Е.Н. Швычкина
Брест, БрГТУ

РЕШЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ ВТОРОГО РОДА

При решении нелинейной системы дифференциальных уравнений третьего порядка, описывающей модель хемостата с периодической подачей вещества [1], [2], возникает дифференциальное уравнение вида

$$u'(t)\,u(t)\left(\frac{\alpha_2\,m_1}{a_1}+\frac{\alpha_3\,m_2}{a_2}+1\right)+u'(t)f(t)=f^2(t), \tag{1}$$

где $a_i, m_i, \alpha_i\ (i=1,2)$ – некоторые заданные константы, $f(t)$ – заданная функция. Полученное уравнение (1) является уравнением Абеля второго рода относительно функции $u(t)$.

В данной работе ищется решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(t)\to 0 \ \text{ при } t\to t_0.$$

Применим следующий аналитический метод. Для этого приведем уравнение (1) к уравнению Абеля первого рода. Подстановка [3]

$$u(t)=\frac{\theta}{w(t)}-\frac{f(t)}{\rho}\,,\quad \rho=\frac{\alpha_2\,m_1}{a_1}+\frac{\alpha_3\,m_2}{a_2}+1, \tag{2}$$

где θ – некоторая константа, приводит уравнение (1) к следующему виду

$$w'(t)=-\frac{f^2(t)}{\theta^2\rho}\,w^3(t)-\frac{f'(t)}{\theta\,\rho}\,w^2(t). \tag{3}$$

Для уравнения (3) сделаем замену

$$f(t)=\frac{\rho\,h(t)}{w(t)}, \tag{4}$$

где $h(t)$ – непрерывно-дифференцируемая функция в окрестности точки $t=0$. После подстановки (4) уравнение (3) примет вид

$$\frac{w'(t)}{w(t)}=\frac{h'(t)}{h(t)-\theta}+\frac{\rho\,h^2(t)}{\theta\big(h(t)-\theta\big)}.$$

Общее решение последнего уравнения

$$w(t)=C(h(t)-\theta)\ Exp\left(\rho\int\frac{h^2(t)}{\theta\big(h(t)-\theta\big)}dt\right), \tag{5}$$

где C – постоянная интегрирования. Из (4) следует, что функция $f(t)$ имеет вид

$$f(t)=\frac{C_1\rho\, h(t)}{h(t)-\theta}\,Exp\left(\rho\int\frac{h^2(t)}{\theta(\theta-h(t))}dt\right), \tag{6}$$

где $C_1=\dfrac{1}{C}$. Вернемся к исходной функции $u(t)$ уравнения (1), из (2) и (6) получим

$$u(t)=-\,C_1 Exp\left(\rho\int\frac{h^2(t)}{\theta(\theta-h(t))}dt\right). \tag{7}$$

Теорема 1. *Функция* $u(t)=-\,C_1 Exp\left(\rho\int\frac{h^2(t)}{\theta(\theta-h(t))}dt\right)$ *при* $C_1=\pm 1$ *или* $h(t)=\dfrac{\theta\left(1+C_1^2\right)}{C_1^2}$ *является частным решением дифференциального уравнения Абеля второго рода (1), где функция* $f(t)$ *задана формулой (6).*

Доказательство.

Подставим функцию $u(t)$ из (7) в уравнение (1). После преобразований получим следующее равенство

$$\frac{1}{\theta}\left(C_1^2-1\right)\left(\theta C_1^2+\theta-C_1^2h(t)\right)=0,$$

которое обращается в тождество при

$$C_1=\pm 1,\ h(t)=\frac{\theta\left(1+C_1^2\right)}{C_1^2}.$$

Что и требовалось доказать.

Список литературы

1. Smith, H. Competitive Coexistence in an Oscillating Chemostat / H. Smith // SIAM Journal on Applied Mathematics – Vol. 40. – № 3. – 1981. – P. 498–522.

2. Chichurin, A. Finding the solutions with the infinite limit properties for the third order normal system of differential equations using the *Mathematica* system / A. Chichurin, A. Shvychkina // 7th International Symposium on Classical and Celestial Mechanics (CCMECH'2011) : Book of the Abstracts, Siedlece, 24–28 October 2011. – Siedlece : Wydawnictwo Collegium Mazovia, 2011. – P. 23–24.

3. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке ; пер. с нем. – 4-е изд., испр. – М. : Наука : Гл. ред. физ-матем. лит., 1971. – 589 с.