УДК 517.925

И. Н. МЕЛЬНИКОВА, В. В. ШВАЙКО
Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

СИСТЕМЫ ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ИМЕЮЩИЕ РЕШЕНИЯ С ОПРЕДЕЛЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ

Пусть представление полиномов, определяющих систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dz}=\frac{P_i(x_1,x_2,x_3,z)}{Q_i(x_1,x_2,x_3,z)},(i=1,2,3) \tag{1}$$

по степеням x_1,x_2,x_3, имеют вид

$$P_i=\sum_{k=0}^{p_{i1}}P_k^{(i)}(x_2,x_3,z)x_1^{p_{i1}-k}=\sum_{l=0}^{p_{i2}}P_l^{(i)}(x_1,x_3,z)x_2^{p_{i2}-l}=\sum_{m=0}^{p_{i3}}P_m^{(i)}(x_1,x_2,z)x_3^{p_{i3}-m},$$

$$Q_i=\sum_{k=0}^{q_{i1}}Q_k^{(i)}(x_2,x_3,z)x_1^{q_{i1}-k}=\sum_{l=0}^{q_{i2}}Q_l^{(i)}(x_1,x_3,z)x_2^{q_{i2}-l}=\sum_{m=0}^{q_{i3}}Q_m^{(i)}(x_1,x_2,z)x_3^{q_{i3}-m}.$$

Найдем условия, при выполнении которых система (1) будет иметь единственное алгеброидное решение, одна их компонент которого стремится к бесконечности при $z\to z_0$:

$f_1(z)$ *не имеет предела,* $f_2(z)\to x_{20}, f_3(z)\to x_{30}$ *при* $z\to z_0$;

$f_1(z)\to\infty, f_2(z)$ *не имеет предела,* $f_3(z)\to x_{30}$ *при* $z\to z_0$;

$f_1(z)\to x_{10}, f_2(z)\to\infty, f_3(z)$ *не имеет предела, при* $z\to z_0$.

Это позволит выделить системы вида (1), не имеющих решений, одна компонента которых не имеет определенного предела, конечного или бесконечного, при приближении к особой точке.

Очевидно, если $Q_i(x_{10}, x_{20}, x_{30}, z_0) \neq 0\,(i = 1,2,3)$, то правые части уравнений системы (1) будут голоморфными функциями в окрестности точки $(x_{10}, x_{20}, x_{30}, z_0)$ и система будет иметь единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$f_i(z_0) = x_{i0}, (i = 1,2,3). \qquad (2)$$

Все функции этого решения являются голоморфными функциями z в некоторой окрестности точки z_0. Как только решение (2) системы (1) обладает свойством $f_i(z_n) = x_{i0}, (i = 1,2,3)$ при $z_n \to z_0$, где последовательность z_n выбрана на пути L, вдоль которого $z \to z_0$ и на котором, кроме, быть может, точки z_0, функции $f_i(z)\,(i = 1,2,3)$ являются аналитическими, то это решение обладает и свойством $f_1(z) = x_{10}, f_2(z) \to x_{20}, f_3(z) \to x_{30}$ при $z_n \to z_0$ и совпадает с голоморфным решением, определяемым начальными условиями (2).

Мы показали, что никакое другое решение $x_i = \varphi_i(z)\,(i = 1,2,3)$ системы (1) в этом случае не может обладать указанным свойством.

Пусть теперь хотя бы одна из функций $Q_i(x_{10}, x_{20}, x_{30}, z)\,(i = 1,2,3)$ в точке $(x_{10}, x_{20}, x_{30}, z_0)$ обращается в 0. В этом случае происходит нарушение голоморфности правых частей системы (1) в окрестности указанной точки. Нам удалось обобщить теорему существования и единственности и на такие случаи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Еругин, Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин. – 3-е изд. – Минск : Наука и техника, 1970. – 572 с.

2. Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. ; Л. : Гостехтеориздат, 1950. – 436 с.

3. Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс. – Харьков : ОНТИ, 1939. –717 с.