Г.П. Степанюк[1], А.В. Чичурин[2]
[1]Луцк, ВНУ имени Леси Украинки
[2]Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, СВЯЗАННОГО С ЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ ШВАРЦА

В работах [1; 2] был приведен метод, позволяющий линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$y'''' + p(x)y''' + q(x)y'' + r(x)y' + s(x)y = 0 \tag{1}$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условиям

$$p' + \frac{1}{4}p^2 - \frac{2}{3}q = 0,\ q' + \frac{1}{4}pq - \frac{3}{2}r = 0,\ r' + \frac{1}{4}pr - 4s = 0 \tag{2}$$

свести к нелинейному дифференциальному уравнению

$$64i^6 - 560i^3i'^2 - 1275i'^4 + 448i^4i'' + 2040ii'^2i'' + 192i^2i''^2 - 504i''^3 - 1120i^2i'i^{(3)} + 840 <' i''i^{(3)} - 280ii^{(3)^2} + \left(160i^3 - 300i'^2 + 240ii''\right)i^{(4)} = 0. \tag{3}$$

В работах [2; 3] было проведено исследование уравнения (3). Поиск решений в виде ряда Лорана в точке $x_0 = 0$ приводит к тому, что удается установить следующий факт: уравнение (3) имеет два двупараметрических семейства решений, содержащих полюс второго порядка вида

$$i(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{a_{-1}}{x} + a_0 - \frac{1}{16}(8a_0a_{-1} + a_{-1}^3)x + \frac{481a_{-1}{}^4 + 2464a_{-1}{}^2a_0 - 4096a_0{}^2}{25600}x^2 + \frac{12288a_{-1}a_0{}^2 + 608a_{-1}{}^3a_0 - 243a_{-1}{}^5}{102400}x^3 + \frac{90112a_0{}^3 - 841a_{-1}{}^6 - 36136a_{-1}{}^4a_0 - 164352a_{-1}{}^2a_0{}^2}{4096000}x^4 + \cdots,$$

где a_{-1}, a_0 — произвольные постоянные;

$$i(x) = -\frac{3}{2x^2} + \frac{a_{-1}}{x} - \frac{1}{2}a_{-1}{}^2 + a_1x - \frac{113a_{-1}{}^4 + 954a_{-1}a_1}{3510}x^2 + \frac{14166a_{-1}{}^2a_1 - 613a_{-1}{}^5}{68445}x^3 - \frac{15949a_{-1}{}^6 + 254484a_{-1}{}^3a_1 + 1127061a_1{}^2}{8897850}x^4 + \cdots,$$

где a_{-1}, a_1 — произвольные постоянные. Поиск решения в виде ряда Тейлора в точке x_0 приводит к тому, что решение представляется в виде ряда

$$i(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 - (64a_0{}^6 + 896a_2a_0{}^4 - 560a_1{}^2a_0{}^3 + \tag{4}$$

или в виде ряда $i(x) = a_0 + a_1 x + \left(\frac{5a_1^2}{8a_0} - \frac{1}{3}a_0^2\right)x^2 +$

$$+\left(\frac{5a_1^3}{16a_0^2} - \frac{1}{2}a_0 a_1\right)x^3 + \left(\frac{a_0^3}{12} - \frac{7a_1^2}{16} + \frac{35a_1^4}{256a_0^3}\right)x^4 + \cdots, \qquad (5)$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 – произвольные постоянные.

Приведем процедуру, позволяющую из разложения (4) получить решение уравнения (3) в замкнутой форме.

Выберем, например, значения параметров a_0, a_1, a_2, a_3 в виде

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -\frac{1}{5}, a_3 = 0. \qquad (6)$$

Подставляя величины (6) в формулу (6) получим разложение

$$i(x) = 1 - \frac{x^2}{5} + \frac{17x^4}{500} - \frac{83x^6}{15625} + \frac{983x^8}{1250000} - \frac{17543x^{10}}{156250000} + \frac{48821x^{12}}{3125000000} -$$

$$-\frac{83309x^{14}}{39062500000} + \frac{11206399x^{16}}{39062500000000} - \frac{7449433x^{18}}{195312500000000} + \frac{490501621x^{20}}{976562500000000000} - \cdots$$

или, его можно переписать в виде

$$i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{1}{2}(-1-n)} 5^{-2-n}\left(7 + 15n + 6^{\frac{1+n}{2}}(23 + 15n)\right)\mathrm{Sin}\left[\frac{n\pi}{2}\right] x^{n-1}.$$

Последний ряд представляет собой дробно-рациональную функцию вида

$$i(x) = \frac{1250(1250 + 100x^2 + 3x^4)}{(1250 + 175x^2 + 3x^4)^2}. \qquad (7)$$

В том, что функция (7) является решением уравнения (3), легко убедиться непосредственной подстановкой.

Выводы: *1) Найденная функция (7) является решением уравнения (3), содержится в классе функций вида* $\frac{P_4(x)}{P_8(x)}$*, где* $P_4(x), P_8(x)$ *– многочлены соответственно четвертой и восьмой степеней с определенными коэффициентами и отлична от найденных ранее решений;*

2) предложенный метод позволяет получить другие решения уравнения (3).

Список литературы

1. Лукашевич, Н.А. Дифференциальные уравнения первого порядка / Н.А. Лукашевич, А.В Чичурин. – Минск : БГУ, 1999. – 210 с.
2. Чичурин, А.В. Уравнение Шази и линейные уравнения класса Фукса / А.В Чичурин. – М. : Изд-во Росс. ун-та дружбы народов, 2003. – 163 с.
3. Чичурин, А.В. Об одном нелинейном уравнении IV-го порядка с постоянными коэффициентами / А.В Чичурин. – Вестн. БрГУ, 2000. – № 4. – С. 33–38.