ним из таблицы I приложения находятся значения ϑ_k и по (3.2) - значения $P_{к\ кр}$. Расчетная критическая сила равна $min\{P_{к\ кр}\}$.

3.6. Некоторые сведения об устойчивости арок.

Из теории расчета арок известно, что если не учитывать изгибающие моменты, возникающие от обжатия арок, то при рациональном очертании их осей изгибающие моменты и поперечные силы равны нулю и арки работают только на осевое сжатие. В этом случае возможна потеря устойчивости их первого рода. Арки могут быть очерчены по различным кривым и для каждого очертания имеет место своя нагрузка, при котором это очертание становится рациональным. Рассмотрим наиболее распространенные очертания: по окружности и по квадратной параболе.

а) Устойчивость круговых арок постоянного сечения при гидростатическом давлении.

Расчеты на устойчивость таких арок показали, что для трехшарнирных арок наиболее опасной формой потери устойчивости является симметричная (рис. 3.II.а), а для двухшарнирной и бесшарнирной - кососимметричная (рис. 3.13б,в).

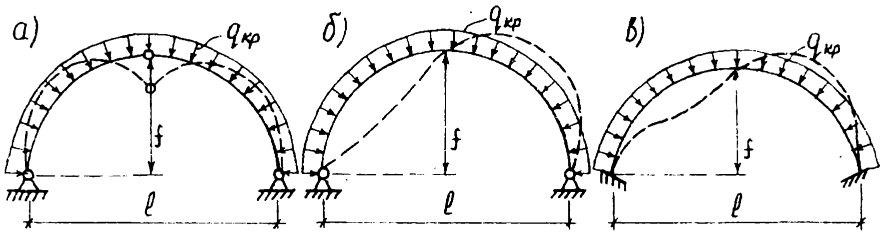


Рис. 3.13

При решении задачи статическим методом для рассматриваемых арок получено выражение критической нагрузки

$$q_{кр} = K_1\frac{EJ}{\ell^3}, \tag{3.II}$$

где K_1 - коэффициент зависящий от соотношения f/ℓ. Значения этого коэффициента для некоторых соотношений f/ℓ приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2

f/ℓ	Бесшарн. арка	Двухшарн. арка	Трехшарн. арка
0,1	58,9	28,4	22,2
0,2	90,4	39,3	33,5
0,3	93,4	40,9	34,9
0,4	80,7	32,8	30,2
0,5	64,0	24,0	24,0

б) Устойчивость параболических арок постоянного сечения при равномерно распределенной нагрузке.

Расчет параболических арок на устойчивость оказывается более сложным, чем круговых. Задача по определению $q_{кр}$ сводится к решению дифференциальных уравнений 3-го и 4-го порядка, которые не интегрируются в конечном виде. Численное интегрирование их в конечном итоге приводит к следующему результату

$$q_{кр} = K_2 \frac{EJ}{\ell^3}, \qquad (3.12)$$

где K_2 - коэффициент зависящий от соотношения f/ℓ. Значения K_2 для некоторых соотношений f/ℓ приведены в таблице 3.3. Численные решения задачи паказали, что для трехшарнирной арки форма потери устойчивости (симметричная или кососимметричная) зависит от соотношения f/ℓ, а для двухшарнирной и бесшарнирной наиболее опасной является кососимметричная форма потери устойчивости (рис. 3.14).

Таблица 3.3

f/ℓ	Бесшарн. арка	Двухшарн. арка	Трехшарн. арка	
			Симм.ФПУ	Кососимм.ФПУ
0,1	60,7	28,5	22,5	28,5
0,2	101,0	45,4	39,6	45,4
0,3	115,0	46,5	47,3	46,5
0,4	111,0	43,9	49,2	43,9
0,5	97,4	38,4	-	38,4
0,6	83,8	30,5	38,0	30,5
0,8	59,1	20,0	28,8	20,0
1,0	43,7	14,1	22,1	14,1

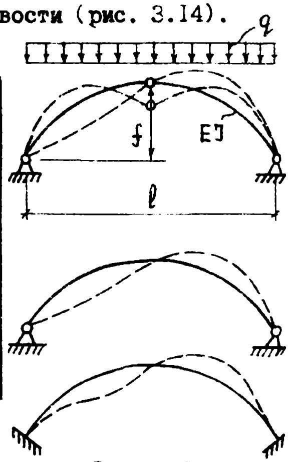


Рис. 3.14

Пример. Для параболической арки, изображенной на рис. 3.15, определить $q_{кр}$. Изгибная жесткость арки постоянна и равна $EJ=2800\cdot10^7$ Нсм^2.

Оределяем $q_{кр}$ по формуле(3.8).

f/ℓ = 0,25. По таблице 3.3 находим K_2 = 108

$$q_{кр} = K_2 \frac{EJ}{\ell^3} = 108 \cdot \frac{2800\cdot10^7}{24^3\cdot10^6} = 2190 \text{ Н/см}=219 \text{кН/м}$$

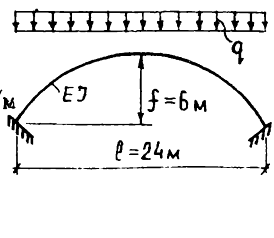


Рис. 3.15

Приложение

Таблица значений функций метода перемещений для сжатоизогнутых стержней

υ	$\varphi_1(\upsilon)$	$\varphi_2(\upsilon)$	$\varphi_3(\upsilon)$	$\varphi_4(\upsilon)$	$\eta_1(\upsilon)$	$\eta_2(\upsilon)$
0.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.01	0.99999	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996	0.99999
0.02	0.99997	0.99999	1.00001	0.99999	0.99984	0.99996
0.03	0.99994	0.99997	1.00001	0.99998	0.99964	0.99991
0.04	0.99989	0.99995	1.00003	0.99997	0.99936	0.99984
0.05	0.99983	0.99992	1.00004	0.99996	0.99900	0.99975
0.06	0.99976	0.99988	1.00006	0.99994	0.99856	0.99964
0.07	0.99967	0.99984	1.00008	0.99992	0.99804	0.99951
0.08	0.99957	0.99979	1.00011	0.99989	0.99744	0.99936
0.09	0.99946	0.99973	1.00014	0.99986	0.99676	0.99919
0.10	0.99933	0.99967	1.00017	0.99983	0.99600	0.99900
0.11	0.99919	0.99960	1.00020	0.99980	0.99516	0.99879
0.12	0.99904	0.99952	1.00024	0.99976	0.99424	0.99856
0.13	0.99887	0.99944	1.00028	0.99972	0.99324	0.99831
0.14	0.99869	0.99935	1.00033	0.99967	0.99216	0.99804
0.15	0.99850	0.99925	1.00038	0.99962	0.99100	0.99775
0.16	0.99829	0.99915	1.00043	0.99957	0.98976	0.99744
0.17	0.99807	0.99904	1.00048	0.99952	0.98844	0.99711
0.18	0.99784	0.99892	1.00054	0.99946	0.98704	0.99676
0.19	0.99759	0.99880	1.00060	0.99940	0.98556	0.99639
0.20	0.99733	0.99867	1.00067	0.99933	0.98400	0.99600
0.21	0.99706	0.99853	1.00074	0.99926	0.98236	0.99559
0.22	0.99677	0.99839	1.00081	0.99919	0.98064	0.99516
0.23	0.99647	0.99824	1.00088	0.99912	0.97883	0.99471
0.24	0.99615	0.99808	1.00096	0.99904	0.97695	0.99424
0.25	0.99583	0.99791	1.00104	0.99896	0.97499	0.99375
0.26	0.99548	0.99774	1.00113	0.99887	0.97295	0.99324
0.27	0.99513	0.99757	1.00122	0.99878	0.97083	0.99271
0.28	0.99476	0.99738	1.00131	0.99869	0.96863	0.99216
0.29	0.99438	0.99719	1.00141	0.99860	0.96635	0.99159
0.30	0.99398	0.99700	1.00150	0.99850	0.96398	0.99100
0.31	0.99358	0.99679	1.00161	0.99840	0.96154	0.99039
0.32	0.99315	0.99658	1.00171	0.99829	0.95902	0.98976
0.33	0.99272	0.99636	1.00182	0.99818	0.95642	0.98911
0.34	0.99227	0.99614	1.00193	0.99807	0.95373	0.98844
0.35	0.99180	0.99591	1.00205	0.99796	0.95097	0.98775
0.36	0.99133	0.99567	1.00217	0.99784	0.94813	0.98704
0.37	0.99084	0.99543	1.00229	0.99772	0.94520	0.98631
0.38	0.99033	0.99518	1.00242	0.99759	0.94220	0.98556
0.39	0.98982	0.99492	1.00255	0.99746	0.93912	0.98479
0.40	0.98928	0.99466	1.00268	0.99733	0.93595	0.98400
0.41	0.98874	0.99438	1.00282	0.99719	0.93271	0.98319
0.42	0.98818	0.99411	1.00296	0.99706	0.92938	0.98236
0.43	0.98761	0.99382	1.00310	0.99691	0.92597	0.98151
0.44	0.98702	0.99353	1.00325	0.99677	0.92249	0.98064
0.45	0.98642	0.99323	1.00340	0.99662	0.91892	0.97975
0.46	0.98581	0.99293	1.00355	0.99647	0.91527	0.97883
0.47	0.98518	0.99262	1.00371	0.99631	0.91155	0.97790
0.48	0.98454	0.99230	1.00387	0.99615	0.90774	0.97695
0.49	0.98388	0.99197	1.00403	0.99599	0.90385	0.97598
0.50	0.98321	0.99164	1.00420	0.99583	0.89988	0.97499
0.51	0.98253	0.99130	1.00437	0.99566	0.89583	0.97398
0.52	0.98183	0.99095	1.00454	0.99548	0.89170	0.97295
0.53	0.98112	0.99060	1.00472	0.99531	0.88749	0.97190
0.54	0.98040	0.99024	1.00490	0.99513	0.88320	0.97083
0.55	0.97966	0.98988	1.00509	0.99495	0.87882	0.96974

ϑ	$\varphi_1(\vartheta)$	$\varphi_2(\vartheta)$	$\varphi_3(\vartheta)$	$\varphi_4(\vartheta)$	$\zeta_1(\vartheta)$	$\zeta_2(\vartheta)$
0.56	0.97890	0.98950	1.00528	0.99476	0.87437	0.96863
0.57	0.97814	0.98912	1.00547	0.99457	0.86984	0.96750
0.58	0.97735	0.98874	1.00567	0.99438	0.86522	0.96635
0.59	0.97656	0.98834	1.00586	0.99418	0.86053	0.96518
0.60	0.97575	0.98794	1.00607	0.99398	0.85575	0.96398
0.61	0.97493	0.98754	1.00627	0.99378	0.85089	0.96277
0.62	0.97409	0.98712	1.00648	0.99358	0.84595	0.96154
0.63	0.97323	0.98670	1.00670	0.99337	0.84093	0.96029
0.64	0.97237	0.98627	1.00691	0.99315	0.83583	0.95902
0.65	0.97149	0.98584	1.00713	0.99294	0.83065	0.95773
0.66	0.97059	0.98540	1.00736	0.99272	0.82539	0.95642
0.67	0.96968	0.98495	1.00759	0.99249	0.82005	0.95509
0.68	0.96876	0.98449	1.00782	0.99227	0.81462	0.95373
0.69	0.96782	0.98403	1.00805	0.99204	0.80912	0.95236
0.70	0.96687	0.98356	1.00829	0.99180	0.80353	0.95097
0.71	0.96590	0.98308	1.00853	0.99157	0.79786	0.94956
0.72	0.96492	0.98260	1.00878	0.99133	0.79212	0.94813
0.73	0.96392	0.98211	1.00903	0.99108	0.78629	0.94668
0.74	0.96291	0.98161	1.00928	0.99084	0.78037	0.94520
0.75	0.96188	0.98111	1.00954	0.99059	0.77438	0.94371
0.76	0.96084	0.98060	1.00980	0.99033	0.76831	0.94220
0.77	0.95979	0.98008	1.01007	0.99008	0.76215	0.94067
0.78	0.95872	0.97956	1.01033	0.98982	0.75592	0.93912
0.79	0.95763	0.97902	1.01061	0.98955	0.74960	0.93754
0.80	0.95653	0.97849	1.01088	0.98928	0.74320	0.93595
0.81	0.95542	0.97794	1.01116	0.98901	0.73672	0.93434
0.82	0.95429	0.97739	1.01144	0.98874	0.73015	0.93271
0.83	0.95314	0.97683	1.01173	0.98846	0.72351	0.93105
0.84	0.95198	0.97626	1.01202	0.98818	0.71678	0.92938
0.85	0.95081	0.97569	1.01232	0.98790	0.70997	0.92769
0.86	0.94962	0.97510	1.01261	0.98761	0.70308	0.92597
0.87	0.94841	0.97452	1.01292	0.98732	0.69611	0.92424
0.88	0.94719	0.97392	1.01322	0.98702	0.68906	0.92249
0.89	0.94595	0.97332	1.01353	0.98672	0.68192	0.92071
0.90	0.94470	0.97271	1.01385	0.98642	0.67470	0.91892
0.91	0.94344	0.97209	1.01416	0.98612	0.66740	0.91711
0.92	0.94216	0.97147	1.01449	0.98581	0.66002	0.91527
0.93	0.94086	0.97084	1.01481	0.98550	0.65256	0.91342
0.94	0.93955	0.97020	1.01514	0.98518	0.64501	0.91155
0.95	0.93822	0.96955	1.01547	0.98486	0.63738	0.90965
0.96	0.93687	0.96890	1.01581	0.98454	0.62967	0.90774
0.97	0.93551	0.96824	1.01615	0.98421	0.62188	0.90580
0.98	0.93414	0.96758	1.01650	0.98388	0.61400	0.90385
0.99	0.93275	0.96690	1.01684	0.98355	0.60605	0.90187
1.00	0.93134	0.96622	1.01720	0.98321	0.59801	0.89988
1.01	0.92992	0.96553	1.01755	0.98287	0.58988	0.89786
1.02	0.92848	0.96484	1.01792	0.98253	0.58168	0.89583
1.03	0.92702	0.96413	1.01828	0.98218	0.57339	0.89377
1.04	0.92555	0.96342	1.01865	0.98183	0.56502	0.89170
1.05	0.92406	0.96271	1.01902	0.98148	0.55656	0.88960
1.06	0.92256	0.96198	1.01940	0.98112	0.54803	0.88749
1.07	0.92104	0.96125	1.01978	0.98076	0.53941	0.88535
1.08	0.91951	0.96051	1.02017	0.98040	0.53071	0.88320
1.09	0.91795	0.95976	1.02056	0.98003	0.52192	0.88102
1.10	0.91639	0.95901	1.02095	0.97966	0.51305	0.87882
1.11	0.91480	0.95825	1.02135	0.97928	0.50410	0.87661
1.12	0.91320	0.95748	1.02175	0.97890	0.49506	0.87437
1.13	0.91158	0.95671	1.02215	0.97852	0.48595	0.87211

ϑ	$\varphi_1(\vartheta)$	$\varphi_2(\vartheta)$	$\varphi_3(\vartheta)$	$\varphi_4(\vartheta)$	$\zeta_1(\vartheta)$	$\zeta_2(\vartheta)$
1.14	0.90994	0.95592	1.02256	0.97814	0.47674	0.86984
1.15	0.90829	0.95513	1.02298	0.97775	0.46746	0.86754
1.16	0.90662	0.95433	1.02340	0.97735	0.45809	0.86522
1.17	0.90494	0.95353	1.02382	0.97696	0.44864	0.86288
1.18	0.90324	0.95271	1.02425	0.97656	0.43910	0.86053
1.19	0.90152	0.95189	1.02468	0.97616	0.42948	0.85815
1.20	0.89978	0.95107	1.02511	0.97575	0.41978	0.85575
1.21	0.89802	0.95023	1.02556	0.97534	0.40999	0.85333
1.22	0.89625	0.94939	1.02600	0.97493	0.40012	0.85089
1.23	0.89446	0.94854	1.02645	0.97451	0.39016	0.84843
1.24	0.89266	0.94768	1.02690	0.97409	0.38012	0.84595
1.25	0.89083	0.94681	1.02736	0.97366	0.37000	0.84345
1.26	0.88899	0.94594	1.02782	0.97323	0.35979	0.84093
1.27	0.88713	0.94506	1.02829	0.97280	0.34950	0.83839
1.28	0.88526	0.94417	1.02876	0.97237	0.33912	0.83583
1.29	0.88336	0.94328	1.02923	0.97193	0.32866	0.83325
1.30	0.88145	0.94237	1.02971	0.97149	0.31812	0.83065
1.31	0.87952	0.94146	1.03020	0.97104	0.30748	0.82803
1.32	0.87757	0.94054	1.03069	0.97059	0.29677	0.82539
1.33	0.87560	0.93962	1.03118	0.97014	0.28597	0.82273
1.34	0.87362	0.93868	1.03168	0.96968	0.27508	0.82005
1.35	0.87161	0.93774	1.03218	0.96922	0.26411	0.81735
1.36	0.86959	0.93679	1.03269	0.96876	0.25306	0.81462
1.37	0.86755	0.93583	1.03320	0.96829	0.24191	0.81188
1.38	0.86549	0.93487	1.03372	0.96782	0.23069	0.80912
1.39	0.86341	0.93390	1.03424	0.96734	0.21938	0.80634
1.40	0.86131	0.93292	1.03476	0.96687	0.20798	0.80353
1.41	0.85920	0.93193	1.03529	0.96638	0.19650	0.80071
1.42	0.85706	0.93093	1.03583	0.96590	0.18493	0.79786
1.43	0.85491	0.92993	1.03637	0.96541	0.17327	0.79500
1.44	0.85273	0.92892	1.03692	0.96492	0.16153	0.79212
1.45	0.85054	0.92790	1.03747	0.96442	0.14970	0.78921
1.46	0.84832	0.92687	1.03802	0.96392	0.13779	0.78629
1.47	0.84609	0.92583	1.03858	0.96342	0.12579	0.78334
1.48	0.84384	0.92479	1.03914	0.96291	0.11371	0.78037
1.49	0.84157	0.92374	1.03971	0.96240	0.10153	0.77739
1.50	0.83928	0.92268	1.04029	0.96188	0.08928	0.77438
1.51	0.83696	0.92161	1.04087	0.96136	0.07693	0.77135
1.52	0.83463	0.92054	1.04145	0.96084	0.06450	0.76831
1.53	0.83228	0.91945	1.04204	0.96032	0.05198	0.76524
1.54	0.82991	0.91836	1.04264	0.95979	0.03937	0.76215
1.55	0.82751	0.91726	1.04323	0.95925	0.02668	0.75904
1.56	0.82510	0.91615	1.04384	0.95872	0.01390	0.75592
1.57	0.82266	0.91504	1.04445	0.95817	0.00103	0.75277
1.58	0.82021	0.91391	1.04506	0.95763	-0.01193	0.74960
1.59	0.81773	0.91278	1.04568	0.95708	-0.02497	0.74641
1.60	0.81523	0.91164	1.04631	0.95653	-0.03810	0.74320
1.61	0.81271	0.91049	1.04694	0.95597	-0.05132	0.73997
1.62	0.81017	0.90934	1.04758	0.95542	-0.06463	0.73672
1.63	0.80761	0.90817	1.04822	0.95485	-0.07803	0.73344
1.64	0.80502	0.90700	1.04886	0.95429	-0.09151	0.73015
1.65	0.80242	0.90581	1.04952	0.95372	-0.10508	0.72684
1.66	0.79979	0.90462	1.05017	0.95314	-0.11875	0.72351
1.67	0.79714	0.90343	1.05084	0.95256	-0.13250	0.72015
1.68	0.79446	0.90222	1.05150	0.95198	-0.14634	0.71678
1.69	0.79177	0.90100	1.05218	0.95140	-0.16026	0.71339
1.70	0.78905	0.89978	1.05286	0.95081	-0.17428	0.70997
1.71	0.78631	0.89855	1.05354	0.95021	-0.18839	0.70654

ϑ	$\varphi_1(\vartheta)$	$\varphi_2(\vartheta)$	$\varphi_3(\vartheta)$	$\varphi_4(\vartheta)$	$\zeta_1(\vartheta)$	$\zeta_2(\vartheta)$
1.72	0.78355	0.89731	1.05423	0.94962	-0.20259	0.70308
1.73	0.78076	0.89606	1.05493	0.94902	-0.21687	0.69961
1.74	0.77795	0.89480	1.05563	0.94841	-0.23125	0.69611
1.75	0.77512	0.89354	1.05634	0.94780	-0.24572	0.69259
1.76	0.77226	0.89226	1.05705	0.94719	-0.26027	0.68906
1.77	0.76938	0.89098	1.05777	0.94657	-0.27492	0.68550
1.78	0.76647	0.88969	1.05849	0.94595	-0.28966	0.68192
1.79	0.76355	0.88839	1.05922	0.94533	-0.30449	0.67832
1.80	0.76059	0.88708	1.05996	0.94470	-0.31941	0.67470
1.81	0.75761	0.88576	1.06070	0.94407	-0.33442	0.67106
1.82	0.75461	0.88443	1.06145	0.94344	-0.34952	0.66740
1.83	0.75159	0.88310	1.06220	0.94280	-0.36471	0.66372
1.84	0.74853	0.88175	1.06296	0.94216	-0.38000	0.66002
1.85	0.74546	0.88040	1.06373	0.94151	-0.39538	0.65630
1.86	0.74235	0.87904	1.06450	0.94086	-0.41085	0.65256
1.87	0.73923	0.87767	1.06528	0.94020	-0.42641	0.64880
1.88	0.73607	0.87629	1.06606	0.93955	-0.44206	0.64501
1.89	0.73289	0.87490	1.06685	0.93888	-0.45781	0.64121
1.90	0.72969	0.87350	1.06765	0.93822	-0.47365	0.63738
1.91	0.72646	0.87210	1.06845	0.93755	-0.48958	0.63354
1.92	0.72320	0.87068	1.06926	0.93687	-0.50560	0.62967
1.93	0.71991	0.86926	1.07007	0.93619	-0.52172	0.62579
1.94	0.71660	0.86782	1.07090	0.93551	-0.53793	0.62188
1.95	0.71326	0.86638	1.07172	0.93483	-0.55424	0.61795
1.96	0.70989	0.86493	1.07256	0.93414	-0.57064	0.61400
1.97	0.70650	0.86347	1.07340	0.93344	-0.58714	0.61004
1.98	0.70307	0.86200	1.07425	0.93275	-0.60373	0.60605
1.99	0.69962	0.86052	1.07510	0.93205	-0.62041	0.60204
2.00	0.69614	0.85903	1.07596	0.93134	-0.63719	0.59801
2.01	0.69263	0.85753	1.07683	0.93063	-0.65407	0.59396
2.02	0.68910	0.85602	1.07771	0.92992	-0.67104	0.58988
2.03	0.68553	0.85451	1.07859	0.92920	-0.68810	0.58579
2.04	0.68194	0.85298	1.07947	0.92848	-0.70526	0.58168
2.05	0.67831	0.85144	1.08037	0.92775	-0.72252	0.57754
2.06	0.67466	0.84990	1.08127	0.92702	-0.73988	0.57339
2.07	0.67097	0.84834	1.08218	0.92629	-0.75733	0.56921
2.08	0.66726	0.84678	1.08309	0.92555	-0.77488	0.56502
2.09	0.66351	0.84521	1.08402	0.92481	-0.79252	0.56080
2.10	0.65973	0.84362	1.08495	0.92406	-0.81027	0.55656
2.11	0.65592	0.84203	1.08588	0.92332	-0.82811	0.55231
2.12	0.65208	0.84043	1.08683	0.92256	-0.84605	0.54803
2.13	0.64821	0.83882	1.08778	0.92180	-0.86409	0.54373
2.14	0.64431	0.83719	1.08874	0.92104	-0.88223	0.53941
2.15	0.64037	0.83556	1.08970	0.92028	-0.90046	0.53507
2.16	0.63640	0.83392	1.09068	0.91951	-0.91880	0.53071
2.17	0.63240	0.83227	1.09166	0.91873	-0.93724	0.52632
2.18	0.62836	0.83061	1.09265	0.91795	-0.95577	0.52192
2.19	0.62429	0.82894	1.09364	0.91717	-0.97441	0.51750
2.20	0.62019	0.82726	1.09465	0.91639	-0.99315	0.51305
2.21	0.61605	0.82556	1.09566	0.91559	-1.01199	0.50859
2.22	0.61187	0.82386	1.09668	0.91480	-1.03093	0.50410
2.23	0.60767	0.82215	1.09770	0.91400	-1.04997	0.49959
2.24	0.60342	0.82043	1.09874	0.91320	-1.06911	0.49506
2.25	0.59914	0.81870	1.09978	0.91239	-1.08836	0.49052
2.26	0.59483	0.81696	1.10083	0.91158	-1.10771	0.48595
2.27	0.59047	0.81520	1.10189	0.91076	-1.12716	0.48136
2.28	0.58608	0.81344	1.10295	0.90994	-1.14672	0.47674
2.29	0.58166	0.81167	1.10403	0.90912	-1.16638	0.47211

ϑ	$\varphi_1(\vartheta)$	$\varphi_2(\vartheta)$	$\varphi_3(\vartheta)$	$\varphi_4(\vartheta)$	$\eta_1(\vartheta)$	$\eta_2(\vartheta)$
2.30	0.57719	0.80988	1.10511	0.90829	-1.18614	0.46746
2.31	0.57269	0.80809	1.10620	0.90746	-1.20601	0.46279
2.32	0.56815	0.80629	1.10730	0.90662	-1.22598	0.45809
2.33	0.56357	0.80447	1.10841	0.90578	-1.24606	0.45337
2.34	0.55895	0.80265	1.10952	0.90494	-1.26625	0.44864
2.35	0.55429	0.80081	1.11065	0.90409	-1.28654	0.44388
2.36	0.54959	0.79896	1.11178	0.90324	-1.30694	0.43910
2.37	0.54485	0.79711	1.11292	0.90238	-1.32745	0.43430
2.38	0.54007	0.79524	1.11407	0.90152	-1.34806	0.42948
2.39	0.53525	0.79336	1.11523	0.90065	-1.36879	0.42464
2.40	0.53038	0.79147	1.11640	0.89978	-1.38962	0.41978
2.41	0.52547	0.78957	1.11758	0.89890	-1.41056	0.41490
2.42	0.52052	0.78766	1.11876	0.89802	-1.43161	0.40999
2.43	0.51553	0.78573	1.11996	0.89714	-1.45277	0.40507
2.44	0.51049	0.78380	1.12116	0.89625	-1.47405	0.40012
2.45	0.50540	0.78185	1.12237	0.89536	-1.49543	0.39515
2.46	0.50028	0.77990	1.12360	0.89446	-1.51692	0.39016
2.47	0.49510	0.77793	1.12483	0.89356	-1.53853	0.38515
2.48	0.48988	0.77595	1.12607	0.89266	-1.56025	0.38012
2.49	0.48461	0.77396	1.12732	0.89175	-1.58209	0.37507
2.50	0.47930	0.77196	1.12858	0.89083	-1.60403	0.37000
2.51	0.47394	0.76995	1.12985	0.88992	-1.62610	0.36491
2.52	0.46853	0.76792	1.13113	0.88899	-1.64827	0.35979
2.53	0.46307	0.76589	1.13242	0.88806	-1.67057	0.35466
2.54	0.45756	0.76384	1.13372	0.88713	-1.69298	0.34950
2.55	0.45200	0.76178	1.13503	0.88620	-1.71550	0.34432
2.56	0.44638	0.75971	1.13634	0.88526	-1.73815	0.33912
2.57	0.44072	0.75763	1.13767	0.88431	-1.76091	0.33390
2.58	0.43500	0.75554	1.13901	0.88336	-1.78380	0.32866
2.59	0.42924	0.75343	1.14036	0.88241	-1.80680	0.32340
2.60	0.42341	0.75131	1.14172	0.88145	-1.82992	0.31812
2.61	0.41754	0.74918	1.14309	0.88049	-1.85316	0.31281
2.62	0.41160	0.74704	1.14447	0.87952	-1.87653	0.30748
2.63	0.40562	0.74489	1.14586	0.87855	-1.90002	0.30214
2.64	0.39957	0.74272	1.14727	0.87757	-1.92363	0.29677
2.65	0.39347	0.74054	1.14868	0.87659	-1.94737	0.29138
2.66	0.38731	0.73835	1.15010	0.87560	-1.97123	0.28597
2.67	0.38109	0.73615	1.15154	0.87461	-1.99521	0.28054
2.68	0.37481	0.73393	1.15298	0.87362	-2.01933	0.27508
2.69	0.36847	0.73170	1.15444	0.87262	-2.04357	0.26961
2.70	0.36206	0.72946	1.15591	0.87161	-2.06794	0.26411
2.71	0.35560	0.72721	1.15739	0.87060	-2.09244	0.25859
2.72	0.34907	0.72494	1.15888	0.86959	-2.11706	0.25306
2.73	0.34248	0.72266	1.16038	0.86857	-2.14182	0.24750
2.74	0.33582	0.72037	1.16190	0.86755	-2.16671	0.24191
2.75	0.32909	0.71807	1.16342	0.86652	-2.19174	0.23631
2.76	0.32230	0.71575	1.16496	0.86549	-2.21690	0.23069
2.77	0.31544	0.71342	1.16651	0.86445	-2.24219	0.22504
2.78	0.30851	0.71108	1.16807	0.86341	-2.26762	0.21938
2.79	0.30151	0.70872	1.16965	0.86236	-2.29319	0.21369
2.80	0.29444	0.70635	1.17123	0.86131	-2.31889	0.20798
2.81	0.28730	0.70397	1.17283	0.86026	-2.34474	0.20225
2.82	0.28008	0.70157	1.17444	0.85920	-2.37072	0.19650
2.83	0.27279	0.69916	1.17607	0.85813	-2.39685	0.19072
2.84	0.26542	0.69674	1.17771	0.85706	-2.42312	0.18493
2.85	0.25797	0.69430	1.17936	0.85599	-2.44953	0.17911
2.86	0.25045	0.69185	1.18102	0.85491	-2.47609	0.17327
2.87	0.24284	0.68938	1.18269	0.85382	-2.50279	0.16741

ϑ	$\varphi_1(\vartheta)$	$\varphi_2(\vartheta)$	$\varphi_3(\vartheta)$	$\varphi_4(\vartheta)$	$\eta_1(\vartheta)$	$\eta_2(\vartheta)$
2.88	0.23516	0.68691	1.18438	0.85273	-2.52964	0.16153
2.89	0.22739	0.68441	1.18609	0.85164	-2.55664	0.15563
2.90	0.21954	0.68191	1.18780	0.85054	-2.58380	0.14970
2.91	0.21160	0.67939	1.18953	0.84943	-2.61110	0.14376
2.92	0.20358	0.67685	1.19127	0.84832	-2.63856	0.13779
2.93	0.19547	0.67430	1.19303	0.84721	-2.66617	0.13180
2.94	0.18726	0.67174	1.19480	0.84609	-2.69394	0.12579
2.95	0.17897	0.66916	1.19659	0.84497	-2.72186	0.11976
2.96	0.17059	0.66657	1.19839	0.84384	-2.74995	0.11371
2.97	0.16211	0.66396	1.20020	0.84271	-2.77819	0.10763
2.98	0.15353	0.66134	1.20203	0.84157	-2.80660	0.10153
2.99	0.14485	0.65870	1.20387	0.84042	-2.83518	0.09542
3.00	0.13608	0.65605	1.20573	0.83928	-2.86392	0.08928
3.01	0.12721	0.65338	1.20760	0.83812	-2.89283	0.08311
3.02	0.11823	0.65070	1.20949	0.83696	-2.92191	0.07693
3.03	0.10914	0.64800	1.21139	0.83580	-2.95116	0.07072
3.04	0.09995	0.64529	1.21331	0.83463	-2.98058	0.06450
3.05	0.09065	0.64256	1.21524	0.83346	-3.01018	0.05825
3.06	0.08124	0.63982	1.21719	0.83228	-3.03996	0.05198
3.07	0.07171	0.63706	1.21916	0.83109	-3.06992	0.04569
3.08	0.06207	0.63429	1.22114	0.82991	-3.10006	0.03937
3.09	0.05231	0.63150	1.22313	0.82871	-3.13039	0.03304
3.10	0.04243	0.62869	1.22515	0.82751	-3.16090	0.02668
3.11	0.03243	0.62587	1.22718	0.82631	-3.19160	0.02030
3.12	0.02231	0.62303	1.22922	0.82510	-3.22249	0.01390
3.13	0.01205	0.62018	1.23129	0.82388	-3.25358	0.00747
3.14	0.00167	0.61731	1.23337	0.82266	-3.28487	0.00103
3.15	-0.00885	0.61442	1.23547	0.82144	-3.31635	-0.00544
3.16	-0.01950	0.61152	1.23758	0.82021	-3.34804	-0.01193
3.17	-0.03030	0.60860	1.23971	0.81897	-3.37993	-0.01844
3.18	-0.04123	0.60566	1.24186	0.81773	-3.41203	-0.02497
3.19	-0.05231	0.60271	1.24403	0.81648	-3.44434	-0.03153
3.20	-0.06353	0.59974	1.24621	0.81523	-3.47687	-0.03810
3.21	-0.07491	0.59675	1.24842	0.81397	-3.50961	-0.04470
3.22	-0.08644	0.59375	1.25064	0.81271	-3.54257	-0.05132
3.23	-0.09813	0.59072	1.25288	0.81144	-3.57576	-0.05797
3.24	-0.10998	0.58768	1.25514	0.81017	-3.60918	-0.06463
3.25	-0.12199	0.58463	1.25742	0.80889	-3.64282	-0.07132
3.26	-0.13417	0.58155	1.25972	0.80761	-3.67670	-0.07803
3.27	-0.14652	0.57846	1.26203	0.80632	-3.71082	-0.08476
3.28	-0.15905	0.57535	1.26437	0.80502	-3.74519	-0.09151
3.29	-0.17176	0.57222	1.26673	0.80372	-3.77980	-0.09829
3.30	-0.18466	0.56907	1.26910	0.80242	-3.81466	-0.10508
3.31	-0.19774	0.56591	1.27150	0.80110	-3.84978	-0.11190
3.32	-0.21102	0.56272	1.27392	0.79979	-3.88515	-0.11875
3.33	-0.22450	0.55952	1.27635	0.79846	-3.92080	-0.12561
3.34	-0.23818	0.55630	1.27881	0.79714	-3.95671	-0.13250
3.35	-0.25206	0.55306	1.28129	0.79580	-3.99290	-0.13941
3.36	-0.26616	0.54980	1.28379	0.79446	-4.02936	-0.14634
3.37	-0.28048	0.54652	1.28632	0.79312	-4.06612	-0.15329
3.38	-0.29503	0.54322	1.28886	0.79177	-4.10316	-0.16026
3.39	-0.30980	0.53991	1.29143	0.79041	-4.14050	-0.16726
3.40	-0.32481	0.53657	1.29401	0.78905	-4.17814	-0.17428
3.41	-0.34006	0.53321	1.29662	0.78768	-4.21610	-0.18133
3.42	-0.35556	0.52984	1.29926	0.78631	-4.25436	-0.18839
3.43	-0.37132	0.52644	1.30192	0.78493	-4.29295	-0.19548
3.44	-0.38734	0.52302	1.30460	0.78355	-4.33187	-0.20259
3.45	-0.40363	0.51958	1.30730	0.78216	-4.37113	-0.20972

ϑ	$\varphi_1(\vartheta)$	$\varphi_2(\vartheta)$	$\varphi_3(\vartheta)$	$\varphi_4(\vartheta)$	$\zeta_1(\vartheta)$	$\zeta_2(\vartheta)$
3.46	-0.42020	0.51613	1.31003	0.78076	-4.41073	-0.21687
3.47	-0.43705	0.51265	1.31278	0.77936	-4.45068	-0.22405
3.48	-0.45419	0.50915	1.31555	0.77795	-4.49099	-0.23125
3.49	-0.47164	0.50563	1.31835	0.77654	-4.53167	-0.23847
3.50	-0.48939	0.50209	1.32118	0.77512	-4.57273	-0.24572
3.51	-0.50747	0.49852	1.32403	0.77369	-4.61417	-0.25298
3.52	-0.52587	0.49494	1.32690	0.77226	-4.65601	-0.26027
3.53	-0.54462	0.49133	1.32980	0.77082	-4.69825	-0.26759
3.54	-0.56371	0.48770	1.33273	0.76938	-4.74091	-0.27492
3.55	-0.58316	0.48405	1.33569	0.76793	-4.78399	-0.28228
3.56	-0.60298	0.48038	1.33867	0.76647	-4.82752	-0.28966
3.57	-0.62319	0.47668	1.34167	0.76501	-4.87149	-0.29706
3.58	-0.64379	0.47296	1.34471	0.76355	-4.91592	-0.30449
3.59	-0.66480	0.46922	1.34777	0.76207	-4.96083	-0.31194
3.60	-0.68622	0.46546	1.35086	0.76059	-5.00622	-0.31941
3.61	-0.70809	0.46167	1.35398	0.75911	-5.05212	-0.32690
3.62	-0.73040	0.45786	1.35713	0.75761	-5.09853	-0.33442
3.63	-0.75317	0.45402	1.36030	0.75612	-5.14547	-0.34196
3.64	-0.77643	0.45016	1.36351	0.75461	-5.19296	-0.34952
3.65	-0.80018	0.44628	1.36674	0.75310	-5.24101	-0.35711
3.66	-0.82445	0.44237	1.37001	0.75159	-5.28965	-0.36471
3.67	-0.84924	0.43844	1.37330	0.75006	-5.33888	-0.37235
3.68	-0.87459	0.43449	1.37663	0.74853	-5.38873	-0.38000
3.69	-0.90052	0.43050	1.37999	0.74700	-5.43922	-0.38768
3.70	-0.92703	0.42650	1.38338	0.74546	-5.49036	-0.39538
3.71	-0.95416	0.42247	1.38680	0.74391	-5.54219	-0.40310
3.72	-0.98193	0.41841	1.39025	0.74235	-5.59473	-0.41085
3.73	-1.01036	0.41432	1.39374	0.74079	-5.64799	-0.41861
3.74	-1.03948	0.41021	1.39725	0.73923	-5.70201	-0.42641
3.75	-1.06931	0.40608	1.40081	0.73765	-5.75681	-0.43422
3.76	-1.09989	0.40191	1.40439	0.73607	-5.81242	-0.44206
3.77	-1.13124	0.39772	1.40801	0.73449	-5.86888	-0.44992
3.78	-1.16340	0.39351	1.41167	0.73289	-5.92620	-0.45781
3.79	-1.19641	0.38926	1.41536	0.73129	-5.98444	-0.46571
3.80	-1.23028	0.38499	1.41909	0.72969	-6.04362	-0.47365
3.81	-1.26508	0.38069	1.42285	0.72807	-6.10378	-0.48160
3.82	-1.30082	0.37636	1.42665	0.72646	-6.16496	-0.48958
3.83	-1.33757	0.37200	1.43048	0.72483	-6.22720	-0.49758
3.84	-1.37535	0.36762	1.43436	0.72320	-6.29055	-0.50560
3.85	-1.41423	0.36320	1.43827	0.72156	-6.35506	-0.51365
3.86	-1.45425	0.35876	1.44222	0.71991	-6.42078	-0.52172
3.87	-1.49546	0.35428	1.44621	0.71826	-6.48776	-0.52982
3.88	-1.53793	0.34978	1.45024	0.71660	-6.55606	-0.53793
3.89	-1.58171	0.34525	1.45431	0.71493	-6.62574	-0.54608
3.90	-1.62687	0.34068	1.45842	0.71326	-6.69687	-0.55424
3.91	-1.67348	0.33608	1.46257	0.71158	-6.76951	-0.56243
3.92	-1.72161	0.33146	1.46676	0.70989	-6.84375	-0.57064
3.93	-1.77136	0.32680	1.47099	0.70820	-6.91966	-0.57888
3.94	-1.82279	0.32211	1.47527	0.70650	-6.99732	-0.58714
3.95	-1.87601	0.31739	1.47959	0.70479	-7.07684	-0.59542
3.96	-1.93111	0.31263	1.48396	0.70307	-7.15831	-0.60373
3.97	-1.98821	0.30784	1.48837	0.70135	-7.24184	-0.61206
3.98	-2.04741	0.30302	1.49282	0.69962	-7.32754	-0.62041
3.99	-2.10885	0.29817	1.49732	0.69789	-7.41555	-0.62879
4.00	-2.17265	0.29328	1.50187	0.69614	-7.50598	-0.63719
4.01	-2.23896	0.28836	1.50647	0.69439	-7.59899	-0.64562
4.02	-2.30794	0.28340	1.51111	0.69263	-7.69474	-0.65407
4.03	-2.37977	0.27840	1.51580	0.69087	-7.79340	-0.66254

ϑ	$\varphi_1(\vartheta)$	$\varphi_2(\vartheta)$	$\varphi_3(\vartheta)$	$\varphi_4(\vartheta)$	$\zeta_1(\vartheta)$	$\zeta_2(\vartheta)$
4.04	-2.45462	0.27338	1.52054	0.68910	-7.89515	-0.67104
4.05	-2.53271	0.26831	1.52533	0.68732	-8.00021	-0.67956
4.06	-2.61425	0.26321	1.53017	0.68553	-8.10878	-0.68810
4.07	-2.69949	0.25807	1.53506	0.68374	-8.22113	-0.69667
4.08	-2.78870	0.25290	1.54001	0.68194	-8.33750	-0.70526
4.09	-2.88217	0.24769	1.54501	0.68013	-8.45820	-0.71388
4.10	-2.98023	0.24244	1.55006	0.67831	-8.58356	-0.72252
4.11	-3.08322	0.23715	1.55516	0.67649	-8.71392	-0.73119
4.12	-3.19155	0.23182	1.56032	0.67466	-8.84968	-0.73988
4.13	-3.30566	0.22646	1.56554	0.67282	-8.99129	-0.74859
4.14	-3.42603	0.22105	1.57081	0.67097	-9.13923	-0.75733
4.15	-3.55322	0.21561	1.57614	0.66912	-9.29405	-0.76609
4.16	-3.68782	0.21012	1.58153	0.66726	-9.45635	-0.77488
4.17	-3.83054	0.20459	1.58698	0.66539	-9.62684	-0.78369
4.18	-3.98213	0.19902	1.59249	0.66351	-9.80627	-0.79252
4.19	-4.14349	0.19341	1.59806	0.66162	-9.99552	-0.80138
4.20	-4.31560	0.18775	1.60369	0.65973	-10.19560	-0.81027
4.21	-4.49961	0.18206	1.60938	0.65783	-10.40764	-0.81918
4.22	-4.69681	0.17631	1.61514	0.65592	-10.63295	-0.82811
4.23	-4.90871	0.17053	1.62096	0.65401	-10.87301	-0.83707
4.24	-5.13704	0.16470	1.62685	0.65208	-11.12958	-0.84605
4.25	-5.38383	0.15882	1.63281	0.65015	-11.40466	-0.85506
4.26	-5.65145	0.15290	1.63884	0.64821	-11.70065	-0.86409
4.27	-5.94268	0.14693	1.64493	0.64626	-12.02032	-0.87315
4.28	-6.26086	0.14091	1.65109	0.64431	-12.36699	-0.88223
4.29	-6.60994	0.13485	1.65733	0.64234	-12.74464	-0.89133
4.30	-6.99473	0.12873	1.66364	0.64037	-13.15806	-0.90046
4.31	-7.42105	0.12257	1.67002	0.63839	-13.61308	-0.90962
4.32	-7.89609	0.11636	1.67647	0.63640	-14.11689	-0.91880
4.33	-8.42879	0.11010	1.68301	0.63440	-14.67842	-0.92801
4.34	-9.03042	0.10379	1.68961	0.63240	-15.30895	-0.93724
4.35	-9.71539	0.09742	1.69630	0.63038	-16.02289	-0.94649
4.36	-10.50245	0.09100	1.70307	0.62836	-16.83899	-0.95577
4.37	-11.41641	0.08453	1.70992	0.62633	-17.78204	-0.96508
4.38	-12.49082	0.07801	1.71685	0.62429	-18.88562	-0.97441
4.39	-13.77224	0.07143	1.72386	0.62224	-20.19627	-0.98377
4.40	-15.32713	0.06480	1.73096	0.62019	-21.78046	-0.99315
4.41	-17.25385	0.05811	1.73815	0.61812	-23.73655	-1.00255
4.42	-19.70434	0.05136	1.74543	0.61605	-26.21647	-1.01199
4.43	-22.92640	0.04455	1.75279	0.61397	-29.46804	-1.02144
4.44	-27.35342	0.03769	1.76024	0.61187	-33.92462	-1.03093
4.45	-33.81810	0.03077	1.76779	0.60977	-40.41893	-1.04043
4.46	-44.15015	0.02378	1.77543	0.60767	-50.78068	-1.04997
4.47	-63.30569	0.01674	1.78317	0.60555	-69.96599	-1.05953
4.48	-111.02484	0.00963	1.79101	0.60342	-117.71497	-1.06911
4.49	-438.64008	0.00246	1.79894	0.60129	-445.36011	-1.07872
4.50	227.92925	-0.00477	1.80698	0.59914	221.17925	-1.08836
4.51	90.93972	-0.01207	1.81511	0.59699	84.15968	-1.09802
4.52	56.98304	-0.01944	1.82336	0.59483	50.17291	-1.10771
4.53	41.58421	-0.02687	1.83171	0.59265	34.74391	-1.11742
4.54	32.79368	-0.03437	1.84016	0.59047	25.92314	-1.12716
4.55	27.10821	-0.04194	1.84873	0.58828	20.20738	-1.13692
4.56	23.12892	-0.04958	1.85741	0.58608	16.19772	-1.14672
4.57	20.18750	-0.05729	1.86621	0.58388	13.22587	-1.15653
4.58	17.92436	-0.06507	1.87512	0.58166	10.93223	-1.16638
4.59	16.12883	-0.07293	1.88415	0.57943	9.10613	-1.17624
4.60	14.66930	-0.08086	1.89330	0.57719	7.61596	-1.18614
4.61	13.45929	-0.08887	1.90257	0.57495	6.37526	-1.19606

ϑ	$\varphi_1(\vartheta)$	$\varphi_2(\vartheta)$	$\varphi_3(\vartheta)$	$\varphi_4(\vartheta)$	$\zeta_1(\vartheta)$	$\zeta_2(\vartheta)$
4.62	12.43967	-0.09695	1.91197	0.57269	5.32487	-1.20601
4.63	11.56862	-0.10511	1.92150	0.57042	4.42299	-1.21598
4.64	10.81573	-0.11335	1.93115	0.56815	3.63920	-1.22598
4.65	10.15836	-0.12167	1.94094	0.56586	2.95086	-1.23601
4.66	9.57929	-0.13008	1.95087	0.56357	2.34076	-1.24606
4.67	9.06523	-0.13857	1.96093	0.56126	1.79560	-1.25614
4.68	8.60571	-0.14714	1.97113	0.55895	1.30491	-1.26625
4.69	8.19242	-0.15580	1.98148	0.55662	0.86038	-1.27638
4.70	7.81862	-0.16455	1.99197	0.55429	0.45529	-1.28654
4.71	7.47885	-0.17339	2.00261	0.55195	0.08415	-1.29673
4.72	7.16860	-0.18231	2.01340	0.54959	-0.25753	-1.30694
4.73	6.88413	-0.19134	2.02435	0.54723	-0.57351	-1.31718
4.74	6.62228	-0.20045	2.03545	0.54485	-0.86692	-1.32745
4.75	6.38042	-0.20966	2.04672	0.54246	-1.14041	-1.33774
4.76	6.15629	-0.21897	2.05815	0.54007	-1.39625	-1.34806
4.77	5.94796	-0.22838	2.06975	0.53766	-1.63634	-1.35841
4.78	5.75378	-0.23789	2.08152	0.53525	-1.86235	-1.36879
4.79	5.57232	-0.24751	2.09347	0.53282	-2.07572	-1.37919
4.80	5.40232	-0.25723	2.10559	0.53038	-2.27768	-1.38962
4.81	5.24269	-0.26705	2.11790	0.52793	-2.46934	-1.40008
4.82	5.09249	-0.27699	2.13039	0.52547	-2.65164	-1.41056
4.83	4.95087	-0.28704	2.14308	0.52300	-2.82543	-1.42107
4.84	4.81707	-0.29720	2.15595	0.52052	-2.99146	-1.43161
4.85	4.69045	-0.30747	2.16903	0.51803	-3.15038	-1.44218
4.86	4.57041	-0.31786	2.18231	0.51553	-3.30279	-1.45277
4.87	4.45643	-0.32838	2.19580	0.51301	-3.44921	-1.46340
4.88	4.34802	-0.33902	2.20949	0.51049	-3.59011	-1.47405
4.89	4.24478	-0.34978	2.22341	0.50795	-3.72592	-1.48472
4.90	4.14630	-0.36067	2.23754	0.50540	-3.85703	-1.49543
4.91	4.05226	-0.37168	2.25191	0.50285	-3.98378	-1.50616
4.92	3.96233	-0.38284	2.26650	0.50028	-4.10647	-1.51692
4.93	3.87622	-0.39412	2.28133	0.49769	-4.22541	-1.52771
4.94	3.79369	-0.40555	2.29641	0.49510	-4.34084	-1.53853
4.95	3.71449	-0.41712	2.31173	0.49250	-4.45301	-1.54938
4.96	3.63840	-0.42883	2.32730	0.48988	-4.56213	-1.56025
4.97	3.56524	-0.44069	2.34314	0.48725	-4.66840	-1.57115
4.98	3.49480	-0.45270	2.35924	0.48461	-4.77200	-1.58209
4.99	3.42694	-0.46486	2.37561	0.48196	-4.87310	-1.59305
5.00	3.36148	-0.47718	2.39226	0.47930	-4.97185	-1.60403
5.01	3.29830	-0.48966	2.40920	0.47662	-5.06840	-1.61505
5.02	3.23726	-0.50231	2.42642	0.47394	-5.16288	-1.62610
5.03	3.17823	-0.51512	2.44395	0.47124	-5.25540	-1.63717
5.04	3.12111	-0.52811	2.46179	0.46853	-5.34609	-1.64827
5.05	3.06578	-0.54127	2.47994	0.46580	-5.43505	-1.65941
5.06	3.01216	-0.55461	2.49841	0.46307	-5.52237	-1.67057
5.07	2.96015	-0.56813	2.51722	0.46032	-5.60815	-1.68176
5.08	2.90967	-0.58185	2.53636	0.45756	-5.69246	-1.69298
5.09	2.86063	-0.59575	2.55585	0.45478	-5.77540	-1.70423
5.10	2.81297	-0.60986	2.57570	0.45200	-5.85703	-1.71550
5.11	2.76661	-0.62416	2.59591	0.44920	-5.93742	-1.72681
5.12	2.72149	-0.63867	2.61650	0.44638	-6.01664	-1.73815
5.13	2.67756	-0.65340	2.63748	0.44356	-6.09474	-1.74952
5.14	2.63474	-0.66834	2.65885	0.44072	-6.17179	-1.76091
5.15	2.59300	-0.68351	2.68063	0.43787	-6.24784	-1.77234
5.16	2.55227	-0.69891	2.70283	0.43500	-6.32293	-1.78380
5.17	2.51251	-0.71454	2.72545	0.43213	-6.39712	-1.79528
5.18	2.47368	-0.73041	2.74852	0.42924	-6.47045	-1.80680
5.19	2.43574	-0.74653	2.77205	0.42633	-6.54296	-1.81834

ϑ	$\varphi_1(\vartheta)$	$\varphi_2(\vartheta)$	$\varphi_3(\vartheta)$	$\varphi_4(\vartheta)$	$\zeta_1(\vartheta)$	$\zeta_2(\vartheta)$
5.20	2.39864	-0.76290	2.79604	0.42341	-6.61469	-1.82992
5.21	2.36235	-0.77953	2.82051	0.42048	-6.68568	-1.84153
5.22	2.32683	-0.79643	2.84547	0.41754	-6.75597	-1.85316
5.23	2.29205	-0.81361	2.87094	0.41458	-6.82558	-1.86483
5.24	2.25798	-0.83106	2.89694	0.41160	-6.89455	-1.87653
5.25	2.22459	-0.84881	2.92348	0.40862	-6.96291	-1.88826
5.26	2.19184	-0.86686	2.95057	0.40562	-7.03069	-1.90002
5.27	2.15971	-0.88521	2.97823	0.40260	-7.09792	-1.91181
5.28	2.12818	-0.90388	3.00648	0.39957	-7.16462	-1.92363
5.29	2.09722	-0.92288	3.03534	0.39653	-7.23081	-1.93548
5.30	2.06681	-0.94221	3.06482	0.39347	-7.29653	-1.94737
5.31	2.03692	-0.96188	3.09495	0.39039	-7.36178	-1.95928
5.32	2.00753	-0.98191	3.12575	0.38731	-7.42660	-1.97123
5.33	1.97863	-1.00231	3.15723	0.38420	-7.49100	-1.98320
5.34	1.95020	-1.02308	3.18943	0.38109	-7.55500	-1.99521
5.35	1.92221	-1.04424	3.22235	0.37795	-7.61863	-2.00725
5.36	1.89464	-1.06581	3.25603	0.37481	-7.68189	-2.01933
5.37	1.86749	-1.08778	3.29050	0.37164	-7.74481	-2.03143
5.38	1.84074	-1.11019	3.32578	0.36847	-7.80739	-2.04357
5.39	1.81436	-1.13303	3.36189	0.36527	-7.86967	-2.05574
5.40	1.78835	-1.15634	3.39886	0.36206	-7.93165	-2.06794
5.41	1.76269	-1.18011	3.43673	0.35884	-7.99334	-2.08017
5.42	1.73737	-1.20437	3.47553	0.35560	-8.05476	-2.09244
5.43	1.71237	-1.22913	3.51529	0.35234	-8.11593	-2.10473
5.44	1.68769	-1.25442	3.55604	0.34907	-8.17684	-2.11706
5.45	1.66330	-1.28024	3.59782	0.34578	-8.23753	-2.12943
5.46	1.63921	-1.30662	3.64068	0.34248	-8.29799	-2.14182
5.47	1.61538	-1.33358	3.68464	0.33916	-8.35825	-2.15425
5.48	1.59183	-1.36115	3.72975	0.33582	-8.41830	-2.16671
5.49	1.56853	-1.38933	3.77605	0.33246	-8.47817	-2.17921
5.50	1.54548	-1.41816	3.82360	0.32909	-8.53785	-2.19174
5.51	1.52267	-1.44766	3.87244	0.32571	-8.59737	-2.20430
5.52	1.50008	-1.47785	3.92261	0.32230	-8.65672	-2.21690
5.53	1.47771	-1.50877	3.97419	0.31888	-8.71592	-2.22953
5.54	1.45555	-1.54044	4.02721	0.31544	-8.77498	-2.24219
5.55	1.43359	-1.57289	4.08175	0.31199	-8.83391	-2.25489
5.56	1.41183	-1.60616	4.13786	0.30851	-8.89271	-2.26762
5.57	1.39025	-1.64027	4.19561	0.30502	-8.95138	-2.28039
5.58	1.36885	-1.67527	4.25507	0.30151	-9.00995	-2.29319
5.59	1.34762	-1.71118	4.31633	0.29799	-9.06842	-2.30602
5.60	1.32655	-1.74806	4.37945	0.29444	-9.12678	-2.31889
5.61	1.30564	-1.78594	4.44452	0.29088	-9.18506	-2.33180
5.62	1.28488	-1.82487	4.51163	0.28730	-9.24325	-2.34474
5.63	1.26426	-1.86489	4.58087	0.28370	-9.30137	-2.35771
5.64	1.24378	-1.90605	4.65235	0.28008	-9.35942	-2.37072
5.65	1.22344	-1.94842	4.72617	0.27644	-9.41740	-2.38377
5.66	1.20321	-1.99204	4.80244	0.27279	-9.47532	-2.39685
5.67	1.18311	-2.03697	4.88129	0.26911	-9.53319	-2.40996
5.68	1.16312	-2.08329	4.96284	0.26542	-9.59101	-2.42312
5.69	1.14324	-2.13106	5.04723	0.26171	-9.64880	-2.43630
5.70	1.12346	-2.18035	5.13461	0.25797	-9.70654	-2.44953
5.71	1.10377	-2.23124	5.22514	0.25422	-9.76426	-2.46279
5.72	1.08418	-2.28382	5.31899	0.25045	-9.82195	-2.47609
5.73	1.06468	-2.33818	5.41633	0.24666	-9.87962	-2.48942
5.74	1.04526	-2.39441	5.51736	0.24284	-9.93727	-2.50279
5.75	1.02592	-2.45263	5.62229	0.23901	-9.99491	-2.51620
5.76	1.00665	-2.51293	5.73134	0.23516	-10.05255	-2.52964
5.77	0.98745	-2.57545	5.84475	0.23128	-10.11019	-2.54312

ϑ	$\varphi_1(\vartheta)$	$\varphi_2(\vartheta)$	$\varphi_3(\vartheta)$	$\varphi_4(\vartheta)$	$\zeta_1(\vartheta)$	$\zeta_2(\vartheta)$
5.78	0.96831	-2.64031	5.96280	0.22739	-10.16782	-2.55664
5.79	0.94923	-2.70766	6.08575	0.22347	-10.22547	-2.57020
5.80	0.93021	-2.77765	6.21392	0.21954	-10.28312	-2.58380
5.81	0.91124	-2.85045	6.34763	0.21558	-10.34080	-2.59743
5.82	0.89231	-2.92623	6.48726	0.21160	-10.39849	-2.61110
5.83	0.87342	-3.00519	6.63318	0.20760	-10.45621	-2.62481
5.84	0.85458	-3.08755	6.78584	0.20358	-10.51395	-2.63856
5.85	0.83577	-3.17354	6.94568	0.19953	-10.57173	-2.65234
5.86	0.81699	-3.26342	7.11324	0.19547	-10.62955	-2.66617
5.87	0.79823	-3.35747	7.28907	0.19138	-10.68740	-2.68003
5.88	0.77950	-3.45599	7.47378	0.18726	-10.74530	-2.69394
5.89	0.76078	-3.55933	7.66806	0.18313	-10.80325	-2.70788
5.90	0.74208	-3.66787	7.87265	0.17897	-10.86125	-2.72186
5.91	0.72339	-3.78201	8.08839	0.17479	-10.91931	-2.73589
5.92	0.70471	-3.90222	8.31620	0.17059	-10.97742	-2.74995
5.93	0.68604	-4.02902	8.55711	0.16636	-11.03560	-2.76405
5.94	0.66736	-4.16298	8.81227	0.16211	-11.09384	-2.77819
5.95	0.64868	-4.30473	9.08295	0.15783	-11.15216	-2.79238
5.96	0.62999	-4.45501	9.37061	0.15353	-11.21055	-2.80660
5.97	0.61129	-4.61463	9.67687	0.14920	-11.26901	-2.82087
5.98	0.59257	-4.78451	10.00358	0.14485	-11.32756	-2.83518
5.99	0.57384	-4.96569	10.35282	0.14048	-11.38619	-2.84953
6.00	0.55509	-5.15938	10.72700	0.13608	-11.44491	-2.86392
6.01	0.53631	-5.36694	11.12885	0.13166	-11.50372	-2.87835
6.02	0.51750	-5.58995	11.56152	0.12721	-11.56263	-2.89283
6.03	0.49867	-5.83025	12.02869	0.12273	-11.62163	-2.90735
6.04	0.47979	-6.08996	12.53459	0.11823	-11.68074	-2.92191
6.05	0.46088	-6.37157	13.08423	0.11370	-11.73996	-2.93651
6.06	0.44192	-6.67802	13.68347	0.10914	-11.79928	-2.95116
6.07	0.42292	-7.01282	14.33932	0.10456	-11.85872	-2.96585
6.08	0.40387	-7.38014	15.06013	0.09995	-11.91827	-2.98058
6.09	0.38476	-7.78502	15.85599	0.09531	-11.97794	-2.99536
6.10	0.36560	-8.23362	16.73920	0.09065	-12.03774	-3.01018
6.11	0.34637	-8.73351	17.72489	0.08596	-12.09766	-3.02505
6.12	0.32709	-9.29410	18.83192	0.08124	-12.15771	-3.03996
6.13	0.30773	-9.92728	20.08404	0.07649	-12.21790	-3.05492
6.14	0.28830	-10.64827	21.51167	0.07171	-12.27823	-3.06992
6.15	0.26880	-11.47682	23.15435	0.06691	-12.33870	-3.08497
6.16	0.24922	-12.43912	25.06446	0.06207	-12.39931	-3.10006
6.17	0.22955	-13.57064	27.31290	0.05721	-12.46008	-3.11520
6.18	0.20980	-14.92054	29.99802	0.05231	-12.52100	-3.13039
6.19	0.18996	-16.55913	33.26044	0.04739	-12.58207	-3.14562
6.20	0.17003	-18.59053	37.30836	0.04243	-12.64331	-3.16090
6.21	0.14999	-21.17572	42.46378	0.03745	-12.70471	-3.17623
6.22	0.12986	-24.57764	49.25258	0.03243	-12.76628	-3.19160
6.23	0.10962	-29.25696	58.59608	0.02738	-12.82802	-3.20702
6.24	0.08926	-36.10105	72.26902	0.02231	-12.88994	-3.22249
6.25	0.06880	-47.06687	94.18533	0.01719	-12.95204	-3.23801
6.26	0.04821	-67.48758	135.01132	0.01205	-13.01432	-3.25358
6.27	0.02750	-118.87545	237.77153	0.00687	-13.07680	-3.26920
6.28	0.00666	-492.88646	985.77792	0.00167	-13.13947	-3.28487

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. - М.: Наука, 1967.
2. Киселев В.А. Строительная механика. - М.: Стройиздат, 1980.
3. Клейн Г.К., Рекач В.Г., Розенблат Г.И. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (основы теории устойчивости, динамики сооружений и расчета пространственных систем). - М.: Высш. школа, 1972.
4. Рабинович И.М. Курс строительной механики. Ч. II. Статически неопределимые системы. - М., 1954.
5. Ржаницын А.Р. Строительная механика. - М.: Высш. школа, 1991.
6. Строительная механика / Под ред. А.В.Даркова. - М.: Высш. школа, 1976.
7. Снитко Н.К. Строительная механика. - М.: Высш. школа, 1980.
8. Справочник по сопротивлению материалов / Винокуров Е.Ф., Балыкин М.К., Голубев И.А. и др. - М.: Наука и техника, 1988.
9. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. - М.: Гостехиздат, 1955.
10. Турчак Л.И. Основы численных методов. - М.: Наука, 1987.
11. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т. III. - М.: Наука, 1981.

ОГЛАВЛЕНИЕ

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Коршун Леонард Иванович

Игнатюк Валерий Иванович

Хамутовский Александр Степанович

ОСНОВЫ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие по курсу строительной механики
для студентов строительных специальностей

Ответственный за выпуск Игнатюк В.И.

Редактор Строкач Т.В.

Подписано к печати 14.12.94 г. Формат 60x84/16. Бумага писч.
Печать офсетная. Усл.п.л.3,72. Уч.изд.л.4,0. Тираж 300 экз.
Заказ № 9 . Цена договорная. Отпечатано на ротапринте
Брестского политехнического института. 224017, Брест, ул.
Московская, 267.