УДК 519.2

И. Н. МЕЛЬНИКОВА, С. С. ДЕМЕШ
Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

К ВОПРОСУ О РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Исследование однородных марковских случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем в последнее время стали проводить с помощью дифференциальных уравнений. Построим вероятностную модель, в которой частицы «размножаются» таким образом, что вместо каждой из имеющихся в текущий момент времени s частиц через время t с соответствующей вероятностью $p_n(t)$ получается n таких же частиц, $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 1$. Указанные вероятности $p_n(t)$, $n = 0,1,...$ не зависят от момента s, так как они одни и те же для любого промежутка

(s, $s + t$) длины t. В соответствии с этим, если в момент имеются частицы и число их есть $\xi(s)=k$, то каждая i-я из них через время t превратится в $\xi_1(t)$ частиц и общее их число будет

$$\xi(s+t)=\xi_1(t)+...+\xi_k(t), \tag{1}$$

где независимо друг от друга $\xi_1(t)=n_1,...,\xi_k(t)=n_k$ с соответствующими вероятностями $p_{n_1}(t),\dots,p_{n_k}(t)$ и , следовательно,

$$p_{kn}(t)\equiv P\{\xi(s+t)=n|\xi(s)=k\}=P\{\xi_1(t)+...+\xi_k(s)=n\}=$$
$$=\sum_{n_1+...+n_k=k} p_{n_1}(t)...p_{n_k}(t). \tag{2}$$

При $k=1$ мы имеем $p_{1n}(t)=p_n(t), \text{n}=0,1,...$ и в описанном процессе размножения не исключается возможность того, что в некоторый момент частицы могут исчезнуть с вероятностью для отдельной частицы есть $p_0(t)$. Будем считать, что $\xi(s+t)\equiv 0,\ t\geq s$, при условии $\xi(s)=0$. Не исключается также возможность того, что к некоторому моменту образуется бесконечное число частиц (явление взрыва). Будем считать, что $\xi(s+t)\equiv\infty,\ t\geq s)$ при условии $\xi(s)=\infty$. Рассматривая процесс размножения отдельной частицы ($\xi(0)=1$), будем считать, что ее превращение в конечное число частиц $n\neq 1$ за малое время h имеет вероятность

$$a_n h+o(h). \tag{3}$$

Бесконечное число частиц за малое время h может образоваться из нее лишь путем последовательных превращений с вероятностью $o(h)$, и исходная частица остается неизменной с вероятностью $1+a_1h+o(h)$ где $a_n, n=0,1,...$ – некоторые постоянные ($a_1\leq 0$). Описанная нами схема определяет однородный марковский процесс $\xi(t),\ t\geq 0$, называемый ветвящимся процессом с состояниями $n=0,1,...$ и переходными вероятностями $p_{kn}(t)$, которые в дополнение к формуле (2) были описаны и для $k,n=0,\infty$. Отметим, что $p_{k\infty}(t)=1-\sum_n p_{kn}(t)$, здесь указывается суммирование по всем конечным $n=0,1,...$

Вообще говоря, имеется положительная вероятность того, что через некоторое время t не останется ни одной частицы. Если в исходный момент $t = 0$ имеется одна частица, то эта вероятность есть $p_0(t)=F(t,0)$. Если вначале имеется k частиц, то эта вероятность есть $p_{k0}(t)=F(t,0)^k=p_0(t)^k$. Функция $p_0(t)$ является решением дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt}=f(x), t\geq 0$ с параметром $z = 0$:

$$p_0'(t)=f(p_0(t)), p_0(0)=0.$$

Нам удалось показать, что это решение при $t \to \infty$ асимптотически приближается к значению α, которое является наименьшим корнем уравнения $f(x)=0$, т.е. $\lim\limits_{t\to\infty} p_0(t)=\alpha$. Можно сказать, что α есть вероятность вырождения ветвящегося процесса, $\xi(t)$ – вероятность того, что к некоторому моменту времени не остается ни одной частицы. Если же в исходный момент $t = 0$ имеется k частиц, то вероятность вырождения равна $\alpha^k = \lim\limits_{t\to\infty} p_{k0}(t)$. Анализ дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = f(x), t \geq 0$ и $t(x) = \int\limits_z^x \frac{du}{f(\mathrm{u})}, 0 \leq x \leq 1$ показывает также, что при условии

$$\int\limits_{x_0}^1 \frac{du}{f(\mathrm{u})} = -\infty, \quad \alpha \leq x_0 \leq 1$$

за конечное время каждая частица с вероятностью 1 порождает конечное число частиц, поскольку

$$\lim_{z\to 1} F(t,z) = \sum_n p_n(t) = 1 \text{ и } p_{1\infty}(t) = 1 - \sum_n p_n(t) \equiv 0, t \geq 0.$$

При условии же $\int\limits_{x_0}^1 \frac{du}{f(\mathrm{u})} > -\infty$, $\alpha < x_0 < 1$, согласно $x_0(t) = \lim\limits_{z\to 1} F(t,z)$, мы имеем $\lim\limits_{z\to 1} F(t,z) = x_0(t) = 1 - p_{1\infty}(t) < 1$, где $x_0(t) < 1$ при $t > 0$, и, таким образом, из одной частицы за конечное время t образуется с положительной вероятностью $p_{1\infty}(t) > 0$ бесконечное число частиц. При наличии в исходный момент k частиц через время t с вероятностью $p_{k\infty}(t) = 1 - x_0(t)^k$ образуется бесконечное число частиц. Это явление и называется взрывом.