ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В СЕЧЕНИЯХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО ЭЛЕМЕНТА С УЧЕТОМ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ СТЕПЕНИ НЕЛИНЕЙНОСТИ НЕОБРАТИМОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ДЕФОРМАЦИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА

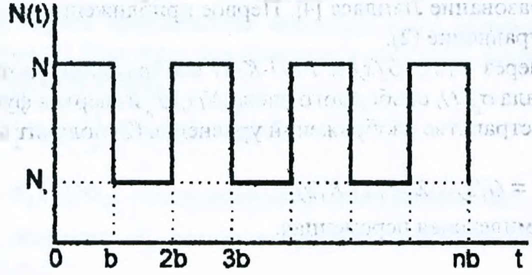
Н.А. КОЛЕСНИКОВ, БПИ, г. БРЕСТ

Правильный и полный учет при проектировании железобетонных конструкций длительных деформаций, вызванных ползучестью бетона, как известно, имеет большое практическое значение. Ниже предлагается решение задачи по определению напряженно-деформированного состояния в сечениях железобетонного элемента с учетом деформаций ползучести бетона при степени нелинейности необратимой составляющей этих деформаций, установленной в работе [1].

Рассмотрим центрально сжатый железобетонный элемент под нагрузкой, изменяющейся во времени в соответствии с графиком, показанным на рисунке. Данный график изменения нагрузки можно аппроксимировать функцией вида

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty}\left[N-(N-N_0)U_1(t-n\cdot b)\right], \tag{1}$$

где $U_1(t-n\cdot b)$ принимает значения [2]



$$U_1(t-n\cdot b)=\begin{cases}0 \text{ при } 2n\cdot b<t<(2n+1)b\\ 1 \text{ при } (2n+1)b<t<(2n+2)b, \ n=0,1,2,...\end{cases}$$

Будем отсчитывать время от начала загружения элемента. Положим, что модуль упруго-мгновенных деформаций бетона $E_б$ = const.

Можно показать, что известное решение академика Н.Х. Арутюняна [3] при $N = N(t)$ получит вид

$$\sigma_б(t)=\frac{N(t)}{F_п}-\lambda_0\int_0^t\sigma_б(\tau)\cdot e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau\ , \tag{2}$$

где $F_п = F_б(1 + \mu\cdot m)$ – площадь приведенного сечения элемента;

$\mu = F_a/F_б$ – процент армирования;

$m = E_a/E_б$ – модульное отношение;

$\lambda_0 = \mu\cdot E_a\cdot C_0\cdot\gamma/(1 + \mu\cdot m)$ – параметр.

Здесь первый член соответствует упруго-мгновенным напряжениям, а второй – величине их уменьшения за счет линейной составляющей деформаций ползучести. Так как выражение (2) не учитывает нелинейной составляющей этих деформаций, то $\sigma_б(t)$, определенное на его основе, будет превышать экспериментальные значения напряжений тем в большей степени, чем выше уровень действующих напряжений. Их соответствия можно добиться, используя уравнение вида

$$\sigma_б(t)=\frac{N(t)}{F_п}-\lambda_0\int_0^t\sigma_б(\tau)\cdot e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau-\lambda_1\cdot\varepsilon_{нб}(t)\,. \tag{3}$$

Последнее слагаемое в правой части выражения (3) соответствует величине уменьшения упруго-мгновенных напряжений в бетоне за счет нелинейной составляющей деформаций ползучести.

Найдем решение этого уравнения путем последовательных приближений, используя преобразование Лапласа [4]. Первое приближение значения $\sigma_б(t)$ получим, решив уравнение (2).

Обозначим через $F(s)$, $G(s)$ и $F(s)\cdot K(s)$ изображения соответственно искомого оригинала $\sigma_б(t)$, свободного члена $N(t)/F_п$ и свертки функции $\sigma_б(t)$ и $e^{\gamma t}$. Тогда в пространстве изображений уравнение (2) получит вид

$$F(s) = G(s) - \lambda_0\cdot F(s)\cdot K(s), \tag{4}$$

где $s = x + j\cdot y$ – комплексная переменная.

С учетом (1) после преобразований получим

$$G(s) = \frac{1}{F_и} \cdot \frac{1}{s}\left[N + (N - N_0)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n \cdot b \cdot s}\right]. \qquad (5)$$

Так как

$$K(s) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma \cdot t} e^{-s \cdot t} dt = \frac{1}{s + \gamma}, \qquad (6)$$

то для *F(s)* будем иметь

$$G(s) = \frac{1}{F_п} \cdot \frac{s + \gamma}{s(s + \alpha)}\left[N + (N - N_0)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n \cdot b \cdot s}\right], \qquad (7)$$

где $\alpha = \lambda_0 + \gamma$.

После разложения дробно-рациональной функции $\dfrac{s+\gamma}{s(s+\alpha)}$ на простейшие дроби

$$\frac{s + \gamma}{s(s + \alpha)} = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{1}{s} + \frac{\lambda_0}{\alpha} \cdot \frac{1}{s + \alpha},$$

используя обратное преобразование Лапласа, найдем [5]

$$\sigma_б(t) = \frac{1}{F_п}\left\{N(t)\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\lambda_0}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\left[N \cdot e^{-\alpha \cdot t} + (-1)^n (N - N_0) U_2(t - n \cdot b)\right]\right\}. \qquad (8)$$

Здесь $U_2(t - n \cdot b) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 < t < n \cdot b \\ e^{-\alpha(t - n \cdot b)} \text{ при } t > n \cdot b \end{cases}$

Получив первое приближение значений $\sigma_б(t)$, вычислим нелинейную часть уравнения (3). При этом, как показано в работе [1], функция напряжений может быть принята в виде

$$f\left[\sigma_б(\tau)\right] = \sigma_б(\tau) \cdot \bar{\sigma}_б^2(\tau),$$

где $\bar{\sigma}_б^2(\tau) = \sigma_б(t)/\sigma_0$ – относительные напряжения при принятом далее единичном значении σ_0, численно равные фактически действующим напряжениям $\sigma_б(\tau)$.

С учетом необратимости нелинейной составляющей деформаций ползучести при уменьшении напряжений ее накопление будет происходить на нечетных участках загружения (см. рис.) при напряжениях, как это следует из (8), составляющих

$$\sigma_б(t) = \frac{N}{F_п}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\lambda_0}{\alpha}e^{-\alpha \cdot t}\right)$$

$$\sigma_б(t) = \frac{N(t)}{F_п} - \lambda_0 \int_0^t \sigma_б(\tau)\cdot e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau -$$

$$-\lambda_1 \cdot \theta\left[\frac{\gamma^3}{\varphi}\left(1-e^{-\varphi \cdot t}\right) + \frac{3\gamma^3\lambda_0}{\beta}\left(1-e^{-\beta \cdot t}\right) + \frac{3\gamma\lambda_0^2}{\delta}\left(1-e^{-\delta \cdot t}\right) + \frac{\lambda_0^3}{\eta}\left(1-e^{-\eta \cdot t}\right)\right], \quad (9)$$

где $\theta = \dfrac{\varphi \cdot C_{сн}}{\alpha^3}\left(\dfrac{N}{F_п}\right)^3$; $\beta = \alpha + \varphi$; $\delta = 2\alpha + \varphi$; $\eta = 3\alpha + \varphi$ – параметры.

Вторым приближением в пространстве изображений будет

$$F(s) - G_н(s) - \lambda_0 \cdot F(s) \cdot K(s), \quad (10)$$

где

$$G_н(s) = \frac{1}{F_п}\cdot\frac{s+\gamma}{s(s+\alpha)}\left[N + (N - N_0)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n \cdot b \cdot s}\right] -$$

$$-\lambda_1\theta\frac{s+\gamma}{s(s+\alpha)}\left(\frac{\gamma^3}{s+\varphi} + \frac{3\gamma^3\lambda_0}{s+\beta} + \frac{3\gamma\lambda_0^2}{s+\delta} + \frac{\lambda_0^3}{s+\eta}\right). \quad (11)$$

Соответствующий оригинал $\sigma_б(t)$ из (10) найдем после разложения дробно-рациональных функций в (11) на простейшие дроби. Опуская промежуточные вычисления, получим

$$\sigma_б(t) = \frac{1}{F_п}\left\{N(t)\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\lambda_0}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\left[N \cdot e^{-\alpha \cdot t} + (-1)^n(N - N_0)U_2(t - n \cdot b)\right]\right\} -$$

$$-\lambda_1\theta\left(\frac{\gamma^3}{\varphi} + \frac{3\gamma^2\lambda_0}{\beta} + \frac{3\gamma\lambda_0^2}{\delta} + \frac{\lambda_0^3}{\eta}\right)\left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\lambda_0}{\alpha}e^{-\alpha \cdot t}\right) +$$

$$+\lambda_1\theta\frac{\gamma^3}{\varphi}\left(\frac{\lambda_0}{\alpha-\varphi}e^{-\alpha\cdot t}+\frac{\gamma-\varphi}{\alpha-\varphi}e^{-\varphi\cdot t}\right)+\lambda_1\theta\frac{3\gamma^2\lambda_0}{\beta}\left(\frac{\lambda_0}{\alpha-\beta}e^{-\alpha\cdot t}+\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}e^{-\beta\cdot t}\right)+$$

$$+\lambda_1\theta\frac{3\gamma\lambda_0^2}{\delta}\left(\frac{\lambda_0}{\alpha-\delta}e^{-\alpha\cdot t}+\frac{\gamma-\delta}{\alpha-\delta}e^{-\delta\cdot t}\right)+\lambda_1\theta\frac{\lambda_0^3}{\eta}\left(\frac{\lambda_0}{\alpha-\eta}e^{-\alpha\cdot t}+\frac{\gamma-\eta}{\alpha-\eta}e^{-\eta\cdot t}\right). \qquad (12)$$

Для суждения о степени соответствия второго приближения величины напряжений в бетоне $\sigma_б(t)$ их экспериментальным значениям была произведена обработка соответствующих опытных данных. Железобетонные призмы, армированные одиночным стержнем ∅ 12 мм из стали класса А–II ($\mu = 2,5$ %), загружались периодической нагрузкой с периодом, равным 14 суток, по схеме, показанной на рисунке. Продольные деформации призм измерялись индикаторами с ценой деления 0,001 мм на базе 440 мм, а относительные деформации арматурного стержня – тензорезисторами, наклеенными в специальных выточках на его поверхности. Напряжения в бетоне вычислялись после определения напряжений в арматуре с использованием равенства

$$\sigma_а(t)\cdot F_а + \sigma_б(t)\cdot F_б = N(t).$$

Удельные относительные деформации (меры) ползучести представлялись в виде суммы двух составляющих – линейной $C_{лин}(t-\tau)$ и нелинейной $C_н(\sigma, t-\tau)$.

Нагрузка, кН	Продолжительность наблюдения t–τ, сут.	Величины напряжений σб(t), МПа	
		экспериментальные	теоретические
134,0	1 7	23,6 23,23	24,3 23,97
55,7	8 14	9,15 9,19	9,72 9,60
134,0	15 21	23,21 23,00	23,62 23,40
55,7	22 28	8,93 8,98	9,34 9,29
134,0	29 35	23,02 22,79	23,16 23,01
55,7	36 42	8,76 8,83	9,11 9,09
134,0	43 49	22,95 22,81	22,85 22,74
55,7	50 56	8,72 8,78	8,97 8,97
134,0	57 63	22,87 22,76	22,62 22,55

Смысл обозначений, а также методические приемы определения величин $C_{min}(t-\tau)$ и $C_н(\sigma, t-\tau)$ приведены в работе [1].

Модульное отношение к моменту первоначального загружения образцов из бетона в возрасте 64 суток, составляло 5,8.

Сопоставление экспериментальных величин напряжений в бетоне с их теоретическими значениями показало, что нет необходимости в вычислении следующих приближений для $\sigma_б(t)$. Наибольшее расхождение в сравниваемых величинах не превышало 6,2 % (см. табл.).

Таким образом, выражение (3) с учетом необратимости нелинейной составляющей деформаций ползучести и степени ее нелинейности, установленной в работе [1], позволяет количественно правильно оценить напряженно-деформированное состояние в сечениях железобетонного элемента.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александровский С.В., Колесников Н.А.* Влияние величины уровня повторно действующих напряжений на ползучесть бетона // Сб. "Расчет и конструирование железобетонных конструкций", УП Всесоюзная конференция по бетону и железобетону.– М.: Стройиздат, 1972.– 188 с.

2. *Roberts G.E., Kaufman H.* Table of Laplace Transforms, 1966.

3. *Арутюнян Н.Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. – М.: Гостехтеоретиздат, 1952. – 323 с.

4. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М.: Наука, 1971.

5. *Колесников Н.А.* Напряженное состояние в железобетонном элементе с учетом ползучести бетона при повторной нагрузке // Сб. "Проблемы технологии производства строительных материалов, изделий и конструкций, строительства зданий и сооружений", ч. I. – Брест: БПИ, 1998. – 247 с.