Игнатюк В.И., Бочарова Н.В., Молош В.В.

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

по дисциплине

«Численные методы решения задач»

Брест 2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

по дисциплине

«Численные методы решения задач»

Методические указания
для студентов специальностей
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и
1-74 04 01 «Сельское строительство и обустройство территорий»
дневной и заочной форм обучения

Брест 2016

УДК 518:624.04(075)
ББК 38.112
И 26

Рецензент:
директор филиала РУП «Институт БелНИИС» – Научно-технический центр,
доктор технических наук ***Найчук Анатолий Яковлевич***

В.И. Игнатюк, Н.В. Бочарова, В.В. Молош

И 26 Лабораторные работы по дисциплине «Численные методы решения задач» : методические указания для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и 1-74 04 01 «Сельское строительство и обустройство территорий» дневной и заочной форм обучения. – Брест : Изд-во БрГТУ, 2016. – 48 с.

ISBN 978-985-493-369-6

В методических указаниях представлены лабораторные работы, в которых рассматриваются основы решения численными методами задач расчета строительных конструкций и сооружений с использованием системы компьютерной алгебры MathCAD, включая расчеты с использованием общей системы уравнений равновесия и матриц влияния, использование в расчетах аппроксимаций функций, численного интегрирования, матричной формы определения перемещений, численного дифференцирования, метода конечных разностей, методы решения нелинейных уравнений.

Методические указания предназначены для студентов специальности 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» дневной и заочной форм обучения.

УДК 518:624.04(075)
ББК 38.112

ISBN 978-985-493-369-6

Введение

Численные методы – это методы приближенного решения математических задач, позволяющие свести решение задачи к выполнению конечного числа более простых алгебраических и арифметических действий, выполняемых как вручную, так и с помощью компьютерной техники.

В методических указаниях рассматривается применение численных методов к задачам расчета сооружений с использованием методов расчета, которые изучаются в строительной механике.

Для реализации процедур численных методов при решения задач строительства предлагается применять широко распространенный и современный компьютерный пакет прикладной математики MathCAD.

Решение любой практической задачи начинается с математической постановки задачи, включая описание исходных данных, условий и целей на языке математических понятий. Соответственно строится математическая модель.

Математическая модель может иметь вид уравнения, системы уравнений либо быть выраженной в форме математических структур или соотношений. Математические модели могут быть непрерывными или дискретными. После моделирования производится решение математической задачи и исследование математической модели. Процесс исследования свойств объекта по его модели называется моделированием.

В методических указаниях представлены лабораторные работы, в которых рассматриваются расчеты с использованием общей системы уравнений равновесия и матриц влияния, использование в расчетах аппроксимаций функций, численного интегрирования, матричной формы определения перемещений, численного дифференцирования, метода конечных разностей, методы решения нелинейных уравнений. После решения задач численными методами, которые являются приближенными методами, производится при возможности сравнение результатов с точными решениями для оценки полученных результатов и применяемых численных методов расчета.

Основное назначение лабораторных работ – научить студентов применять численные методы в расчетах сооружений, понимать их идеи и суть.

После выполнения лабораторных работ студент по каждой работе оформляет и защищает индивидуальный отчет.

Лабораторные работы соответствуют учебной программой дисциплины «Численные методы решения задач» для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и 1-74 04 01 «Сельское строительство и обустройство территорий», утвержденной 07.07.2015, регистрационный № УД-1-042/уч.

Лабораторная работа № 1

Применение общей системы уравнений равновесия строительной механики к расчету статически определимых ферм

Цель работы: изучить применение общей системы уравнений равновесия строительной механики к расчету статически определимых ферм.

Порядок выполнения работы:

1) обозначить приложенную к ферме нагрузку и реакции в опорах;
2) пронумеровать стержни фермы;
3) вырезая каждый узел фермы, составить общую систему равновесия;
4) решить систему уравнений в системе компьютерной алгебры MathCAD;
5) сделать проверку, используя три уравнения равновесия фермы в целом.

Пример расчета. Рассмотрим расчет фермы, представленной на рис. 1.1.

Будем считать, что нагрузка может быть приложена только в узлы верхнего пояса фермы, поэтому обозначим внешнюю нагрузку в виде сосредоточенных сил (P_1, P_2, P_3, P_4). Для удобства пронумеруем стержни фермы (1–13). Обозначим реакции в опорах (R_A, R_B, H_B).

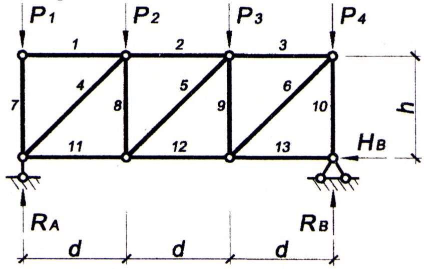


Рисунок 1.1

Вырезая каждый узел фермы, обозначим неизвестные продольные усилия стержней фермы (N_1, N_2, N_3, … и т.д., рис. 1.2).

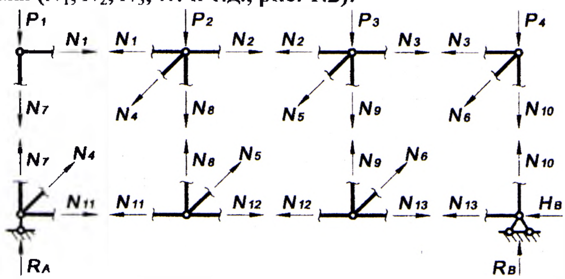
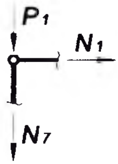
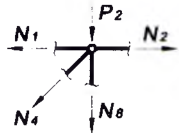


Рисунок 1.2

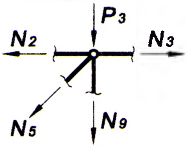
Составим уравнения равновесия для каждого узла фермы ($\sum X=0; \sum Y=0;$) проецируя усилия и нагрузки на соответствующие оси.



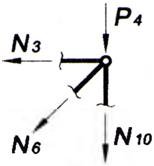
$$\sum X = 0;\ N_1 = 0;$$
$$\sum Y = 0; -P_1 - N_7 = 0;$$



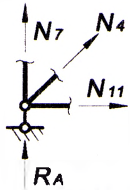
$$-N_1 - N_4 \cdot \cos\beta + N_2 = 0;$$
$$-P_2 - N_4 \cdot \sin\beta - N_8 = 0;$$



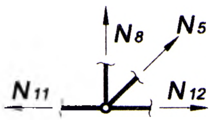
$$-N_2 - N_5 \cdot \cos\beta + N_3 = 0;$$
$$-P_3 - N_5 \cdot \sin\beta - N_9 = 0;$$



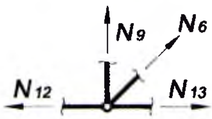
$$-N_3 - N_6 \cdot \cos\beta = 0;$$
$$-P_4 - N_6 \cdot \sin\beta - N_{10} = 0;$$



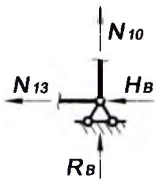
$$N_4 \cdot \cos\beta + N_{11} = 0;$$
$$R_A + N_4 \cdot \sin\beta + N_7 = 0;$$



$$-N_{11} + N_5 \cdot \cos\beta + N_{12} = 0;$$
$$N_8 + N_5 \cdot \sin\beta = 0;$$



$$-N_{12} + N_6 \cdot \cos\beta + N_{13} = 0;$$
$$N_9 + N_6 \cdot \sin\beta = 0;$$



$$-N_{13} - H_B = 0;$$
$$N_{10} + R_B = 0;$$

Для определения неизвестных усилий и реакций решим систему уравнений, составленную из полученных ранее уравнений равновесия узлов фермы.

Проверка: $\sum M_B = 0;\quad R_A \cdot 3d - P_1 \cdot 3d - P_2 \cdot 2d - P_3 \cdot d = 0;$

$\sum M_A = 0;\quad -R_B \cdot 3d + P_2 \cdot d + P_3 \cdot 2d + P_4 \cdot 3d = 0;$

$\sum X = 0;\quad H_B = 0.$

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры MathCAD.

Параметры фермы

$d := 2 \quad h := 2 \quad co := \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}} \quad si := \frac{h}{\sqrt{d^2 + h^2}}$

Задание переменных

$Ra := 0 \quad Rb := 0 \quad Hb := 0$

$N1 := 0 \quad N2 := 0 \quad N3 := 0 \quad N4 := 0 \quad N5 := 0$

$N6 := 0 \quad N7 := 0 \quad N8 := 0 \quad N9 := 0 \quad N10 := 0$

$N11 := 0 \quad N12 := 0 \quad N13 := 0$

Внешняя нагрузка

$P1 := 1 \quad P2 := 1 \quad P3 := 1 \quad P4 := 1$

Задание системы уравнений

Given

$N1 = 0$

$-P1 - N7 = 0$

$-N1 - N4 \cdot co + N2 = 0$

$-P2 - N4 \cdot si - N8 = 0$

$-N2 - N5 \cdot co + N3 = 0$

$-P3 - N5 \cdot si - N9 = 0$

$-N3 - N6 \cdot co = 0$

$-P4 - N6 \cdot si - N10 = 0$

$N4 \cdot co + N11 = 0$

$Ra + N4 \cdot si + N7 = 0$

$-N11 + N5 \cdot co + N12 = 0$

$N8 + N5 \cdot si = 0$

$-N12 + N6 \cdot co + N13 = 0$

$N9 + N6 \cdot si = 0$

$-N13 - Hb = 0$

$N10 + Rb = 0$

Поиск решения

$$\mathrm{Find}(Ra, Rb, Hb, N1, N2, N3, N4, N5, N6, N7, N8, N9, N10, N11, N12, N13) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

	0
0	2
1	2
2	0
3	0
4	-1
5	-1
6	-1.414
7	0
8	1.414
9	-1
10	0
11	-1
12	-2
13	1
14	1
15	0

Проверка опорных реакций

$Ra := 2 \quad Rb := 2 \quad Hb := 0$

$Ra \cdot 3 \cdot d - P1 \cdot 3 \cdot d - P2 \cdot 2 \cdot d - P3 \cdot d = 0$

$-Rb \cdot 3 \cdot d + P2 \cdot d + P3 \cdot 2 \cdot d + P4 \cdot 3 \cdot d = 0$

$Hb = 0$

Лабораторная работа № 2

Использование матриц влияния в расчетах ферм

Цель работы: изучить использование матриц влияния на примере расчета статически определимых ферм.

Порядок выполнения работы:

1) составить матрицу влияния для заданной фермы;

2) рассчитать усилия фермы с единичной нагрузкой во всех узлах фермы, а также рассчитать 2–4 примера с различной заданной нагрузкой (симметричной и несимметричной);

3) для всех примеров сделать рисунки с изображением полученных внутренних усилий в ферме;

4) сравнить полученные результаты расчета с результатами, полученными с помощью методики расчета фермы лабораторной работы № 1;

5) сделать выводы (проанализировать, в каких стержнях возникает наибольшее усилие).

Методика расчета. При проведении расчетов, ориентированных на компьютерные технологии, в строительной механике применяют дискретные расчетные схемы и методы матричного исчисления. Для примера такого подхода рассмотрим расчет фермы с помощью матрицы влияния продольных усилий.

Действующие на ферму нагрузки представим в виде вектора нагрузок, компонентами которого являются значения заданных нагрузок ($P_1..P_t$), пронумерованных в определенном порядке. Результатом расчета будет служить вектор усилий, в котором в заданном порядке будут перечислены значения продольных усилий в конкретных стержнях фермы ($N_1..N_s$).

$$\{\mathrm{P}\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_t \end{Bmatrix}; \qquad \{\mathrm{N}\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_s \end{Bmatrix},$$

где t – количество действующих нагрузок; s – количество стержней фермы.

Матрица влияния продольных усилий фермы записывается в виде:

$$[\mathrm{L_N}] = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1t} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{s1} & n_{s2} & \cdots & n_{st} \end{bmatrix}$$

Каждый элемент n_{ik} матрицы влияния представляет собой величину продольного усилия в i-м стержне фермы при действии на ферму только одной единичной нагрузки $P_k = 1$.

Вектор продольных усилий в стержнях фермы {N} будет определяться произведением матрицы влияния фермы [$\mathrm{L_N}$] на вектор нагрузок {P}.

$$\{\mathrm{N}\} = [\mathrm{L_N}] \cdot \{\mathrm{P}\}. \tag{2.1}$$

Пример расчета. Для примера рассмотрим расчет фермы, рассмотренной ранее в лабораторной работе № 1 (рис. 2.1).

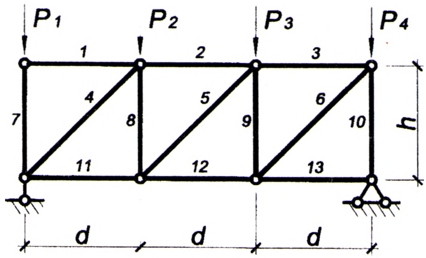


Рисунок 2.1

Составим матрицу влияния фермы. Так как в данной ферме 13 стержней и к ней приложено 4 внешних силы, то матрица влияния будет иметь размеры 4 x 13.

$$[L_N] = \begin{bmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} & \cdots & n_{1,4} \\ n_{2,1} & n_{2,2} & \cdots & n_{2,4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{13,1} & n_{13,2} & \cdots & n_{13,4} \end{bmatrix}$$

Для определения элементов $n_{i,k}$ матрицы влияния данной фермы необходимо поочередно просчитать значения внутренних усилий в каждом i-м стержне фермы при поочередном действии на ферму единичных нагрузок P_k=1, параллельно заполняя соответствующие столбцы матрицы влияния:

при P_1=1; P_2=0; P_3=0; P_4=0 (1 столбец);

при P_1=0; P_2=1; P_3=0; P_4=0 (2 столбец);

при P_1=0; P_2=0; P_3=1; P_4=0 (3 столбец);

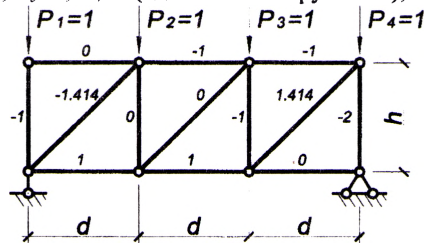
при P_1=0; P_2=0; P_3=0; P_4=1 (4 столбец).

Матрица влияния принимает вид:

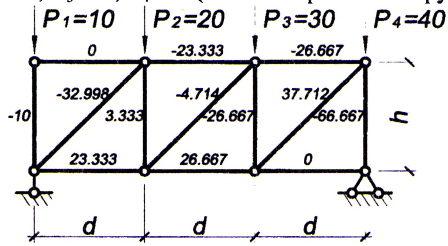
$$[L_N] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Используя полученную матрицу влияния, выполним примеры расчета фермы на различную нагрузку в системе компьютерной алгебры MathCAD:

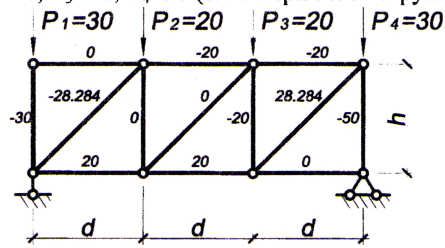
а) при P_1=1; P_2=1; P_3=1; P_4=1 (единичное нагружение);



б) при P_1=10; P_2=20; P_3=30; P_4=40 (несимметричное нагружение);



в) при P_1=30; P_2=20; P_3=20; P_4=30 (симметричное нагружение);



а) при единичном нагружении,

б) при несимметричном нагружении; в) при симметричном нагружении

Рисунок 2.2 Усилия N в стержнях фермы

Проанализировав результаты расчетов, можно сделать следующие <u>*выводы*</u>:

- наиболее растянутые стержни: № 6 (N_6 = 37,712) – при несимметричном нагружении, № 6 (N_6 = 28,284) – при симметричном нагружении;
- наиболее сжатые стержни – № 10 (N_{10} = -66,667) – при несимметричном нагружении, № 10 (N_{10} = -50) – при симметричном нагружении;
- сравнивая полученные результаты расчета с результатами, полученными с помощью методики расчета фермы лабораторной работы № 1, видим, что они совпадают.

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры MathCAD .

Матрица влияния фермы

ORIGIN := 1 - устанавливаем индексацию с 1, вместо 0 (по умолчанию)

$$LN := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & -1 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Расчет на единичную нагрузку

Вектор нагрузок

$$P := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad N := LN\cdot P$$

Вектор внутренних усилий N

N =

	1
1	0
2	-1
3	-1
4	-1.414
5	0
6	1.414
7	-1
8	0
9	-1
10	-2
11	1
12	1
13	0

$$N \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Расчет на несимметричную нагрузку

$$P := \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} \qquad N := LN\cdot P$$

N =

	1
1	0
2	-23.333
3	-26.667
4	-32.998
5	-4.714
6	37.712
7	-10
8	3.333
9	-26.667
10	-66.667
11	23.333
12	26.667
13	0

$$N \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{70}{3} \\ -\frac{80}{3} \\ -\frac{70\cdot\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{10\cdot\sqrt{2}}{3} \\ \frac{80\cdot\sqrt{2}}{3} \\ -10 \\ \frac{10}{3} \\ -\frac{80}{3} \\ -\frac{200}{3} \\ \frac{70}{3} \\ \frac{80}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Расчет на симметричную нагрузку

$$P := \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} \qquad N := LN\cdot P$$

N =

	1
1	0
2	-20
3	-20
4	-28.284
5	0
6	28.284
7	-30
8	0
9	-20
10	-50
11	20
12	20
13	0

$$N \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ -20 \\ -20\cdot\sqrt{2} \\ 0 \\ 20\cdot\sqrt{2} \\ -30 \\ 0 \\ -20 \\ -50 \\ 20 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Расчет на несимметричную и симметричную нагрузки с помощью лабораторной работы № 1

Параметры фермы

$d := 2 \quad h := 2 \quad co := \dfrac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}} \quad si := \dfrac{h}{\sqrt{d^2 + h^2}}$

Задание переменных

$Ra := 0 \quad Rb := 0 \quad Hb := 0 \quad N1 := 0 \quad N2 := 0 \quad N3 := 0 \quad N4 := 0 \quad N5 := 0$

$N6 := 0 \quad N7 := 0 \quad N8 := 0 \quad N9 := 0 \quad N10 := 0 \quad N11 := 0 \quad N12 := 0 \quad N13 := 0$

Несимметричная внешняя нагрузка

$P1 := 10 \quad P2 := 20 \quad P3 := 30 \quad P4 := 40$

Задание системы урвнений

Given

$N1 = 0$

$-P1 - N7 = 0$

$-N1 - N4\cdot co + N2 = 0$

$-P2 - N4\cdot si - N8 = 0$

$-N2 - N5\cdot co + N3 = 0$

$-P3 - N5\cdot si - N9 = 0$

$-N3 - N6\cdot co = 0$

$-P4 - N6\cdot si - N10 = 0$

$N4\cdot co + N11 = 0$

$Ra + N4\cdot si + N7 = 0$

$-N11 + N5\cdot co + N12 = 0$

$N8 + N5\cdot si = 0$

$-N12 + N6\cdot co + N13 = 0$

$N9 + N6\cdot si = 0$

$-N13 - Hb = 0$

$N10 + Rb = 0$

Поиск решения

Find(Ra, Rb, Hb, N1, N2, N3, N4, N5, N6, N7, N8, N9, N10, N11, N12, N13) =

	1
1	33.333
2	66.667
3	0
4	0
5	-23.333
6	-26.667
7	-32.998
8	-4.714
9	37.712
10	-10
11	3.333
12	-26.667
13	-66.667
14	23.333
15	26.667
16	0

Симметричная внешняя нагрузка

$P1 := 30 \quad P2 := 20 \quad P3 := 20 \quad P4 := 30$

Задание системы урвнений

Given

$N1 = 0$

$-P1 - N7 = 0$

$-N1 - N4\cdot co + N2 = 0$

$-P2 - N4\cdot si - N8 = 0$

$-N2 - N5\cdot co + N3 = 0$

$-P3 - N5\cdot si - N9 = 0$

$-N3 - N6\cdot co = 0$

$-P4 - N6\cdot si - N10 = 0$

$N4\cdot co + N11 = 0$

$Ra + N4\cdot si + N7 = 0$

$-N11 + N5\cdot co + N12 = 0$

$N8 + N5\cdot si = 0$

$-N12 + N6\cdot co + N13 = 0$

$N9 + N6\cdot si = 0$

$-N13 - Hb = 0$

$N10 + Rb = 0$

Поиск решения

Find(Ra, Rb, Hb, N1, N2, N3, N4, N5, N6, N7, N8, N9, N10, N11, N12, N13) =

	1
1	50
2	50
3	0
4	0
5	-20
6	-20
7	-28.284
8	$2.02\cdot10^{-14}$
9	28.284
10	-30
11	$-1.303\cdot10^{-14}$
12	-20
13	-50
14	20
15	20
16	0

Лабораторная работа № 3
Применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых многопролетных балок

Цель работы: изучить применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых многопролетных балок и решение систем линейных алгебраических уравнений.

Порядок выполнения работы:

1) разделить балку по шарнирам на простые балки (получим в качестве неизвестных в шарнирах внутренние силы и опорные реакции), показав усилия взаимодействия между ними;

2) получить общую систему уравнений равновесия рамы, составив уравнения равновесия для каждой простой балки;

3) определить усилия в простых балках и опорные реакции, решив полученную систему линейных алгебраических уравнений в системе компьютерной алгебры MathCAD;

4) построить эпюры усилий *M, Q, N* для каждой балки в отдельности и для всей многопролетной балки;

5) выполнить проверку выполнения общих закономерностей изменения эпюр усилий и статическую проверку.α

Пример расчета.

Рассмотрим расчет многопролетной балки, показанной на рисунке 3.1

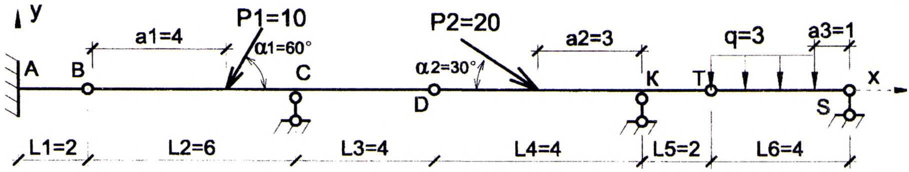


Рисунок 3.1

Каждая из простых балок – это диск, равновесие которого описывается тремя уравнениями равновесия. Каждый шарнир, соединяющий балки, имеет две связи, и при его разрезании в нем возникает соответственно две внутренние реактивные силы. Рассматриваемая многопролетная балка состоит из четырех простых балок, и для них соответственно можно составить двенадцать уравнений равновесия. Разделив многопролетную балку по трем шарнирам B, D, T на простые балки, получим в качестве неизвестных шесть внутренних реактивных сил и шесть опорных реакций в опорах.

Обозначим реакции опор R_A, H_A, M_{RA}, R_C, R_K, R_S и неизвестные в шарнирах X_B, Y_B , X_D, Y_D , X_T, Y_T . (рис. 3.2).

Используя общий подход, следует составить уравнения равновесия для каждой из простых балок:

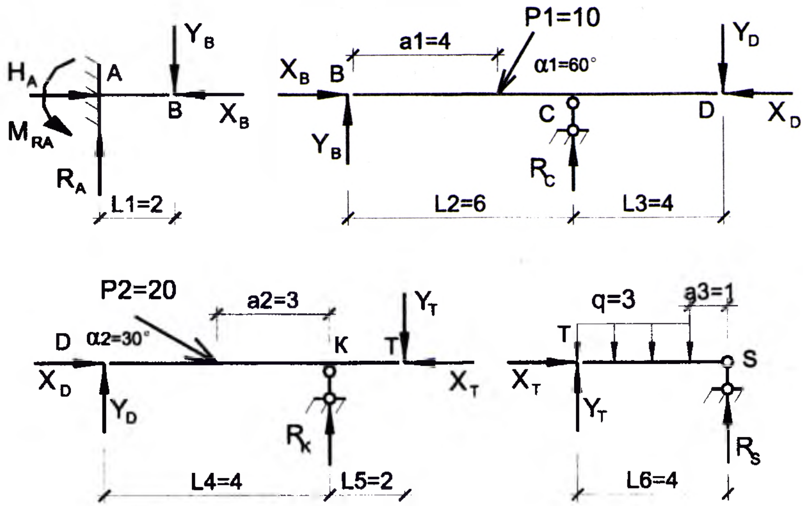


Рисунок 3.2

Для определения неизвестных усилий и реакций, решим систему уравнений, составленную для уравнений равновесия для простых балок:

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} & H_A - X_B = 0; \\ & R_A - Y_B = 0; \\ & -M_{RA} + Y_B \cdot L_1 = 0; \end{aligned}\right\} \text{Уравнение равновесия балки AB} \\ \left.\begin{aligned} & X_B - P_1 \cdot \cos\alpha_1 - X_D = 0; \\ & Y_B - P_1 \cdot \sin\alpha_1 + R_C - Y_D = 0; \\ & P_1 \cdot \sin\alpha_1 \cdot a_1 - R_C \cdot L_2 + Y_D \cdot (L_2 + L_3) = 0; \end{aligned}\right\} \text{Уравнение равновесия балки BCD} \\ \left.\begin{aligned} & X_D - X_T + P_2 \cdot \cos\alpha_2 = 0; \\ & Y_D + R_K - Y_T - P_2 \cdot \sin\alpha_2 = 0; \\ & P_2 \cdot \sin\alpha_2 \cdot (L_4 - a_2) - R_K \cdot L_4 + Y_T \cdot (L_4 + L_5) = 0; \end{aligned}\right\} \text{Уравнение равновесия балки DKT} \\ \left.\begin{aligned} & X_T = 0; \\ & Y_T + R_S - q \cdot (L_6 - a_3) = 0; \\ & q \cdot (L_6 - a_3)^2 \cdot 0{,}5 - R_S \cdot L_6 = 0. \end{aligned}\right\} \text{Уравнение равновесия балки TS} \end{cases}$$

После определения значений усилий строим эпюры *M*, *Q*, *N* (рис. 3.3). При этом необходимо выполнить проверку выполнения общих закономерностей изменения эпюр.

Для статической проверки составим три уравнения равновесия балки в целом, подставив полученные значения опорных реакций:

$$\sum X = 0; \qquad H_A - P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2 = 0;$$

$$\sum Y = 0; \qquad R_A - P_1 \cdot \sin\alpha_1 - P_2 \cdot \sin\alpha_2 + R_C + R_K + R_S - q\cdot(L_6 - a_3) = 0;$$

$$\sum M_A = 0; -M_{RA} + P_1 \cdot \sin\alpha_1 \cdot (L_1 + a_1) + P_2 \cdot \sin\alpha_2 \cdot (L_1 + L_2 + L_3 + (L_4 - a_2)) +$$

$$+q\cdot(L_6 - a_3)\cdot(L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + \frac{(L_6 - a_3)}{2}) - R_C \cdot (L_1 + L_2) -$$

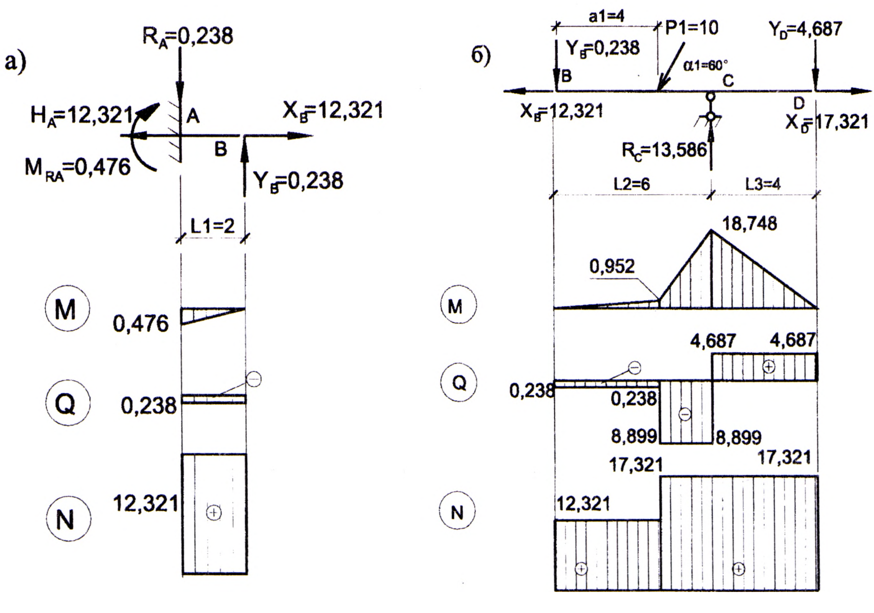
$$-R_K \cdot (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) - R_S \cdot (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6).$$

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры MathCAD.

Теперь можно рассмотреть каждую балку отдельно с приложенными внешними нагрузками, опорными реакциями и усилиями между соседними балками (в шарнирах) и построить для каждой из них эпюры внутренних сил M, Q, N. Совместив эпюры усилий во всех простых балках на одной схеме, получим эпюры внутренних сил M, Q, N для многопролетной балки (рис.3.4).

Определим экстремум в балке TS: $\frac{5,625}{3-x} = \frac{3,375}{x}; \rightarrow 5,625\cdot x = (3-x)\cdot 3,375;$

$$(5,625+3,375)\cdot x = 3\cdot 3,375; \rightarrow x = 1,125 \text{ м}; M_{\max} = -3,375\cdot 2,125 + 3\cdot 1,125\cdot\frac{1,125}{2} = -5,273\ \frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$



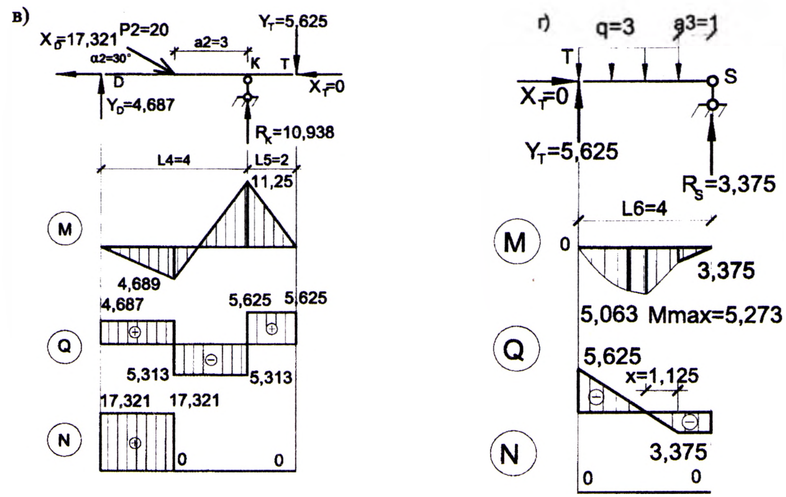


Рисунок 3.3

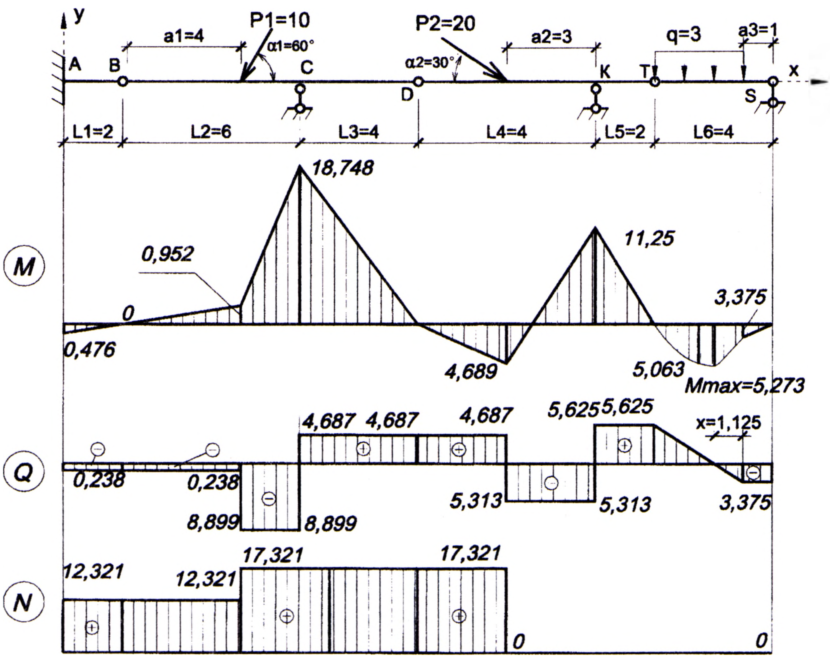


Рисунок 3.4

Параметры балки:

$L1 := 2 \quad L2 := 6 \quad L3 := 4 \quad L4 := 4 \quad L5 := 2 \quad L6 := 4 \quad a1 := 4 \quad a2 := 3 \quad a3 := 1$

$\alpha1 := \frac{\pi}{3} \quad \alpha2 := \frac{\pi}{6}$

Задание переменных:

$Ra := 0 \quad Ha := 0 \quad Mra := 0 \quad Rc := 0 \quad Rk := 0 \quad Rs := 0$

$Xb := 0 \quad Yb := 0 \quad Xd := 0 \quad Yd := 0 \quad Xt := 0 \quad Yt := 0$

Внешняя нагрузка:

$P1 := 10 \quad P2 := 20 \quad q := 3$

Задание системы уравнений:

Given

$Ha - Xb = 0 \qquad Xb - P1\cdot\cos(\alpha1) - Xd = 0$

$Ra - Yb = 0 \qquad Yb - P1\cdot\sin(\alpha1) + Rc - Yd = 0$

$-Mra + Yb\cdot L1 = 0 \qquad P1\cdot\sin(\alpha1)\cdot a1 - Rc\cdot L2 + Yd\cdot(L2 + L3) = 0$

$Xd - Xt + P2\cdot\cos(\alpha2) = 0 \qquad Xt = 0$

$Yd + Rk - Yt - P2\cdot\sin(\alpha2) = 0 \qquad Yt + Rs - q\cdot(L6 - a3) = 0$

$P2\cdot\sin(\alpha2)\cdot(L4 - a2) - Rk\cdot L4 + Yt\cdot(L4 + L5) = 0 \qquad q\cdot(L6 - a3)^2\cdot 0.5 - Rs\cdot L6 = 0$

Find(Mra, Ra, Ha, Rc, Rk, Rs, Xb, Yb, Xd, Yd, Xt, Yt) =

	0
0	-0.476
1	-0.238
2	-12.321
3	13.586
4	10.938
5	3.375
6	-12.321
7	-0.238
8	-17.321
9	4.687
10	0
11	5.625

$Mra := -0.476 \quad Ra := -0.238 \quad Ha := -12.321 \quad Rc := 13.586 \quad Rk := 10.938 \quad Rs := 3.375$

$Ha - P1\cdot\cos(\alpha1) + P2\cdot\cos(\alpha2) = -4.919 \times 10^{-4}$

$Ra - P1\cdot\sin(\alpha1) - P2\cdot\sin(\alpha2) + Rc + Rk + Rs - q\cdot(L6 - a3) = 7.46 \times 10^{-4}$

$-Mra + P1\cdot\sin(\alpha1)\cdot(L1 + a1) + P2\cdot\sin(\alpha2)\cdot[L1 + L2 + L3 + (L4 - a2)] + $

$+ q\cdot(L6 - a3)\cdot[L1 + L2 + L3 + L4 + L5 + (L6 - a3)\cdot 0.5] - Rc\cdot(L1 + L2) -$

$- Rk\cdot(L1 + L2 + L3 + L4) - Rs\cdot(L1 + L2 + L3 + L4 + L5 + L \quad = 0$

Лабораторная работа № 4
Применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых рам

Цель работы: изучить применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых рам и решение систем линейных алгебраических уравнений.

Порядок выполнения работы:

1) разбить раму на простые стержни (прямолинейные элементы, в пределах которых нет изменения нагрузок), показав усилия взаимодействия между ними;

2) получить общую систему уравнений равновесия рамы, составив уравнения равновесия для каждого из стержней;

3) определить усилия в стержнях рамы, решив полученную систему линейных алгебраических уравнений в системе компьютерной алгебры MathCAD;

4) построить эпюры усилий *M, Q, N* рамы;

5) выполнить проверку выполнения общих закономерностей изменения эпюр усилий и статическую проверку.

Пример расчета. Рассмотрим расчет рамы, представленной на рис. 4.1 (при $d = 2м$; $h = 2м$; $P = 4кН$; $m = 10кНм$; $q = 10кН/м$).

Разобьём раму на простые стержни, нумеруя узлы их соединения (1–7). Обозначим реакции опор Rx_1, Ry_1, R_6, R_7 (рис. 4.2).

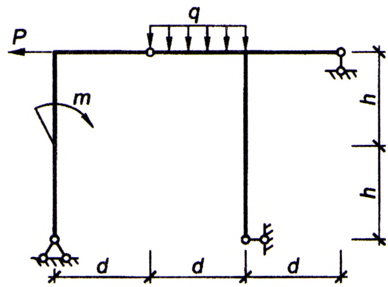


Рисунок 4.1

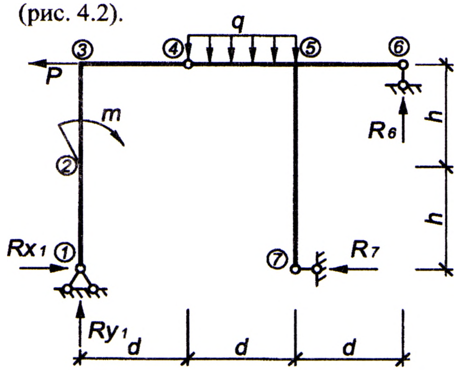


Рисунок 4.2

Вырезая каждый стержень, обозначим неизвестные внутренние усилия стержней рамы в характерных сечениях через x_i, y_i (продольные и поперечные усилия) и z_i (моменты), где i – номер характерного сечения (рис. 4.3). В случае соединения трех стержней в одном узле, вторую пару внутренних усилий будем обозначать через x'_i, y'_i, z'_i (см. узел 5).

В шарнирных соединениях отсутствуют моменты, поэтому там обозначаем только продольные и поперечные усилия (в узле 4 – x_4, y_4).

При наличии сосредоточенной нагрузки или момента в узле, относим их к тому стержню, конечная точка которого примыкает к данному сечению (в нашем примере: внешний момент m относим к стержню 1-2; сосредоточенную нагрузку P – к стержню 2-3).

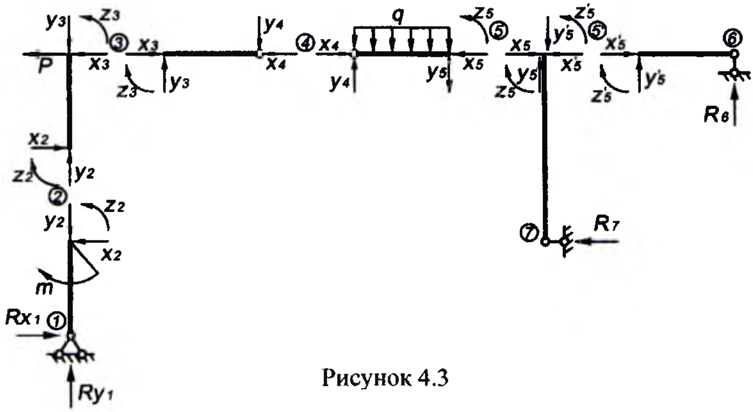


Рисунок 4.3

Составим уравнения равновесия для каждого стержня рамы, проецируя усилия и нагрузки на соответствующие оси. Суммы моментов берем относительно начальных сечений стержней.

Стержень 1-2:

$$\sum X=0;\quad Rx_1-x_2=0;$$
$$\sum Y=0;\quad Ry_1-y_2=0;$$
$$\sum M_1=0;\quad m-x_2\cdot h-z_2=0.$$

Стержень 2-3:

$$\sum X=0;\quad -P+x_2-x_3=0;$$
$$\sum Y=0;\quad y_2-y_3=0;$$
$$\sum M_2=0;\quad -P\cdot h-x_3\cdot h+z_2-z_3=0.$$

Стержень 3-4:

$$\sum X=0;\quad x_3-x_4=0;$$
$$\sum Y=0;\quad y_3-y_4=0;$$
$$\sum M_3=0;\quad y_4\cdot d+z_3=0.$$

Стержень 4-5:

$$\sum X=0;\quad x_4-x_5=0;$$
$$\sum Y=0;\quad -q\cdot d+y_4-y_5=0;$$
$$\sum M_4=0;\quad q\cdot d\cdot d/2+y_5\cdot d-z_5=0.$$

Стержень 5-6:

$$\sum X=0;\quad x_5'=0;$$
$$\sum Y=0;\quad R_6+y_5'=0;$$
$$\sum M_5=0;\quad -R_6\cdot d+z_5'=0.$$

Стержень 5-7:

$$\sum X=0;\quad -R_7+x_5-x_5'=0;$$
$$\sum Y=0;\quad y_5-y_5'=0;$$
$$\sum M_5=0;\quad R_7\cdot 2h+z_5-z_5'=0.$$

Для определения неизвестных усилий и реакций решим систему уравнений, составленную из полученных ранее уравнений равновесия стержней рамы:

$$\begin{cases} Rx_1 - x_2 = 0; \\ Ry_1 - y_2 = 0; \\ m - x_2 \cdot h - z_2 = 0; \\ -P + x_2 - x_3 = 0; \\ y_2 - y_3 = 0; \\ -P \cdot h - x_3 \cdot h + z_2 - z_3 = 0; \\ x_3 - x_4 = 0; \\ y_3 - y_4 = 0; \\ y_4 \cdot d + z_3 = 0; \\ x_4 - x_5 = 0; \\ -q \cdot d + y_4 - y_5 = 0; \\ q \cdot d \cdot d/2 + y_5 \cdot d - z_5 = 0; \\ x_5' = 0; \\ R_6 + y_5' = 0; \\ -R_6 \cdot d + z_5' = 0; \\ -R_7 + x_5 - x_5' = 0; \\ y_5 - y_5' = 0; \\ R_7 \cdot 2h + z_5 - z_5' = 0. \end{cases}$$

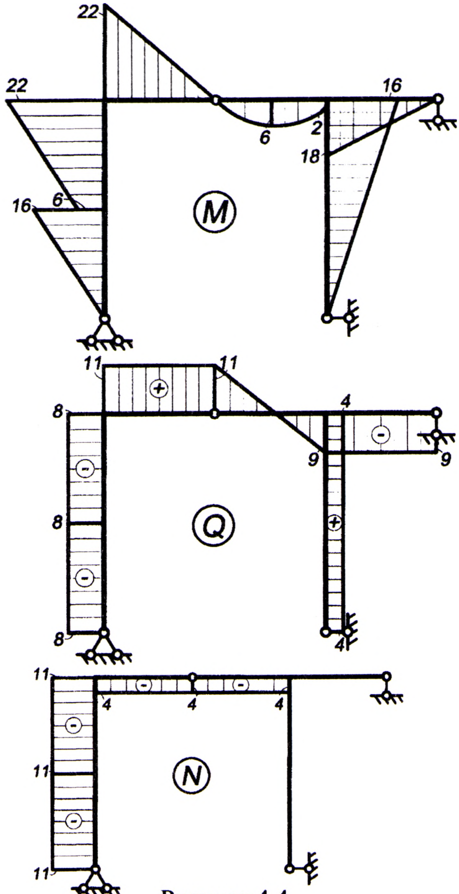


Рисунок 4.4

После определения значений усилий строим эпюры *M*, *Q*, *N* (рис. 4.4). При этом необходимо выполнить проверку выполнения общих закономерностей изменения эпюр.

Для статической проверки составим три уравнения равновесия рамы, подставив полученные значения опорных реакций:

$$\sum X = 0; \quad Rx_1 + P - R_7 = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad Ry_1 - q \cdot d + R_6 = 0;$$

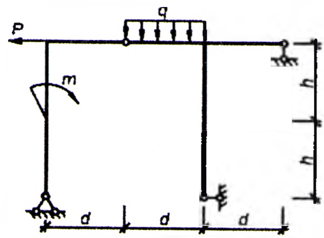
$$\sum M_4 = 0; \quad Ry_1 \cdot d - Rx_1 \cdot 2h - m + q \cdot d \cdot d/2 - R_6 \cdot 2d + R_7 \cdot 2h = 0.$$

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры MathCAD.

Параметры рамы

$d := 2 \quad h := 2$

Задание переменных



$Rx1 := 0 \quad Ry1 := 0 \quad R6 := 0 \quad R7 := 0 \quad x4 := 0 \quad y4 := 0$

$x2 := 0 \quad y2 := 0 \quad z2 := 0 \quad x5 := 0 \quad y5 := 0 \quad z5 := 0$

$x3 := 0 \quad y3 := 0 \quad z3 := 0 \quad x5i := 0 \quad y5i := 0 \quad z5i := 0$

Внешняя нагрузка

$m := 10 \quad P := 4 \quad q := 10$

Задание системы уравнений

Given

$Rx1 - x2 = 0$

$Ry1 - y2 = 0$

$m - x2 \cdot h - z2 = 0$

$-P + x2 - x3 = 0$

$y2 - y3 = 0$

$-P \cdot h - x3 \cdot h + z2 - z3 = 0$

$x3 - x4 = 0$

$y3 - y4 = 0$

$y4 \cdot d + z3 = 0$

$x4 - x5 = 0$

$-q \cdot d + y4 - y5 = 0$

$q \cdot d \cdot \frac{d}{2} + y5 \cdot d - z5 = 0$

$x5i = 0$

$R6 + y5i = 0$

$-R6 \cdot d + z5i = 0$

$-R7 + x5 - x5i = 0$

$y5 - y5i = 0$

$R7 \cdot 2 \cdot h + z5 - z5i = 0$

Поиск решения

$Find(Rx1, Ry1, R6, R7, x2, y2, z2, x3, y3, z3, x4, y4, x5, y5, z5, x5i, y5i, z5i) =$

	0
0	8
1	11
2	9
3	4
4	8
5	11
6	-6
7	4
8	11
9	-22
10	4
11	11
12	4
13	-9
14	2
15	0
16	-9
17	18

Проверка

$Rx1 := 8 \quad Ry1 := 11 \quad R6 := 9 \quad R7 := 4$

$Rx1 - P - R7 = 0$

$Ry1 - q \cdot d + R6 = 0$

$Ry1 \cdot d - Rx1 \cdot 2 \cdot h + m + q \cdot d \cdot \frac{d}{2} - R6 \cdot 2 \cdot d + R7 \cdot 2 \cdot h = 0$

Лабораторная работа № 5

Расчет усилий в трехшарнирных арках

<u>*Цель работы*</u>: изучить расчет усилий и построение эпюр усилий в трехшарнирных арках с использованием численного подхода.

<u>*Порядок выполнения работы*</u>:

1) определить опорные реакции и выполнить расчет усилий *M*, *Q*, *N* в сечениях арки с заданным шагом, обеспечивающим достаточно точное представление нелинейных по длине арки зависимостей усилий;

2) построить для рассматриваемой арки эпюры усилий *M*, *Q*, *N*;

3) выполнить проверку выполнения общих закономерностей изменения эпюр внутренних сил *M*, *Q* и *N*.

<u>Примечание:</u> все необходимые расчеты выполнить в системе компьютерной алгебры MathCAD.

<u>*Пример расчета*</u>. Рассмотрим расчет арки пролетом $L = 32$ м со стрелой подъема $f = 10$ м, ось которой изменяется по круговому закону (рисунок 5.1).

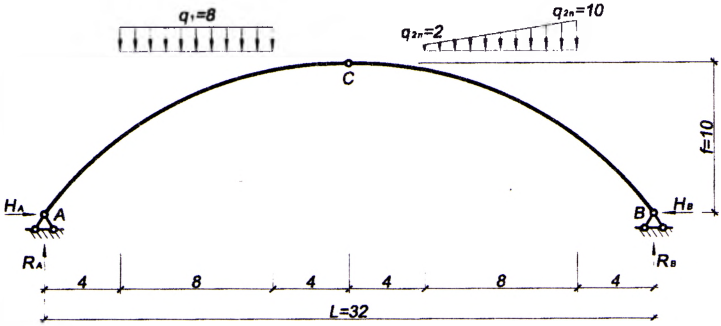


Рисунок 5.1

Определим опорные реакции арки, используя уравнения равновесия:

$$\sum M_B = 0;\; R_A \cdot L - q_1 \cdot 8 \cdot 24 - q_{2Л} \cdot 8 \cdot 8 - \tfrac{1}{2} \cdot (q_{2П} - q_{2Л}) \cdot 8 \cdot \left(\tfrac{1}{3} \cdot 8 + 4\right) = 0;$$

$$R_A = \frac{q_1 \cdot 8 \cdot 24 + q_{2Л} \cdot 8 \cdot 8 + \tfrac{1}{2} \cdot (q_{2П} - q_{2Л}) \cdot 8 \cdot \left(\tfrac{1}{3} \cdot 8 + 4\right)}{L};$$

$$\sum M_A = 0;\; -R_B \cdot L + q_1 \cdot 8 \cdot 8 + q_{2Л} \cdot 8 \cdot 24 + \tfrac{1}{2} \cdot (q_{2П} - q_{2Л}) \cdot 8 \cdot \left(\tfrac{2}{3} \cdot 8 + 20\right) = 0;$$

$$R_B = \frac{q_1 \cdot 8 \cdot 8 + q_{2Л} \cdot 8 \cdot 24 + \tfrac{1}{2} \cdot (q_{2П} - q_{2Л}) \cdot 8 \cdot \left(\tfrac{2}{3} \cdot 8 + 20\right)}{L};$$

$$\sum M_C^{лев} = 0;\; -H_A \cdot f + R_A \cdot \tfrac{L}{2} - q_1 \cdot 8 \cdot 8 = 0; \qquad H_A = \frac{R_A \cdot \tfrac{L}{2} - q_1 \cdot 8 \cdot 8}{f}.$$

Так как арка нагружена только вертикальными нагрузками, горизонтальные реакции опор будут одинаковы: $H = H_A = H_B$.

Проверка нахождения реакций опор:

$$\sum M_C^{пр} = 0; \ -R_B \cdot L/2 + H_B \cdot f + q_{2Л} \cdot 8 \cdot 8 + 1/2 \cdot (q_{2П} - q_{2Л}) \cdot 8 \cdot \left(2/3 \cdot 8 + 4\right) = 0.$$

Усилия в арке определяем методом сечений. Разбиваем пролет арки на n одинаковых частей ($\Delta x = L/n$), обеспечивающих достаточное число сечений для представления нелинейных по длине арки зависимостей. Отметим, что, чем на большее число частей разобьем пролет, тем меньше будет шаг разбиения Δx и тем больше будем иметь расчетных сечений для вычисления ординат усилий, и тем более точно можно будет отобразить эпюры усилий.

В данном примере разобьем пролет арки на 16 частей ($\Delta x = 32/16 = 2$ м) и получим 17 расчетных сечений (0, 1, 2, …, 16).

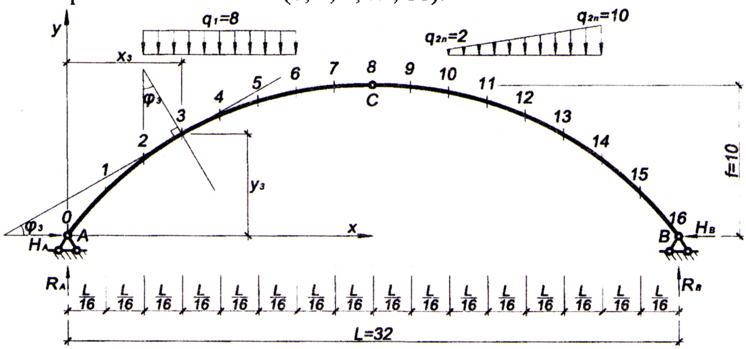


Рисунок 5.2

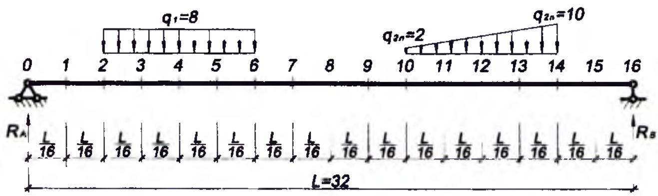


Рисунок 5.3

Величины усилий M, Q, N в сечениях арки определяются по формулам:

$$M_i = Mo_i - H \cdot y_i; \quad Q_i = Qo_i \cos\varphi_i - H \sin\varphi_i; \quad N_i = -(Qo_i \sin\varphi_i + H \cos\varphi_i),$$

где Mo_i, Qo_i – изгибающий момент и поперечная сила в i-м сечении простой двухопорной балки, имеющей такой же пролет, как арка, и нагруженной такой же нагрузкой, как арка (рисунок 5.3); H – распор арки; y_i, $\sin\varphi_i$, $\cos\varphi_i$ – ордината, синус и косинус угла наклона касательной к оси арки по отношению к горизонтальной оси (либо угол между нормалью к оси арки и вертикальной осью) для i-го сечения арки (рисунок 5.2).

Абсцисса x_i для каждого (i-го) сечения определяется выражением:

$$x_i = \Delta x \cdot i.$$

Ординаты y_i, синусы и косинусы углов наклона касательных ($\sin\varphi_i$, $\cos\varphi_i$) для сечений найдем, используя геометрические зависимости, представленные для различных очертаний осей арок в приложении к данному разделу.

Все расчеты для сечений и построения эпюр усилий выполняем в системе компьютерной алгебрыMathCAD.

Геометрические характеристики трехшарнирных арок:

а) для круговых арок:

$$R = \frac{4f^2 + l^2}{8f}; \qquad y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - R + f;$$

$$\sin\varphi = \frac{l - 2x}{2R}; \qquad \cos\varphi = \frac{y + R - f}{R} = \sqrt{1 - \sin^2\varphi}; \qquad (5.1)$$

б) для параболических арок:

$$y = \frac{4f}{l^2}x(l - x); \qquad \operatorname{tg}\varphi = y' = \frac{4f}{l^2}(l - 2x);$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}; \qquad \sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi \cdot \cos\varphi; \qquad (5.2)$$

в) для синусоидальных арок:

$$y = f\sin\frac{\pi x}{l}; \quad \operatorname{tg}\varphi = y' = \frac{\pi f}{l}\cos\frac{\pi x}{l}; \quad \sin\varphi \text{ и } \cos\varphi \to \text{см. (4.2)}; \qquad (5.3)$$

г) для эллиптических арок:

$$y = k\sqrt{a^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - ka + f; \qquad \operatorname{tg}\varphi = y' = \frac{k\left(l/2 - x\right)}{\sqrt{a^2 - \left(l/2 - x\right)^2}}; \qquad (5.4)$$

где $\quad a = \dfrac{f}{2k} + \dfrac{kl^2}{8f}; \qquad k = \dfrac{4f}{l}; \qquad \sin\varphi$ и $\cos\varphi \to$ см. (5.2);

д) для гиперболических арок:

$$y = f + a - \sqrt{\frac{\left(l/2 - x\right)^2}{k^2} + a^2}; \qquad \operatorname{tg}\varphi = y' = \frac{\left(l/2 - x\right)}{k^2\sqrt{\frac{\left(l/2 - x\right)^2}{k^2} + a^2}}; \qquad (5.5)$$

где $\quad a = \dfrac{l^2}{8k^2 f} - \dfrac{f}{2}; \qquad k = \dfrac{l}{\pi f}; \qquad \sin\varphi$ и $\cos\varphi \to$ см. (5.2).

Круговая арка $L := 32$ - пролет арки $f := 10$ - стрела подъема арки

Опорные реакции

$$Ra := \frac{8\cdot 8\cdot 24 + 2\cdot 8\cdot 8 + \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 8 + 4\right)}{L} = 58.667 \qquad Rb := \frac{8\cdot 8\cdot 8 + 2\cdot 8\cdot 24 + \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 8 + 20\right)}{L} = 53.333$$

$$Ha := \frac{Ra\cdot\frac{L}{2} - 8\cdot 8\cdot 8}{f} = 42.667 \qquad Hb := Ha = 42.667 \qquad H := Ha = 42.667$$

Проверка

$$SMcpr := -Rb\cdot\frac{L}{2} + Hb\cdot 10 + 2\cdot 8\cdot 8 + \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 8 + 4\right) = 0$$

Определение координат сечений, синусов и косинусов угла касательной

$i := 0 .. 16$ - массив сечений

$$\Delta x := \frac{L}{16} = 2 \qquad x_i := i\cdot\Delta x \qquad R := \frac{4\cdot f^2 + L^2}{8\cdot f} \qquad y_i := \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2} - x_i\right)^2} - R + f$$

$$\sin\varphi_i := \frac{L - 2\cdot x_i}{2\cdot R} \qquad \cos\varphi_i := \frac{y_i + R - f}{R}$$

x =

	0
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14
8	16
9	18
10	20
11	22
12	24
13	26
14	28
15	30
16	32

y =

	0
0	0
1	3.193
2	5.347
3	6.925
4	8.101
5	8.958
6	9.545
7	9.887
8	10
9	9.887
10	9.545
11	8.958
12	8.101
13	6.925
14	5.347
15	3.193
16	0

Определение балочных усилий Mo и Qo

левая сторона

$Mo_0 := 0$ $\qquad Qo_0 := Ra = 58.667$

$Mo_1 := Ra\cdot 2 = 117.333$ $\qquad Qo_1 := Ra = 58.667$

$Mo_2 := Ra\cdot 4 = 234.667$ $\qquad Qo_2 := Ra = 58.667$

$Mo_3 := Ra\cdot 6 - 8\cdot 2\cdot 1 = 336$ $\qquad Qo_3 := Ra - 8\cdot 2 = 42.667$

$Mo_4 := Ra\cdot 8 - 8\cdot 4\cdot 2 = 405.333$ $\qquad Qo_4 := Ra - 8\cdot 4 = 26.667$

$Mo_5 := Ra\cdot 10 - 8\cdot 6\cdot 3 = 442.667$ $\qquad Qo_5 := Ra - 8\cdot 6 = 10.667$

$Mo_6 := Ra\cdot 12 - 8\cdot 8\cdot 4 = 448$ $\qquad Qo_6 := Ra - 8\cdot 8 = -5.333$

$Mo_7 := Ra\cdot 14 - 8\cdot 8\cdot 6 = 437.333$ $\qquad Qo_7 := Ra - 8\cdot 8 = -5.333$

$Mo_8 := Ra\cdot 16 - 8\cdot 8\cdot 8 = 426.667$ $\qquad Qo_8 := Ra - 8\cdot 8 = -5.333$

правая сторона

$Mo_{16} := 0$ $\qquad Qo_{16} := -Rb = -53.333$

$Mo_{15} := Rb\cdot 2 = 106.667$ $\qquad Qo_{15} := -Rb = -53.333$

$Mo_{14} := Rb\cdot 4 = 213.333$ $\qquad Qo_{14} := -Rb = -53.333$

$$Mo_{13} := Rb\cdot 6 - 8\cdot 2\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 2\right) = 301.333 \qquad Qo_{13} := -Rb + 8\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = -35.333$$

$$Mo_{12} := Rb\cdot 8 - 6\cdot 4\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 4\right) = 357.333 \qquad Qo_{12} := -Rb + 6\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 = -21.333$$

$$Mo_{11} := Rb\cdot 10 - 4\cdot 6\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 6\right) = 389.333 \qquad Qo_{11} := -Rb + 4\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6 = -11.333$$

$$Mo_{10} := Rb\cdot 12 - 2\cdot 8\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 8\right) = 405.333 \qquad Qo_{10} := -Rb + 2\cdot 8 + \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8 = -5.333$$

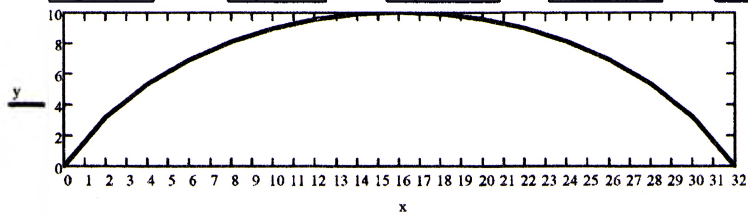
$$Mo_9 := Rb\cdot 14 - 2\cdot 8\cdot 6 - \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 8 + 2\right) = 416 \qquad Qo_9 := -Rb + 2\cdot 8 + \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8 = -5.333$$

$$Mo_8 := Rb\cdot 16 - 2\cdot 8\cdot 8 - \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 8 + 4\right) = 426.667 \qquad Qo_8 := -Rb + 2\cdot 8 + \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8 = -5.333$$

Определение усилий M, Q, N в арке

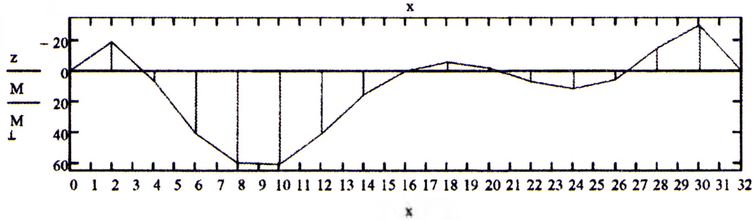
$$M_i := Mo_i - H\cdot y_i \qquad Q_i := Qo_i\cdot\cos\varphi_i - H\cdot\sin\varphi_i \qquad N_i := -\left(Qo_i\cdot\sin\varphi_i + H\cdot\cos\varphi_i\right)$$

	$\sin\varphi$ = 0	$\cos\varphi$ = 0	M = 0	Q = 0	N = 0
0	0.899	0.438	0	-12.644	-71.431
1	0.787	0.618	-18.89	2.673	-72.492
2	0.674	0.739	6.534	14.566	-71.064
3	0.562	0.827	40.513	11.327	-59.267
4	0.449	0.893	59.693	4.646	-50.1
5	0.337	0.941	60.447	-4.34	-43.765
6	0.225	0.974	40.758	-14.785	-40.377
7	0.112	0.994	15.476	-10.094	-41.797
8	0	1	0	-5.333	-42.667
9	-0.112	0.994	-5.857	-0.506	-42.996
10	-0.225	0.974	-1.909	4.391	-42.774
11	-0.337	0.941	7.113	3.712	-43.99
12	-0.449	0.893	11.693	0.119	-47.703
13	-0.562	0.827	5.846	-5.26	-55.147
14	-0.674	0.739	-14.799	-10.627	-67.468
15	-0.787	0.618	-29.556	0.621	-68.297
16	-0.899	0.438	0	14.981	-66.637

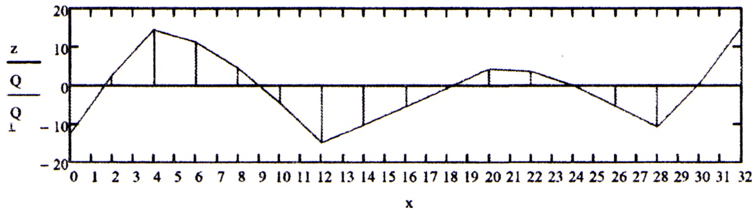


Круговая арка

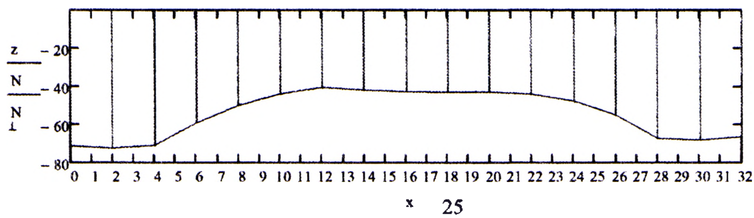
$z_i := 0$



Эпюра M



Эпюра Q



Эпюра N

Лабораторная работа № 6

Определение перемещений в трехшарнирных арках

Цель работы: изучить процедуру определения перемещений в трехшарнирных арках с использованием численного интегрирования.

Порядок выполнения работы:

1) определить перемещение одного из сечений арки, используя формулу Мора и один из численных способов вычисления интегралов, для чего:

1.1) построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил от действия внешней нагрузки, от которой определяется перемещение;

1.2) в точке (в сечении), перемещение которой определяется, в направлении искомого перемещения приложить единичную «силу» и от ее действия построить единичные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил;

1.3) вычислить перемещение по формуле Мора, используя для вычисления интегралов один из численных способов (например, формулу трапеций);

2) исследовать влияние изгибающих моментов, поперечных и продольных сил на величину перемещения сечения арки, определив вклад в перемещение учета каждой из внутренних сил.

Примечание: все необходимые расчеты выполнить в системе компьютерной алгебры MathCAD.

Пример расчета. Выполним расчет трехшарнирной арки, рассмотренной ранее в лабораторной работе № 4, что позволяет воспользоваться ее результатами, то есть эпюрами M_P, Q_P, N_P. Определим вертикальное перемещение, например, 4-го сечения (рис 6.1), в котором изгибающий момент от действия внешней нагрузки достигает наибольшей величины.

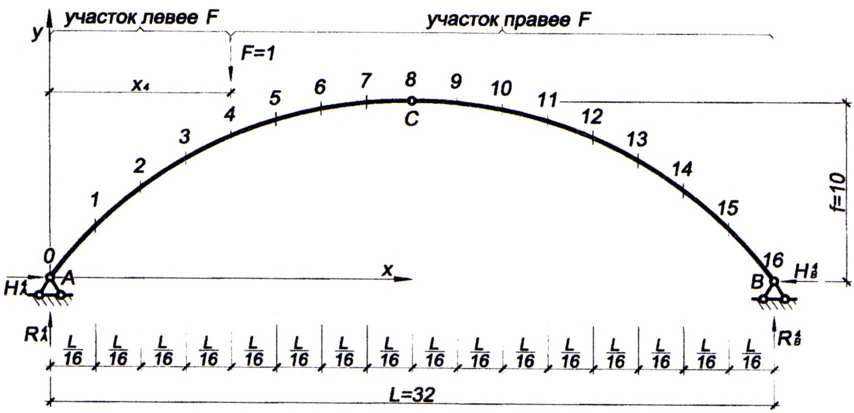


Рисунок 6.1

Перемещение некоторого (i-го) сечения арки в общем случае (с учетом поперечных и продольных сил) определяется по формуле Мора вида:

$$\Delta_i = \int_0^L \frac{\overline{Mi}\,M_P\,dx}{EJ} + \int_0^L \eta \frac{\overline{Qi}\,Q_P dx}{GA} + \int_0^L \frac{\overline{Ni}\,N_P\,dx}{EA},$$

где EJ, GA, EA – жесткости арки соответственно при изгибе, сдвиге и растяжении-сжатии;

η – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по высоте сечения при изгибе (для прямоугольного сечения равен 1,2);

$\overline{Mi}$, $\overline{Qi}$, $\overline{Ni}$ – законы изменения единичных эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в арке от действия единичной сосредоточенной нагрузки, приложенной в i-ом сечении, в котором определяется перемещение;

M_P, Q_P, N_P – законы изменения эпюр M, Q и N в арке от действия внешних нагрузок (были получены ранее в лабораторной работе № 5).

При замене для вычисления интегралов Мора интегрирования численным суммированием получим:

$$\Delta_i = \frac{\Delta x}{EJ}\sum_{j=1}^{n}\overline{Mi_j}M_{Pj} + \eta\frac{\Delta x}{GA}\sum_{j=1}^{n}\overline{Qi_j}Q_{Pj} + \frac{\Delta x}{EA}\sum_{j=1}^{n}\overline{Ni_j}N_{Pj}.$$

Разбили арку на 16 частей и хотим определить в 4-м сечении, тогда выражение примет вид:

$$\Delta_4 = \Delta_4^M + \Delta_4^Q + \Delta_4^N = \frac{\Delta x}{EJ}\sum_{j=1}^{16}\overline{M4_j}M_{Pj} + \eta\frac{\Delta x}{GA}\sum_{j=1}^{16}\overline{Q4_j}Q_{Pj} + \frac{\Delta x}{EA}\sum_{j=1}^{16}\overline{N4_j}N_{Pj}.$$

Численное вычисление будем производить по формуле трапеций.

Для построения единичных эпюр рассмотрим арку с приложенной единичной сосредоточенной силой $F = 1$ в 4-м сечении (рис. 6.1).

Определим опорные реакции в такой арке:

$$\sum M_B = 0;\quad R_A^4 = \frac{L - x_4}{L};\qquad \sum M_A = 0;\quad R_B^4 = \frac{x_4}{L};$$

$$\sum M_C^{лев} = 0;\quad H_A^4 = \frac{L/2\,(R_A^4 - 1) + x_4}{f};\qquad \sum X = 0;\quad H_B^4 = H_A^4.$$

Так как эпюра изгибающих моментов в точке приложения силы F=1 будет иметь излом, а эпюры поперечных и продольных сил будут иметь скачок, то зависимости изменения эпюр этих усилий слева и справа от силы будут различными, и далее в расчете необходимо рассматривать два участка арки (левее и правее единичной силы F). Соответственно будем рассматривать два массива сечений: iL (с 0-го сечения по 4-е включительно) и iR (с 4-го сечения по 16-е включительно). Значения балочных усилий Mo и Qo определяются:

$Mo_{iL}^4 = R_A^4 \cdot x_{iL}$; $\quad Qo_{iL}^4 = R_A^4$; $\quad$ (для сечений левее единичной нагрузки),

$Mo_{iR}^4 = R_A^4 \cdot x_{iR} - 1\cdot(x_{iR} - x_4)$; $\quad Qo_{iR}^4 = R_A^4 - 1$; $\quad$ (правее единичной нагрузки).

Значения усилий M, Q, N в сечениях арки определяются соответственно:

$$M_{iL} = Mo_{iL} - H \cdot y_{iL}; \quad Q_{iL} = Qo_{iL} \cos\varphi_{iL} - H \sin\varphi_{iL}; \quad N_{iL} = -(Qo_{iL} \sin\varphi_{iL} + H \cos\varphi_{iL}).$$

$$M_{iR} = Mo_{iR} - H \cdot y_{iR}; \quad Q_{iR} = Qo_{iR} \cos\varphi_{iR} - H \sin\varphi_{iR}; \quad N_{iR} = -(Qo_{iR} \sin\varphi_{iR} + H \cos\varphi_{iR}).$$

Слагаемые Δ_4^M, Δ_4^Q, Δ_4^N будут определяться как сумма слагаемых выражения перемещения для правого и левого участка арки:

$$\Delta_4^M = \Delta_{4\,лев}^M + \Delta_{4\,прав}^M; \quad \Delta_4^Q = \Delta_{4\,лев}^Q + \Delta_{4\,прав}^Q; \quad \Delta_4^N = \Delta_{4\,лев}^N + \Delta_{4\,прав}^N.$$

Для исследования влияния усилий M, Q, N на перемещение сечения определим вклад каждого слагаемого выражения перемещения в общую сумму:

$$\frac{\Delta_4^M}{\Delta_4} \cdot 100\%, \quad \frac{\Delta_4^Q}{\Delta_4} \cdot 100\%, \quad \frac{\Delta_4^N}{\Delta_4} \cdot 100\%.$$

Выполнив расчеты в системе компьютерной алгебры MathCAD и проанализировав результаты, можно сделать следующий *вывод*:

наибольшее влияние на величину перемещения оказывают изгибающие моменты, влияние поперечных и продольных сил составляет 3,7%, то есть невелико, а влияние поперечных составляет 0,435%, то есть незначительно.

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры MathCAD .

$EJ := 1\cdot 10^{7}$ - жесткость арки при изгибе

$GA := 1.28\times 10^{8}$ - жесткость арки при сдвиге

$EA := 3.33\times 10^{8}$ - жесткость арки при растяжении-сжатии

$\eta := 1.2$ - коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по высоте сечения при изгибе (для прямоугольного сечения)

Определение опорных реакций при приложении единичной нагрузки в 4-ом сечении

$R4a := \dfrac{L - x_4}{L} = 0.75$ $\quad R4b := \dfrac{x_4}{L} = 0.25$ $\quad H4a := \dfrac{\frac{L}{2}(R4a - 1) + x_4}{f} = 0.4$ $\quad H4b := H4a = 0.4$

Проверка: $-R4b\cdot\dfrac{L}{2} + H4b\cdot f = 0$

Рассмотрим два участка арки (левее и правее единичной нагрузки)

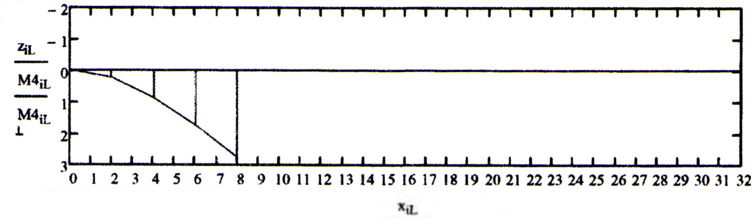
$iL := 0..4$ - массив сечений левее единичной нагрузки

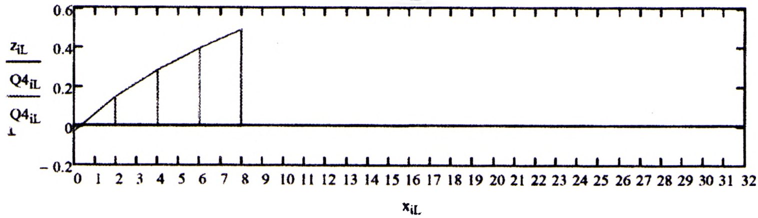
Балочные значения Mo и Qo (левее единичной нагрузки)

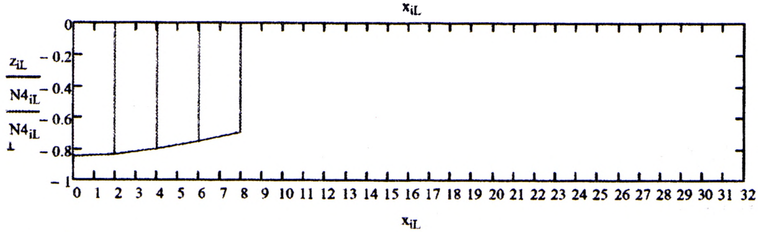
$M4o_{iL} := R4a\cdot x_{iL}$ $\quad Q4o_{iL} := R4a$

Определение усилий M, Q, N в арке (левее единичной нагрузки)

$M4_{iL} := M4o_{iL} - H4a\cdot y_{iL}$ $\quad Q4_{iL} := Q4o_{iL}\cdot\cos\varphi_{iL} - H4a\cdot\sin\varphi_{iL}$ $\quad N4_{iL} := -\left(Q4o_{iL}\cdot\sin\varphi_{iL} + H4a\cdot\cos\varphi_{iL}\right)$







$$\Delta M4L := \frac{\Delta x}{6\cdot EJ}\sum_{j=1}^{4}\left(2\cdot M4_{j-1}\cdot M_{j-1} + M4_{j-1}\cdot M_j + M4_j\cdot M_{j-1} + 2\cdot M4_j\cdot M_j\right) = 2.873\times 10^{-5}$$ перемножение единичной и грузовой эпюр M лев. участка

$$\Delta Q4L := \frac{\eta\cdot\Delta x}{6\cdot GA}\sum_{j=1}^{4}\left(2\cdot Q4_{j-1}\cdot Q_{j-1} + Q4_{j-1}\cdot Q_j + Q4_j\cdot Q_{j-1} + 2\cdot Q4_j\cdot Q_j\right) = 1.836\times 10^{-7}$$ - перемножение единичной и грузовой эпюр Q лев. участка

$$\Delta N4L := \frac{\Delta x}{6\cdot EA}\sum_{j=1}^{4}\left(2\cdot N4_{j-1}\cdot N_{j-1} + N4_{j-1}\cdot N_j + N4_j\cdot N_{j-1} + 2\cdot N4_j\cdot N_j\right) = 1.26\times 10^{-6}$$ - перемножение единичной и грузовой эпюр N лев. участка

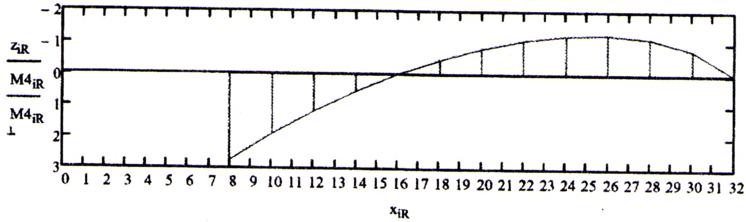
$iR := 4 .. 16$ - массив сечений правее единичной нагрузки

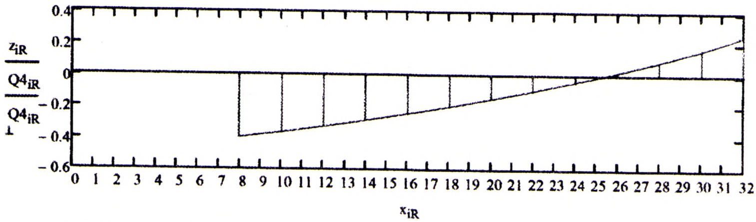
Балочные значения Mo и Qo (правее единичной нагрузки)

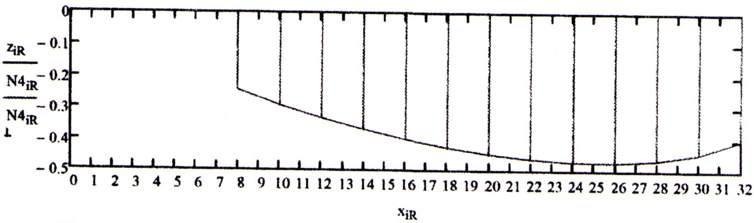
$M4o_{iR} := R4a \cdot x_{iR} - 1 \cdot (x_{iR} - x_4)$ $\quad Q4o_{iR} := R4a - 1$

Определение усилий M, Q, N в арке (правее единичной нагрузки)

$M4_{iR} := M4o_{iR} - H4a \cdot y_{iR}$ $\quad Q4_{iR} := Q4o_{iR} \cdot \cos\varphi_{iR} - H4a \cdot \sin\varphi_{iR}$ $\quad N4_{iR} := -(Q4o_{iR} \cdot \sin\varphi_{iR} + H4a \cdot \cos\varphi_{iR})$







$$\Delta M4R := \frac{\Delta x}{6 \cdot EJ} \sum_{i=5}^{16} \left(2 \cdot M4_{j-1} \cdot M_{j-1} + M4_{j-1} \cdot M_j + M4_j \cdot M_{j-1} + 2 \cdot M4_j \cdot M_j\right) = 5.213 \times 10^{-5}$$ - перемножение единичной и грузовой эпюр M прав. участка

$$\Delta Q4R := \frac{\eta \cdot \Delta x}{6 \cdot GA} \sum_{i=5}^{16} \left(2 \cdot Q4_{j-1} \cdot Q_{j-1} + Q4_{j-1} \cdot Q_j + Q4_j \cdot Q_{j-1} + 2 \cdot Q4_j \cdot Q_j\right) = 1.817 \times 10^{-7}$$ - перемножение единичной и грузовой эпюр Q прав. участка

$$\Delta N4R := \frac{\Delta x}{6 \cdot EA} \sum_{j=5}^{16} \left(2 \cdot N4_{j-1} \cdot N_{j-1} + N4_{j-1} \cdot N_j + N4_j \cdot N_{j-1} + 2 \cdot N4_j \cdot N_j\right) = 1.477 \times 10^{-6}$$ - перемножение единичной и грузовой эпюр N прав. участка

Слагаемые выражения перемещения 4-го сечения

$\Delta M4 := \Delta M4L + \Delta M4R = 8.086 \times 10^{-5}$

$\Delta Q4 := \Delta Q4L + \Delta Q4R = 3.653 \times 10^{-7}$

$\Delta N4 := \Delta N4L + \Delta N4R = 2.737 \times 10^{-6}$

Перемещение 4-го сечения: $\quad \Delta 4 := \Delta M4 + \Delta Q4 + \Delta N4 = 8.396 \times 10^{-5}$

Вклад кадого из слагаемых

$\frac{\Delta M4}{\Delta 4} \cdot 100\% = 96.306\%$ $\quad \frac{\Delta Q4}{\Delta 4} \cdot 100\% = 0.435\%$ $\quad \frac{\Delta N4}{\Delta 4} \cdot 100\% = 3.259\%$

Лабораторная работа № 7

Деформированный вид арки

Цель работы: определить перемещения точек трехшарнирной арки с использованием численного способа вычисления интегралов и получение ее деформированного вида.

Порядок выполнения работы:

1) разбить пролет арки на заданное число частей, определить расчетные сечения;

2) определить перемещения расчетных сечений арки, выполнив расчет по формуле Мора с учетом только изгибающих моментов и используя для численного суммирования формулу трапеций;

3) представить деформированный вид арки;

4) для трех наиболее нагруженных сечений определить перемещения, используя способ левых прямоугольников; сравнить полученные перемещения с результатами, полученными с помощью формулы трапеций.

Все расчеты и построения выполнить в системе компьютерной алгебры MathCAD.

Пример расчета. Для примера возьмём расчет арки, рассмотренной ранее в лабораторных работах № 5 и № 6.

Для получения наглядного представления деформированного вида арки, находящейся под действием внешней нагрузки, необходимо знать значения перемещений в каждом сечении арки.

Перемещение k-го сечения арки без учета поперечных и продольных сил определяется по формуле Мора вида:

$$\Delta_k = \int_0^S \frac{\overline{M1_k} M_P ds}{EJ},$$

где S – длина оси арки; $ds = \dfrac{dx}{\cos\varphi}$ – элементарная длина дуги арки; EJ – жесткость арки при изгибе; $\overline{M1_k}$ – зависимость изменения единичной эпюры изгибающих моментов от действия единичной сосредоточенной нагрузки, приложенной в k-м сечении; M_P – зависимость изменения эпюры M в арке от действия внешних нагрузок (получена ранее в лабораторной работе № 5).

Вычисление интегралов мора выполним с использованием численного суммирования по формуле трапеций:

$$\Delta_k = \frac{\Delta x}{6EJ}\sum_{j=1}^{n} \frac{2\overline{M1^{лев}_{k\,j}}M^{лев}_{P\,j} + \overline{M1^{лев}_{k\,j}}M^{пр}_{P\,j} + \overline{M1^{пр}_{k\,j}}M^{лев}_{P\,j} + 2\overline{M1^{пр}_{k\,j}}M^{пр}_{P\,j}}{1}.,$$

где n – число частей, на которые разбивается пролет арки (в данном случае $n = 16$).

Для построения единичных эпюр рассмотрим арку с приложенной вертикальной единичной сосредоточенной силой $F = 1$ в k-ом сечении (рис. 7.1).

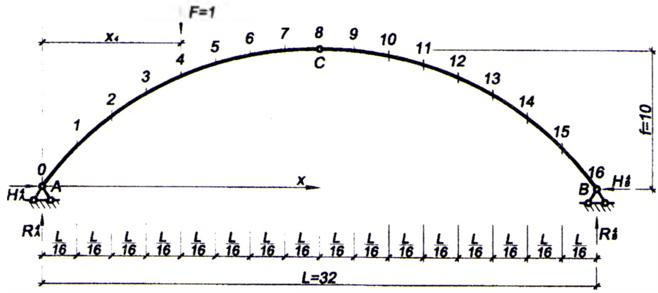


Рисунок 7.1

Опорные реакции в рассматриваемой арке от действия единичной силы:

$$\sum M_B = 0;\quad R1_A^k = \frac{L - x_k}{L};\qquad \sum M_A = 0;\quad R1_B^k = \frac{x_k}{L};$$

$$\sum M_C^{лев} = 0;\quad H1_A^k = \frac{L/2\,(R1_A^k - 1) + x_k}{f},\ если\ x_k < \frac{L}{2};\quad H1_A^k = \frac{R1_A^k \cdot L}{2f},\ если\ x_k \ge \frac{L}{2};$$

$$\sum X = 0;\qquad H1_B^k = H1_A^k.$$

Значения балочных усилий $M1o$ определяются:

$$M1o_i^k = R1_A^k \cdot x_i - 1 \cdot (x_i - x_k),\ если\ x_k < x_i;\qquad M1o_i^k = R1_A^k \cdot x_i,\ если\ x_k \ge x_i;$$

Значения значений единичных эпюр $M1$ в сечениях арки определяются:

$$M1_i = M1o_i - H1_A^k \cdot y_i;$$

Расчеты выполняем в системе компьютерной алгебры MathCAD. Для построения деформированного вида будем использовать график, наложенный поверх графика очертания арки, подобрав необходимый масштабный коэффициент для отображения перемещений (из-за их малой величины).

Помимо формулы трапеций, производить «перемножение» эпюр для определения перемещений можно несколькими другими способами: как более простыми (способом левых прямоугольников, способом правых прямоугольников), так и более точными (по формуле Симпсона).

Например, выберем три сечения, в которых получились наибольшие перемещения (в данном случае – 4, 8, 9), найдем в них перемещения способом левых прямоугольников и убедимся, что этот способ менее точен в сравнении с формулой трапеций.

$$\Delta_k^{ЛП} = \frac{\Delta x}{EJ}\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{M1}_{k\,j} M_P}{\cos\varphi_j} = \frac{\Delta x}{EJ}\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{M1}_{k\,j}^{лев} M_{P\,j}^{лев}}{\cos\varphi_j}.$$

Расхождение результатов, полученных двумя способами: $\lambda_i = \left|\frac{\Delta_i^{TP} - \Delta_i^{ЛП}}{\Delta_i^{TP}}\right| \cdot 100\%$.

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры MathCAD.

$EJ := 1 \cdot 10^{7}$ - жесткость арки при изгибе

$GA := 1.28 \times 10^{8}$ - жесткость арки при сдвиге

$EA := 3.33 \times 10^{8}$ - жесткость арки при растяжении-сжатии

$\eta := 1.2$ - коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по высоте сечения при изгибе (для прямоугольного сечения)

$k := 0 .. 16$ - массив сечений арки, к каждому из которых будет прикладываться единичная нагрузка

Определение опорных реакций при приложении единичной нагрузки в каждом сесечении k

$$R1a_k := \frac{L - x_k}{L} \qquad R1b_k := \frac{x_k}{L} \qquad H1a_k := \begin{cases} \dfrac{\frac{L}{2}\left(R1a_k - 1\right) + x_k}{f} & \text{if } x_k < \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{R1a_k \cdot L}{2 \cdot f} & \text{if } x_k \ge \dfrac{L}{2} \end{cases} \qquad H1b_k := H1a_k$$

Определение значений балочных эпюр M1o

$$M1o_{k,i} := \begin{cases} R1a_k \cdot x_i - 1 \cdot \left(x_i - x_k\right) & \text{if } x_k < x_i \\ R1a_k \cdot x_i & \text{if } x_k \ge x_i \end{cases}$$

Определение значений единичных эпюр M1 арки

$$M1_{k,i} := M1o_{k,i} - H1a_k \cdot y_i$$

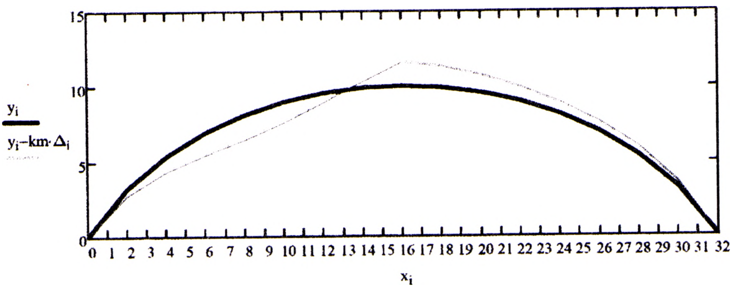
Определение перемещений (по формуле трапеций) для каждого сечения k

$$\Delta_k := \frac{\Delta x}{6 \cdot EJ} \sum_{j=1}^{16} \left(2 \cdot M1_{k,j-1} \cdot M_{j-1} + M1_{k,j-1} \cdot M_j + M1_{k,j} \cdot M_{j-1} + 2 \cdot M1_{k,j} \cdot M_j\right)$$

$\Delta =$

	0
0	0
1	$2.216 \cdot 10^{-5}$
2	$4.892 \cdot 10^{-5}$
3	$7.25 \cdot 10^{-5}$
4	$8.086 \cdot 10^{-5}$
5	$6.657 \cdot 10^{-5}$
6	$2.947 \cdot 10^{-5}$
7	$-2.357 \cdot 10^{-5}$
8	$-8.345 \cdot 10^{-5}$
9	$-7.321 \cdot 10^{-5}$
10	$-6.129 \cdot 10^{-5}$
11	$-4.894 \cdot 10^{-5}$
12	$-3.914 \cdot 10^{-5}$
13	$-3.332 \cdot 10^{-5}$
14	$-2.886 \cdot 10^{-5}$
15	$-1.886 \cdot 10^{-5}$
16	0

Деформированный вид арки $\quad km := 20000$ - коэффициент масштаба



Выберем три сечения, имеющих наибольшие перемещения (в данном случае - 4, 8, 9)

Производить перемножение эпюр для определения перемещений можно несколькими способами:

по формуле трапеций (более точный)

способом левых прямоугольников (более простой)

Расхождение:

$\Delta_4 = 8.086 \times 10^{-5}$ $\qquad \Delta left_4 := \dfrac{\Delta x}{EJ} \sum_{j=1}^{16} \left(M1_{4,j-1} \cdot M_{j-1}\right) = 8.462 \times 10^{-5}$ $\qquad \left|\dfrac{\Delta_4 - \Delta left_4}{\Delta_4}\right| \cdot 100\% = 4.653\,\%$

$\Delta_8 = -8.345 \times 10^{-5}$ $\qquad \Delta left_8 := \dfrac{\Delta x}{EJ} \sum_{j=1}^{16} \left(M1_{8,j-1} \cdot M_{j-1}\right) = -8.388 \times 10^{-5}$ $\qquad \left|\dfrac{\Delta_8 - \Delta left_8}{\Delta_8}\right| \cdot 100\% = 0.521\,\%$

$\Delta_9 = -7.321 \times 10^{-5}$ $\qquad \Delta left_9 := \dfrac{\Delta x}{EJ} \sum_{j=1}^{16} \left(M1_{9,j-1} \cdot M_{j-1}\right) = -7.398 \times 10^{-5}$ $\qquad \left|\dfrac{\Delta_9 - \Delta left_9}{\Delta_9}\right| \cdot 100\% = 1.053\,\%$

Лабораторная работа № 8

Расчет двухшарнирной арки с использованием численного интегрирования

Цель работы: изучить расчет усилий и построение эпюр усилий в двухшарнирный арках с использованием численного подхода.

Порядок выполнения работы:

1) определить опорные реакции и выполнить расчет усилий M, Q, N в сечениях арки с заданным шагом, обеспечивающим достаточно точное представление нелинейных по длине арки зависимостей усилий;

2) построить для рассматриваемой арки эпюры усилий M, Q, N;

3) выполнить проверку выполнения общих закономерностей изменения эпюр внутренних сил M, Q и N.

Примечание: все необходимые расчеты выполнить в системе компьютерной алгебры MathCAD.

Пример расчета. Выполним расчет двухшарнирной арки с затяжкой представленной на рисунке 8.1.

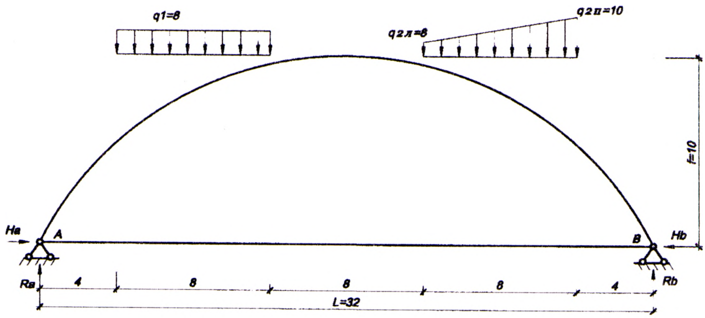


Рисунок 8.1

Жесткость арки принята постоянной по длине стержня ($EJ = Const$), жесткость затяжки принята равной $EA_{зат} = 5EJ$ ($k_{зат} = 5$). Ось стержня арки определяется круговой зависимостью, как и в лабораторной работе №4. Основную систему метода сил получим, разрезав затяжку.

Усилия в арке определяем методом сечений. Разбиваем пролет арки на n одинаковых частей ($\Delta x = L/n$), обеспечивающих достаточное число сечений для представления нелинейных по длине арки зависимостей. Отметим, что, чем на большее число частей разобьем пролет, тем меньше будет шаг разбиения Δx и тем больше будем иметь расчетных сечений для вычисления ординат усилий, и тем более точно можно будет отобразить эпюры усилий.

В данном примере разобьем пролет арки на 16 частей ($\Delta x = 32/16 = 2$ м) и получим 17 расчетных сечений (0, 1, 2, …, 16).

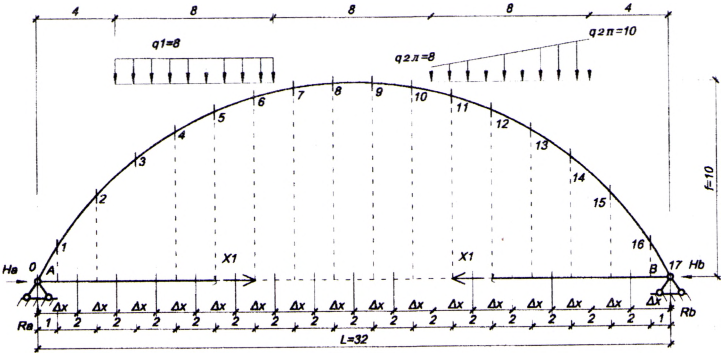


Рисунок 8.2

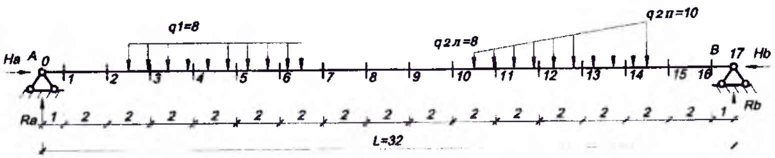


Рисунок 8.3

Расчетные величины (y, sin φ, cos φ, M_P и т.д.) необходимо вычислять в средних точках участков Δ x, координаты которых можно определить по выражению: $x_i = 0{,}5\Delta\ x + \Delta\ x\,(i-1)$.

Для арок постоянного сечения жесткости их будут константами и их можно вынести за суммы. Если ввести при этом обозначения:

$$k_G = \frac{GA}{EJ}; \qquad k_N = \frac{EA}{EJ}; \qquad k_{зат} = \frac{EA_{зат}}{EJ}.$$

$$\delta_{11} = \frac{\Delta x}{EJ}\left(\sum_1^n \frac{y^2}{\cos\varphi} + \frac{\eta}{k_G}\sum_1^n \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} + \frac{1}{k_N}\sum_1^n \cos\varphi + \frac{n}{k_{зат}}\right); \Delta_{11} = -\frac{\Delta x}{EJ}\left(\sum_1^n \frac{y\,M_P}{\cos\varphi} + \frac{\eta}{k_G}\sum_1^n \frac{\sin\varphi\, Q_P}{\cos\varphi} + \frac{1}{k_N}\sum_1^n N_P\right).$$

Вычислив перемещения δ_{11} и Δ_{11}, решаем уравнение и находим неизвестное метода сил $X_1 = -\Delta_{11} / \delta_{11}$.

После этого можно построить окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в заданной статически неопределимой арке по формулам:

$$M = \overline{M}_1 \cdot X_1 + M_P = -yX_1 + M_P;$$

$$Q = \overline{Q}_1 \cdot X_1 + Q_P = -\sin\varphi\, X_1 + Q_P;$$

$$N = \overline{N}_1 \cdot X_1 + N_P = -\cos\varphi\, X_1 + N_P;$$

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры MathCAD.

Круговая арка $L := 32$ –пролет арки $f := 10$ –стрела подъема арки

Опорные реакции

$$Ra := \frac{8\cdot8\cdot24 + 2\cdot8\cdot8 + \frac{1}{2}\cdot8\cdot8\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot8 + 4\right)}{L} = 58.667 \qquad Rb := \frac{8\cdot8\cdot8 + 2\cdot8\cdot24 + \frac{1}{2}\cdot8\cdot8\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot8 + 20\right)}{L} = 53.333$$

$$H := \frac{Ra\cdot\frac{L}{2} - 8\cdot8\cdot8}{f} = 42.667$$

Определение координат сечений, синусов и косинусов угла касательной

$i := 0..17 \quad \Delta x := \frac{L}{16} = 2$

$x_i := 0.5\cdot\Delta x + \Delta x\cdot(i-1) \qquad R := \frac{4\cdot f^2 + L^2}{8\cdot f}$

$x_0 := 0 \quad x_{17} := 32$

$$y_i := \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2} - x_i\right)^2} - R + f$$

$$\sin\phi_i := \frac{L - 2\cdot x_i}{2\cdot R} \qquad \cos\phi_i := \frac{y_i + R - f}{R}$$

Определение балочных усилий Mo и Qo

$Mo_0 := 0$

$Mo_1 := Ra\cdot1 = 58.667$

$Mo_2 := Ra\cdot3 = 176$

$Mo_3 := Ra\cdot5 - 8\cdot1\cdot0.5 = 289.333$

$Mo_4 := Ra\cdot7 - 8\cdot3\cdot1.5 = 374.667$

$Mo_5 := Ra\cdot9 - 8\cdot5\cdot2.5 = 428$

$Mo_6 := Ra\cdot11 - 8\cdot7\cdot3.5 = 449.333$

$Mo_7 := Ra\cdot13 - 8\cdot8\cdot5 = 442.667$

$Mo_8 := Ra\cdot15 - 8\cdot8\cdot7 = 432$

$Mo_9 := Ra\cdot17 - 8\cdot8\cdot9 = 421.333$

$Mo_{10} := Ra\cdot19 - 8\cdot8\cdot11 = 410.667$

$Qo_0 := Ra$

$Qo_1 := Ra = 58.667$

$Qo_2 := Ra = 58.667$

$Qo_3 := Ra - 8\cdot1 = 50.667$

$Qo_4 := Ra - 8\cdot3 = 34.667$

$Qo_5 := Ra - 8\cdot5 = 18.667$

$Qo_6 := Ra - 8\cdot7 = 2.667$

$Qo_7 := Ra - 8\cdot8 = -5.333$

$Qo_8 := Ra - 8\cdot8 = -5.333$

$Qo_9 := Ra - 8\cdot8 = -5.333$

$Qo_{10} := Ra - 8\cdot8 = -5.333$

$$Mo_{11} := Ra\cdot21 - 8\cdot8\cdot13 - 2\cdot1\cdot0.5 - 1\cdot1\cdot0.5\cdot\left(\frac{1\cdot1}{3}\right) = 398.833$$

$$Mo_{12} := Ra\cdot23 - 8\cdot8\cdot15 - 2\cdot3\cdot1.5 - 3\cdot3\cdot0.5\cdot\left(\frac{1\cdot3}{3}\right) = 375.833$$

$$Mo_{13} := Ra\cdot25 - 8\cdot8\cdot17 - 2\cdot5\cdot2.5 - 5\cdot5\cdot0.5\cdot\left(\frac{1\cdot5}{3}\right) = 332.833$$

$$Mo_{14} := Ra\cdot27 - 8\cdot8\cdot19 - 2\cdot7\cdot3.5 - 7\cdot7\cdot0.5\cdot\left(\frac{1\cdot7}{3}\right) = 261.833$$

$$Mo_{15} := Ra\cdot29 - 8\cdot8\cdot21 - 2\cdot8\cdot5 - 8\cdot8\cdot0.5\cdot\left(\frac{1\cdot8}{3} + 1\right) = 160$$

$$Mo_{16} := Ra\cdot31 - 8\cdot8\cdot23 - 2\cdot8\cdot7 - 8\cdot8\cdot0.5\cdot\left(\frac{1\cdot8}{3} + 3\right) = 53.333$$

$$Mo_{17} := Ra\cdot32 - 8\cdot8\cdot24 - 2\cdot8\cdot8 - 8\cdot8\cdot0.5\cdot\left(\frac{1\cdot8}{3} + 4\right) = -5.684\times10^{-14}$$

$Qo_{11} := Ra - 8\cdot8 - 2\cdot1 + 1\cdot1\cdot0.5 = -6.833$

$Qo_{12} := Ra - 8\cdot8 - 2\cdot3 - 3\cdot3\cdot0.5 = -15.833$

$Qo_{13} := Ra - 8\cdot8 - 2\cdot5 - 5\cdot5\cdot0.5 = -27.833$

$Qo_{14} := Ra - 8\cdot8 - 2\cdot5 - 7\cdot7\cdot0.5 = -39.833$

$Qo_{15} := Ra - 8\cdot8 - 2\cdot8 - 8\cdot8\cdot0.5 = -53.333$

$Qo_{16} := Ra - 8\cdot8 - 2\cdot8 - 8\cdot8\cdot0.5 = -53.333$

$Qo_{17} := Ra - 8\cdot8 - 2\cdot8 - 8\cdot8\cdot0.5 = -53.333$

$EJ := 1 \cdot 10^{7}$ жесткость арки при изгибе

$GA := 1.28 \cdot 10^{8}$ жесткость арки при сдвиге

$EA := 3.33 \cdot 10^{8}$ жесткость арки при растяжении сжатии

$\eta := 1.2$ коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по высоте сечения при изгибе (для прямоугольного сечения)

$R_i := \dfrac{y_i \cdot y_i}{\cos\phi_i}$ $\qquad T_i := \dfrac{y_i \cdot Mo_i}{\cos\phi_i}$ $\qquad z_i := 0$

$kG := \dfrac{GA}{EJ} = 12.8$ $\qquad n := 17$

$kN := \dfrac{EA}{EJ} = 33.3$ $\qquad kзат := 5$ –жесткость затяжки

$\sum R = 1.029 \times 10^{3}$ $\qquad \sum T = 4.571 \times 10^{4}$

$NO_i := -(Qo_i \cdot \sin\phi_i)$

	R (0)	T (0)
0	0	0
1	5.907	194.323
2	27.816	$1.123 \cdot 10^{3}$
3	48.804	$2.28 \cdot 10^{3}$
4	66.194	$3.282 \cdot 10^{3}$
5	79.803	$3.987 \cdot 10^{3}$
6	89.796	$4.346 \cdot 10^{3}$
7	96.351	$4.377 \cdot 10^{3}$
8	99.596	$4.315 \cdot 10^{3}$
9	99.596	$4.208 \cdot 10^{3}$
10	96.351	$4.06 \cdot 10^{3}$
11	89.796	$3.858 \cdot 10^{3}$
12	79.803	$3.501 \cdot 10^{3}$
13	66.194	$2.915 \cdot 10^{3}$
14	48.804	$2.063 \cdot 10^{3}$
15	...	...

$$\delta 11 := \left[\sum R + \frac{\eta}{kG} \cdot \sum \frac{(\sin\phi)^2}{\cos\phi} + \frac{1}{kN} \cdot \sum \cos\phi + \frac{n}{kзат}\right] = 1.033 \times 10^{3}$$

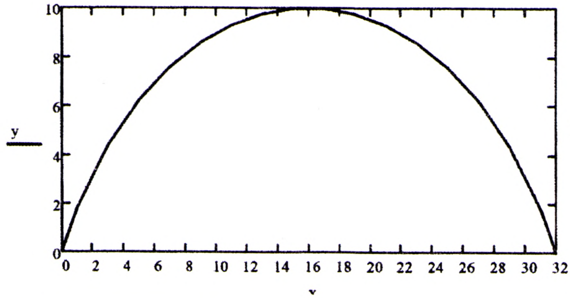
$$\Delta 11 := -\left[\sum T + \frac{\eta}{kG} \cdot \sum \left(\frac{\sin\phi \cdot Qo}{\cos\phi}\right) + \frac{1}{kзат} \cdot \sum NO\right] = -4.65 \times 10^{4}$$

$X1 := \dfrac{-\Delta 11}{\delta 11} = 45.002$ –неизвестное метода сил(продольное_усилие_в_затяжке)

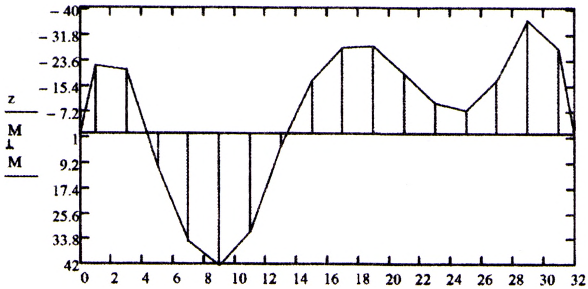
Определение усилий M, Q, N в арке

$M_i := Mo_i - y_i \cdot X1$ $\qquad Q_i := Qo_i \cdot \cos\phi_i - X1 \cdot \sin\phi_i$ $\qquad N_i := -(Qo_i \cdot \sin\phi_i + X1 \cdot \cos\phi_i)$

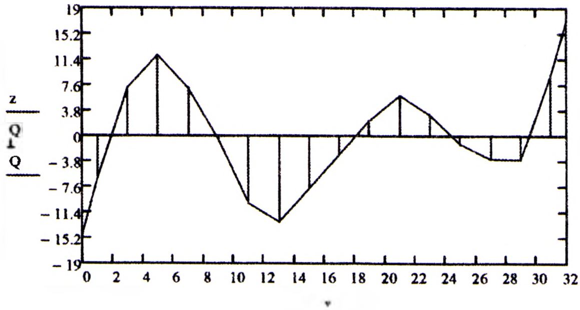
	x (0)	y (0)	M (0)	Q (0)	N (0)
0	0	0	0	-14.743	-72.454
1	1	1.783	-21.586	-6.337	-73.667
2	3	4.359	-20.161	7.208	-73.587
3	5	6.194	10.579	12.024	-66.691
4	7	7.557	34.584	7.155	-56.354
5	9	8.566	42.522	-0.535	-48.717
6	11	9.283	31.566	-10.082	-43.939
7	13	9.745	4.107	-12.842	-43.459
8	15	9.972	-16.754	-7.853	-44.631
9	17	9.972	-27.42	-2.797	-45.23
10	19	9.745	-27.893	2.328	-45.257
11	21	9.283	-18.934	6.083	-45.109
12	23	8.566	-9.644	3.14	-47.603
13	25	7.557	-7.249	-1.26	-52.899
14	27	6.194	-16.921	-3.507	-59.996
15	29	4.359	-36.161	-3.565	-69.691
16	31	1.783	-26.919	9.209	-69.172
17	32	0	$-5.684 \cdot 10^{-14}$	17.08	-67.66



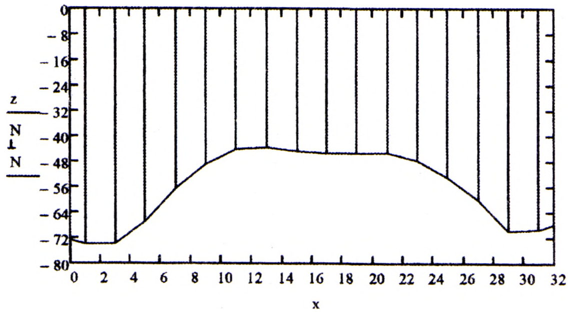
Круговая арка



Эпюра M



Эпюра Q



Эпюра N

Лабораторная работа № 9

Матричная форма определения перемещений в рамах

<u>Цель работы:</u> изучить применение матричной формы определения перемещений на примере расчета перемещений в раме.

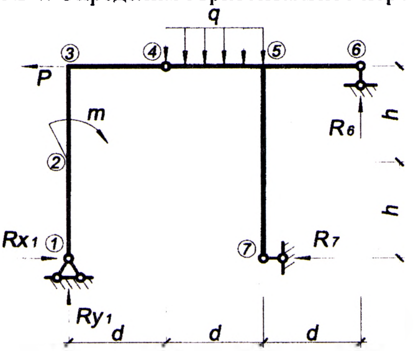
<u>Порядок выполнения работы</u>:

1) построить грузовую эпюру усилий M_P;

2) в узле, в котором предполагается определить линейное перемещение и угол поворота, приложить единичные усилия в соответствующих направлениях; построить единичные эпюры M_1 и M_2;

3) найти искомые перемещения, используя матричную форму; расчеты необходимо произвести в системе компьютерной алгебры MathCAD.

Для примера рассмотрим расчет рамы, сделанный в лабораторной работе № 4. Определим горизонтальное перемещение и угол поворота узла 5.

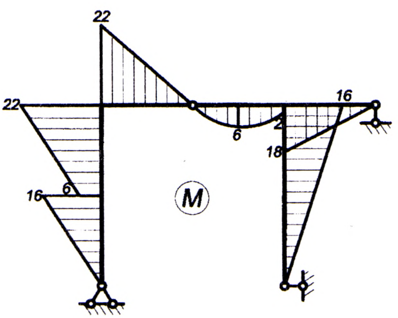


$d = 2м$;
$h = 2м$;

$P = 4кН$;
$m = 10кНм$;
$q = 10кН/м$.

Пусть изгибная жесткость вертикальных стержней равна $4EJ$; горизонтальных стержней – $2EJ$; (наклонных стержней – $3EJ$).

Грузовая эпюра моментов M_P рамы от действия внешней нагрузки была получена ранее.

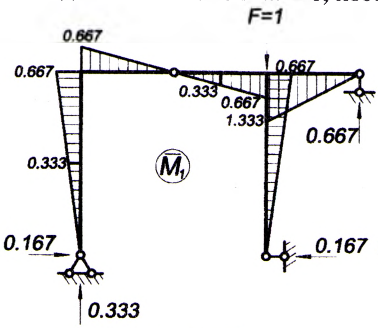


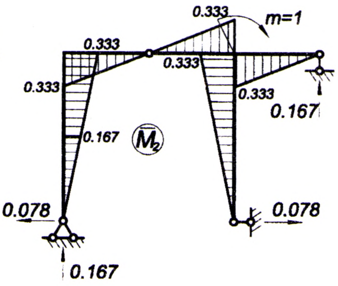
Составим матрицу-столбец (вектор) ординат грузовой эпюры M_P:

$$\{M_P\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -16 \\ -6 \\ -22 \\ 22 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \\ -2 \\ -18 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Примем правило знаков: положительными будем считать значения ординат, находящихся выше или правее стержня.

Для определения вертикального перемещения узла 5 приложим в него единичную сосредоточенную силу $F_1 = 1$ вертикально; построим единичную эпюру M_1 рамы. Соответственно, для определения угла поворота узла 5 приложим в него единичный момент $m = 1$; построим единичную эпюру M_2 рамы.





Составим матрицу $\left[\bar{M}\right]^T$, состоящую из *двух* строк ординат по участкам из единичных эпюр $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$:

$$\left[\bar{M}\right]^T = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}333 & -0{,}333 & -0{,}667 & 0{,}667 & 0 & 0 & -0{,}333 & -0{,}667 & -1{,}333 & 0 & 0{,}667 & 0 \\ 0 & 0{,}167 & 0{,}167 & 0{,}333 & -0{,}333 & 0 & 0 & 0{,}167 & 0{,}333 & -0{,}333 & 0 & -0{,}333 & 0 \end{bmatrix}$$

Составим квазидиагональную матрицу упругой податливости системы $[D]$, которая состоит из матриц упругой податливости участков $[D_i]$ и нулевых матриц $[0]$:

$$[D] = \begin{bmatrix} [D_1] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [D_2] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [D_n] \end{bmatrix},$$

где n – количество участков в системе (в данном примере $n = 6$).

Составим матрицы упругой податливости участков $[D_i]$ с учетом их длин и изгибных жесткостей, приводя к общему множителю:

$$[D_1] = \frac{2}{6 \cdot 4EJ}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6EJ}\begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [D_4] = \frac{2}{6 \cdot 2EJ}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6EJ}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[D_2] = \frac{2}{6 \cdot 4EJ}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6EJ}\begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [D_5] = \frac{2}{6 \cdot 2EJ}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6EJ}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$[D_3] = \frac{2}{6 \cdot 2EJ}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6EJ}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad [D_6] = \frac{4}{6 \cdot 4EJ}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6EJ}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Определим искомые перемещения, используя матричную форму определения перемещений:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_5^{гориз} \\ \varphi_5 \end{Bmatrix} = \left[\bar{M}\right]^T \cdot [D] \cdot \{M_P\}.$$

Определим искомые перемещения, произведя расчеты в системе компьютерной алгебры MathCAD:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_5^{гориз} \\ \varphi_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}333 & -0{,}333 & -0{,}667 & 0{,}667 & 0 & 0 & -0{,}333 & -0{,}667 & -1{,}333 & 0 & 0{,}667 & 0 \\ 0 & 0{,}167 & 0{,}167 & 0{,}333 & -0{,}333 & 0 & 0 & 0{,}167 & 0{,}333 & -0{,}333 & 0 & -0{,}333 & 0 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{6EJ} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{matrix}} & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{matrix}} & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -16 \\ -6 \\ -22 \\ 22 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \\ -2 \\ -18 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{22{,}612}{EJ} \\ \dfrac{-5{,}305}{EJ} \end{Bmatrix}.$$

Как видно, в результате нагружения рамы сечение 5 сместилось вниз на $\dfrac{22{,}612}{EJ} м$, угол поворота этого сечения составил $\dfrac{5{,}305}{EJ} рад$ против часовой стрелки.

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры MathCAD .

Составим матрицу M_P (из ординат грузовой эпюры М) и транспонированную матрицу M^T (из ординат единичных эпюр)

$$MP := \begin{pmatrix} 0 \\ -16 \\ -6 \\ -22 \\ 22 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \\ -2 \\ -18 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} \quad MT := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.333 & 0.167 \\ -0.333 & 0.167 \\ -0.667 & 0.333 \\ 0.667 & -0.333 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.333 & 0.167 \\ -0.667 & 0.333 \\ -1.333 & -0.333 \\ 0 & 0 \\ 0.667 & -0.333 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -0.333 & -0.333 & -0.667 & 0.667 & 0 & 0 & -0.333 & -0.667 & -1.333 & 0 & 0.667 & 0 \\ 0 & 0.167 & 0.167 & 0.333 & -0.333 & 0 & 0 & 0.167 & 0.333 & -0.333 & 0 & -0.333 & 0 \end{pmatrix}$$

Составим матрицы упругой податливости участков

$$Dm1 := \frac{2}{4}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \qquad D1 := \frac{1}{6\cdot EJ}\cdot Dm1$$

$$Dm2 := \frac{2}{4}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \qquad D2 := \frac{1}{6\cdot EJ}\cdot Dm2$$

$$Dm3 := \frac{2}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D3 := \frac{1}{6\cdot EJ}\cdot Dm3$$

$$Dm4 := \frac{2}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D4 := \frac{1}{6\cdot EJ}\cdot Dm4$$

$$Dm5 := \frac{2}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D5 := \frac{1}{6\cdot EJ}\cdot Dm5$$

$$Dm6 := \frac{4}{4}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D6 := \frac{1}{6\cdot EJ}\cdot Dm6$$

Составим квазидиагональную матрицу упругой податливости системы, составленную из матриц упругой податливости участков и нулевых матриц

$$Z2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Z23 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Z32 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ **- нулевые матрицы**

$D1row := augment(Dm1, Z2, Z2, Z23, Z2, Z2)$

$D2row := augment(Z2, Dm2, Z2, Z23, Z2, Z2)$

$D3row := augment(Z2, Z2, Dm3, Z23, Z2, Z2)$

$D4row := augment(Z32, Z32, Z32, Dm4, Z32, Z32)$

$D5row := augment(Z2, Z2, Z2, Z23, Dm5, Z2)$

$D6row := augment(Z2, Z2, Z2, Z23, Z2, Dm6)$

$Dm := stack(D1row, D2row, D3row, D4row, D5row, D6row)$

$$Dm \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad EJ := 1$$

$$D := \frac{1}{6\cdot EJ}\cdot Dm$$

Искомые перемещения $\Delta := MT\cdot D\cdot MP = \begin{pmatrix} 22.612 \\ -5.305 \end{pmatrix}$

Лабораторная работа № 10

Расчет балок методом конечных разностей

<u>*Цель работы*</u>: изучить применение метода конечных разностей для расчета балочных систем.

<u>*Порядок выполнения работы:*</u>

1) разбить пролет балки на заданное число частей, приняв граничные точки участков в качестве расчетных точек метода конечных разностей;

2) используя дифференциальные уравнения равновесия изгибаемых стержневых систем и метод конечных разностей, определить прогибы расчетных точек и изгибающие моменты в соответствующих (этим точкам) сечениях балки;

3) построить эпюру изгибающих моментов и график прогибов балки.

<u>Примечание:</u> все необходимые расчеты выполнить в системе компьютерной алгебры MathCAD.

<u>*Методика расчета.*</u>

Для расчета стержневых изгибаемых систем могут использоваться три варианта дифференциальных уравнений равновесия:

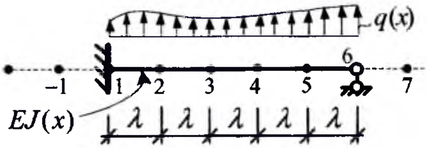


Рисунок 10.1

$$1)\quad y'' - \frac{M(x)}{EJ(x)} = 0; \qquad (10.1)$$

$$2)\quad M'' - q(x) = 0, \qquad (10.2)$$

$$3)\quad y^{IV} - \frac{q(x)}{EJ(x)} = 0, \qquad (10.3)$$

которые в конечных разностях для i-й точки (рис. 10.1) имеют вид [2]:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = \frac{M_i}{EJ} \cdot \lambda^2; \qquad (10.4)$$

$$M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1} = q_i \lambda^2; \qquad (10.5)$$

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{q_i}{EJ} \lambda^2. \qquad (10.6)$$

Переходя от дифференцирования к конечным разностям, мы должны разбить систему (балку) на заданное число конечных участков, граничные точки между которыми принимаются за расчетные точки (сечения). Для расчетных точек, в которых определяемые величины (перемещения, усилия) неизвестны, и необходимо записывать уравнения (10.4)– (10.6). При этом, как несложно увидеть, в уравнениях будут появляться перемещения (усилия) в так называемых законтурных точках (например, в точках -1 и 7 на рис. 10.1). Для определения этих величин могут использоваться граничные условия сооружений, то есть известные значения перемещений и усилий на границах сооружения, связанные с условиями закрепления крайних точек системы:

1) шарнирное опирание (рисунок 10.2): $y_i = 0$ и $y_{i-1} = -y_{i+1}$;

2) защемление (рисунок 10.3): $y_i = 0$ и $y_{i-1} = y_{i+1}$.

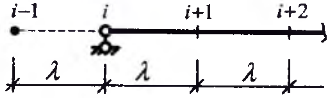


Рисунок 10.2

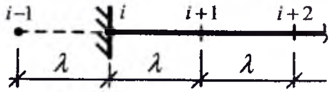


Рисунок 10.3

Пример расчета. Рассмотрим применение метода конечных разностей к решению задачи изгиба двухопорной балки, нагруженной распределенной (по треугольному закону) нагрузкой (рисунок 10.4).

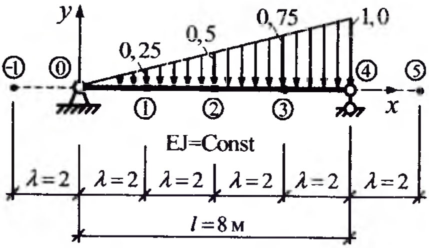


Рисунок 10.4

Определим вначале изгибающие моменты в системе, для чего воспользуемся вначале уравнением (10.2) – $M'' - q(x) = 0$, которое в конечных разностях представлено в (10.5).

Разобьем балку на четыре части ($\lambda = l/4 = 2$ м) и составим уравнения (10.5) для точек 1, 2 и 3 (последовательно принимая i равным номерам этих точек):

$$\begin{cases} M_0 - 2M_1 + M_2 = -0{,}25 \cdot \lambda^2; \\ M_1 - 2M_2 + M_3 = -0{,}5 \cdot \lambda^2; \\ M_2 - 2M_3 + M_4 = -0{,}75 \cdot \lambda^2. \end{cases} \tag{10.7}$$

Согласно граничным условиям при этом будем иметь: $M_0 = 0$ и $M_4 = 0$. Учитываем граничные условия и решаем систему уравнений (10.7). Находим:

$$M_1 = 2{,}5; \quad M_2 = 4{,}0; \quad M_3 = 3.5.$$

Для определения прогибов системы воспользуемся теперь уравнением (10.1), которое в конечных разностях для произвольного i-го узла имеет вид (10.4).

Записав уравнение (10.4) для точек 1, 2 и 3, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y_0 - 2y_1 + y_2 = \dfrac{2.5}{EJ} \cdot \lambda^2; \\ y_1 - 2y_2 + y_3 = \dfrac{4.0}{EJ} \cdot \lambda^2; \\ y_2 - 2y_3 + y_4 = \dfrac{3.5}{EJ} \cdot \lambda^2, \end{cases}$$

решая которую, с учетом граничных условий ($y_0 = 0$ и $y_4 = 0$), найдем:

$$y_1 = -\frac{19}{EJ}; \qquad y_2 = -\frac{28}{EJ}; \qquad y_3 = -\frac{21}{EJ}.$$

Процедура расчета рассматриваемой задачи в системе компьютерной алгебры MathCAD (см. с. 47).

По полученным результатам строим эпюру изгибающих моментов и график прогибов балки (см. рис. 10.5).

Выполнив анализ результатов расчета, можно сделать следующие выводы:

– в методе конечных разностей густота разбивки системы определяет точность решения;

– наибольший изгибающий момент в рассматриваемой балке возникает между сечениями 2 и 3;

– наибольший прогиб при рассматриваемом нагружении балки возникает между точками 2 и 3.

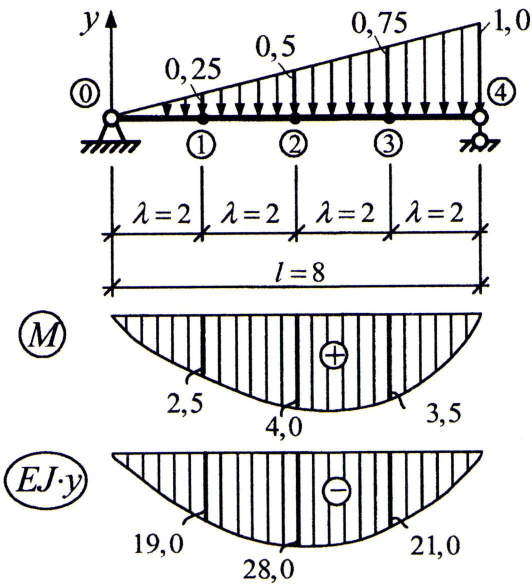


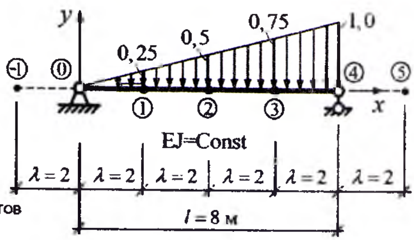
Рисунок 10.5

$L := 8$ -длина балки

$n := 4$ -число участков разбиения

$\lambda := \frac{L}{n}$ $\lambda = 2$ -длина участка

$EI := 1$ -изгибную жесткость принимаем условно равной 1, т.к. она постоянна



Определение изгибающих моментов

Определяем значения нагрузки в точках:

$q0 := 0$ $q1 := -0.25$ $q2 := -0.5$ $q3 := -0.75$ $q4 := -1$

Обозначим искомые неизвестные моменты в сечениях разбивки:

$M0 := 0$ $M1 := 0$ $M2 := 0$ $M3 := 0$ $M4 := 0$

Запишем систему уравнений метода конечных разностей и граничные условия для изгибающих моментов

Given

$M0 - 2M1 + M2 = q1 \cdot \lambda^2$

$M1 - 2M2 + M3 = q2 \cdot \lambda^2$ - система уравнений метода конечных разностей

$M2 - 2M3 + M4 = q3 \cdot \lambda^2$

$M0 = 0$ $M4 = 0$ - граничные условия

Находим изгибающие моменты в сечениях:

$$\text{Find}(M1, M2, M3) = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 4 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

Определение перемещений

Значения изгибающих моментов в точках определены выше и равны:

$M0 := 0$ $M1 := 2.5$ $M2 := 4$ $M3 := 3.5$ $M4 := 0$

Обозначим искомые перемещения в сечения:

$y0 := 0$ $y1 := 0$ $y2 := 0$ $y3 := 0$ $y4 := 0$

Запишем систему уравнений метода конечных разностей и граничные условия для перемещений

Given

$y0 - 2y1 + y2 = \frac{M1}{EI} \cdot \lambda^2$

$y1 - 2y2 + y3 = \frac{M2}{EI} \cdot \lambda^2$ - система уравнений метода конечных разностей

$y2 - 2y3 + y4 = \frac{M3}{EI} \cdot \lambda^2$

$y0 = 0$ $y4 = 0$ - граничные условия

Находим вертикальные перемещения сечений:

$$\text{Find}(y1, y2, y3) = \begin{pmatrix} -19 \\ -28 \\ -21 \end{pmatrix}$$

ЛИТЕРАТУРА,

рекомендуемая для расширенного изучения материала

1. Ильин, В.П. Численные методы решения задач строительной механики / В.П. Ильин, В.В. Карпов, А.М. Масленников. – Мн. : Выш. школа, 1990.– 349 с.

2. Масленников, А.М. Расчет строительных конструкций численными методами: учебное пособие. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. – 224 с.

3. Турчак, Л.И. Основы численных методов : учебное пособие. – М. : Наука, 1987. – 320 с.

4. Борисевич, А.А. Строительная механика : учебное пособие / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Минск: БНТУ, 2007. – 821 с.

5. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 554 с.

6. Игнатюк, В.И. Численные методы решения задач строительной механики : учебное пособие / В.И. Игнатюк, Н.В. Бочарова. – Брест: БрГТУ, 2015. – 100 с.

7. Караманский, Т.Д. Численные методы строительной механики / Пер с болг. ; под ред. Г.К. Клейна. – М. : Стройиздат, 1981. – 436 с.

8. Матричные алгоритмы в строительной механике стержневых систем : учебное пособие / Д.К. Бендюг [и др.]. – М. : Высшая школа, 1980. – 124 с.

9. Самарский, А.А. Введение в численные методы : учебное пособие. – М. : Наука, 1987. – 288 с.

Содержание

Учебное издание

Игнатюк Валерий Иванович
Бочарова Наталья Владимировна
Молош Виктор Викторович

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

по дисциплине

«Численные методы решения задач»

Методические указания
для студентов специальностей
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и
1-74 04 01 «Сельское строительство и обустройство территорий»
дневной и заочной форм обучения

Ответственный за выпуск Игнатюк В.И.
Редактор Боровикова Е.А.
Компьютерный набор и верстка Игнатюк В.И., Боровикова Е.А.
Корректор Никитчик Е.В.

ISBN 978-985-493-369-6

Издательство БрГТУ.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/235 от 24.03.2014 г.
Подписано в печать 11.05.2016 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Бумага «Performer». Гарнитура «Times New Roman».
Усл. печ. л. 2,8. Уч. изд. л. 3,0. Заказ № 458.
Тираж 120 экз. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.