

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

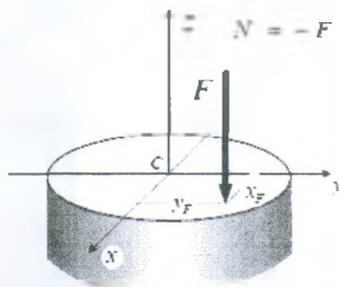
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

## ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения расчетно-проектировочных работ  
по дисциплине  
«Сопротивление материалов и теория упругости»

*для студентов специальности 1-70 03 01  
«Автомобильные дороги»  
(весенний семестр)*



Брест 2021

УДК 539.3/6

Сопротивление материалов является одной из общепрофессиональных дисциплин при подготовке инженеров строительных специальностей. Для закрепления теоретического материала и приобретения навыков инженерных расчетов студенты выполняют расчетно-проектировочные работы по основным разделам курса.

Настоящие задания и методические указания позволяют индивидуализировать и активизировать самостоятельную работу студентов при изучении курса «Сопротивление материалов и теория упругости».

Составители: Онысько С. Р., доцент, к. т. н.  
Томашев И. Г., ст. преподаватель  
Веремейчик А. И., доцент, к. ф.-м. н.  
Молош В. В., доцент, к. т. н.

## ВВЕДЕНИЕ

Задания и методические указания к расчетно-проектировочным работам соответствуют учебным планам специальности 1-70 03 01 «Автомобильные дороги» и охватывают наиболее важные разделы курса сопротивления материалов, которые изучаются студентами в весеннем семестре на втором курсе. Методические указания позволяют студентам изучить и применить теоретический материал для решения задач на примерах расчета статически определимых балок, испытывающих прямой поперечный изгиб, внецентренно сжатой колонны и сжатой стойки на устойчивость.

В методических указаниях приведены требования к оформлению расчетно-проектировочных работ и примеры их выполнения.

### УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ РАБОТ

1. Необходимые данные к выполнению расчетно-проектировочных работ следует принимать по схемам и таблицам согласно номеру варианта и номеру схемы.

2. Расчетно-проектировочная работа выполняется на стандартных листах формата А4 (210 x 297 мм) и оформляется в следующем порядке: титульный лист, задание на расчетно-проектировочную работу, текст расчетов, выводы, перечень литературы. Текстовая часть выполняется в соответствии с требованиями к оформлению текстовых документов. Расчеты выполняются в общем виде, в полученные выражения подставляются значения входящих в них величин, записывается числовой результат с указанием размерности ответа. Все вычисления производятся в десятичных дробях с точностью до трех-четырёх значащих цифр.

3. Чертежи и схемы следует выполнять на отдельных листах с соблюдением правил графики и масштабов. На эпюрах, чертежах необходимо указывать значение числовых величин, используемых в расчетах.

## 1 ПРЯМОЙ ИЗГИБ

### 1.1 Общие понятия

Для большинства элементов строительных конструкций изгиб является едва ли не самым распространенным видом деформации. Прямой брус, испытывающий изгиб, называют балкой. Изгиб балок вызывают силы (нагрузки), которые перпендикулярны к продольной оси балки, или пары сил, лежащие в плоскостях, проходящих через эту ось. Если все нагрузки действуют в одной плоскости, называемой силовой, проходящей через геометрическую ось балки и одну из главных центральных осей инерции поперечного сечения, то такой изгиб называется прямым (рисунок 1.1). Если в поперечных сечениях действуют только изгибающие моменты, такой изгиб называют чистым прямым изгибом, а при одновременном действии поперечных сил и изгибающих моментов – пря-

мым поперечным изгибом. При прямом изгибе продольная ось (геометрическое место центров тяжести поперечных сечений) из прямолинейной превращается в плавную кривую линию, называемую изогнутой осью балки или упругой линией балки. Упругая линия показывает вертикальные перемещения центров тяжести поперечных сечений под действием нагрузок.

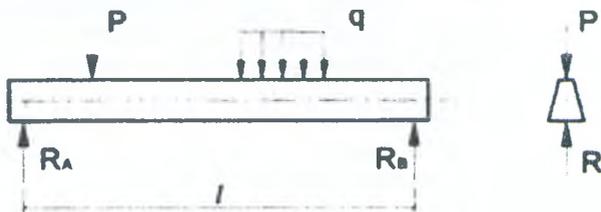


Рисунок 1.1 – Прямой изгиб

## 1.2 Расчет балок на прочность

а) Расчет по наибольшим нормальным напряжениям. Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R, \quad (1.1)$$

где  $M_{\max}$  – наибольший изгибающий момент (устанавливается по эпюре  $M$ );

$W_x$  – осевой момент сопротивления поперечного сечения балки при изгибе;

$R$  – расчетное сопротивление материала балки.

По условию прочности можно решать три типа задач. Наибольший интерес представляет проектная задача, т. е. определение требуемого момента сопротивления поперечного сечения балки:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{R}. \quad (1.2)$$

б) Расчет по наибольшим касательным напряжениям. Условие прочности имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{x,\max}^{\text{стат}}}{I_x b} \leq R_t, \quad (1.3)$$

где  $Q_{\max}$  – наибольшая поперечная сила (устанавливается по эпюре  $Q$ );

$S_{x,\max}^{\text{стат}}$  – статический момент отсеченной части поперечного сечения относительно нейтральной оси  $x$ ;

$I_x$  – осевой момент инерции поперечного сечения балки относительно главной центральной оси  $x$ ;

$b$  – ширина поперечного сечения балки на уровне точек, в которых определяется  $\tau$ .

Обычно расчет по  $\tau_{\max}$  сводится к проверке прочности балок, а условия прочности составляют для опасных точек поперечных сечений. Опасными являются те сечения, в которых действуют наибольшие поперечные силы  $Q$ , а опасные точки – это точки поперечного сечения, расположенные на нейтральной оси  $x$ . В тех случаях, когда условие прочности не выполняется (перенапряжение более (2÷5) %), поперечное сечение следует увеличить.

в) Расчет на прочность по главным напряжениям. Проверка прочности балок по главным напряжениям сводится к составлению условий прочности с использованием одной из теорий прочности. Для балок, выполненных из пластичных материалов, применяют третью или, чаще всего, четвертую теорию прочности, которая является наиболее экономичной. Так, условия прочности по третьей и четвертой теориям прочности имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R, \\ \sigma_s &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R,\end{aligned}\tag{1.4}$$

где  $\sigma_p, \sigma_s$  – расчетные (или эквивалентные  $\sigma_{III}, \sigma_{IV}$ ) напряжения для проверяемых точек сечений;

$\sigma, \tau$  – нормальные и касательные напряжения для соответствующих точек.

По главным напряжениям следует проверять те сечения, в которых одновременно действуют наибольшие, или близкие к ним, поперечные силы  $Q$  и изгибающие моменты  $M$ . Опасными точками таких сечений являются обычно точки, расположенные в местах резкого изменения ширины поперечных сечений. Так, например, в двутаврах, швеллерах – это точки примыкания полков к стенкам, ширина  $b$  которых на порядок меньше ширины полков.

### 1.3 Расчет балок на жесткость

При проверке балок на жесткость используется условие жесткости:

$$y_{\max} \leq [f], \quad [f] = \frac{l}{k},\tag{1.5}$$

где  $y_{\max}$  – максимальный прогиб балки в пролете, консолей и т. д.;

$[f]$  – допускаемая величина прогиба;

$l$  – длина проверяемых участков балки;

$k$  – коэффициент, величина которого задается нормами ( $k=100; 200; 400; 500; 1000$ ).

Для определения перемещений балок или при построении их эпюр целесообразнее использовать универсальное уравнение упругой линии балки, т. е.

$$\begin{aligned}EI_{xy} &= EI_{y_0} + EI_{I\theta_0z} + \sum \frac{m(z-a)^2}{2} + \sum \frac{F(z-b)^3}{6} + \sum \frac{q(z-c)^4}{24} - \sum \frac{q(z-d)^4}{24}, \\ EI_{I\theta} &= EI_{I\theta_0} + \sum m \cdot (z-a) + \sum \frac{F(z-b)^2}{2} + \sum \frac{q(z-c)^3}{6} - \sum \frac{q(z-d)^3}{6},\end{aligned}$$

где  $y_0$ ;  $\theta_0$  – начальные параметры, т. е. прогиб и угол поворота сечения, расположенного в начале координат, т.  $O$ . (начало координат чаще всего располагают на левом конце балки в центре тяжести поперечного сечения);

$z$  – расстояние от начала координат (т.  $O$ ) до сечения, для которого определяются  $y$ ,  $\theta$ ;

$a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  – расстояния от начала координат до сечений, в которых приложены соответственно:  $m$ ,  $F$ ,  $q$ ,  $-q$ .

#### 1.4 Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит сущность методов расчета по допускаемым напряжениям, разрешаемым нагрузкам и по предельным состояниям?

2. Что понимают под пластическим шарниром и пластическим моментом сопротивления, как определяется его величина?

3. Какие сечения и точки в сечении считаются опасными при расчете балок на прочность: а) по нормальным напряжениям? б) по касательным напряжениям? в) по главным напряжениям?

4. Какие поперечные сечения балок являются более рациональными?

5. Что понимают под упругой линией балки (или изогнутой осью балки)?

6. Какие известны методы определения перемещений балок?

7. Какой вид имеет приближенное дифференциальное уравнение упругой линии балки?

8. Какой вид имеет универсальное уравнение изогнутой оси балки?

9. Что понимают под начальными параметрами? Как определяется их величина?

10. Как осуществляется расчет балок на жесткость?

11. Какая существует связь эпюры прогибов и эпюры моментов?

12. Как аналитически определяются максимальные моменты и прогибы балок?

#### 1.5 Задание по расчетно-проектировочной работе № 4 «Расчет статически определимой двутавровой балки на прочность и жесткость»

Дано: Двутавровая балка (принять по номеру схемы) загружена внешней нагрузкой (числовые данные принять с учетом номера варианта). Расчетное сопротивление материала балки  $R = 210$  МПа,  $R_s = 120$  МПа; модуль продольной упругости  $E = 200$  ГПа; допускаемый прогиб  $[f/l] = 1/500$  для пролета и  $1/100$  для консолей.

Требуется:

1) определить опорные реакции;

2) построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ ;

3) подобрать сечение балки и проверить прочность по касательным и главным напряжениям с использованием третьей теории прочности;

4) определить главные напряжения для одной из опасных точек;

5) построить эпюры нормальных, касательных, главных и экстремальных касательных напряжений для опасного сечения по главным напряжениям;

6) построить эпюру прогибов балки, определив прогибы трех сечений в пролете и консолей;

7) проверить балку на жесткость.

Схемы балок приведены на рисунке 1.2, числовые данные – в таблице 1.1.

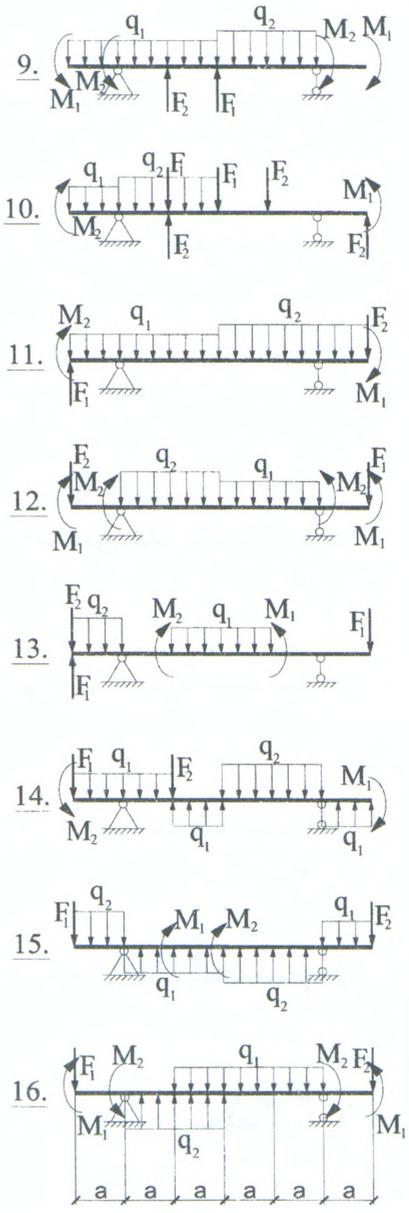
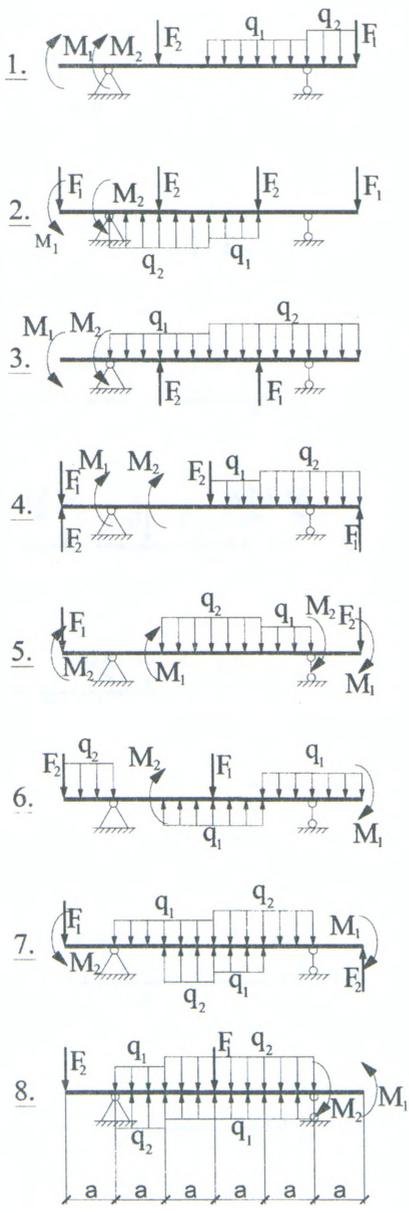


Рисунок 1.2 – Схемы двутавровых балок с нагрузками

Продолжение рисунка 1.2

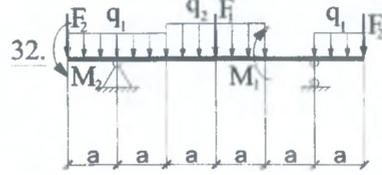
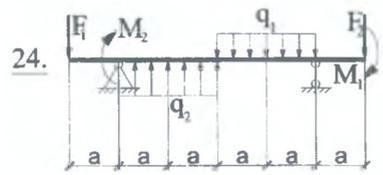
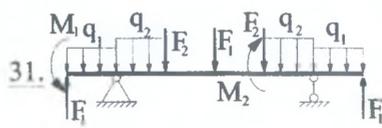
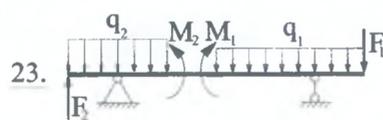
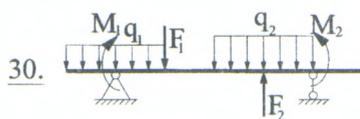
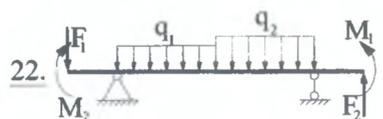
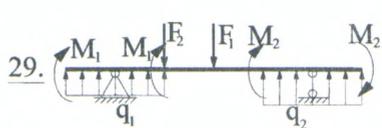
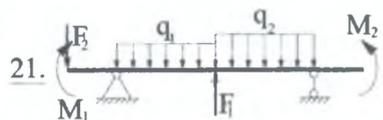
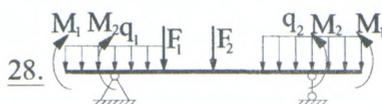
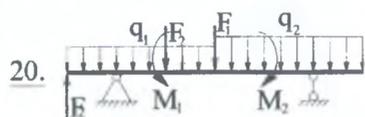
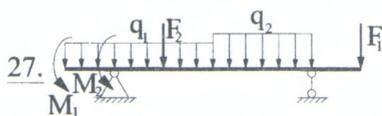
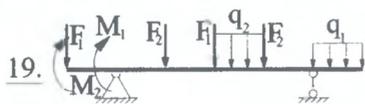
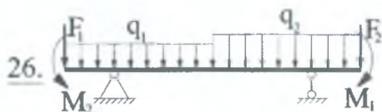
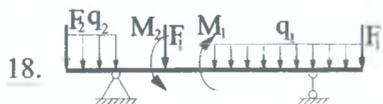
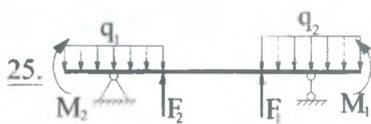
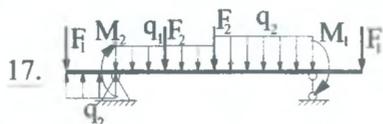


Таблица 1.1 – Числовые значения нагрузок для расчета балок

Номер варианта	Размер $a$ , м	Нагрузка			Индекс нагрузки		
		$q$ , кН/м	$F$ , кН	$M$ , кН м	$q$	$F$	$M$
1	0,9	30	110	40	2	1,2	2
2	1,1	40	100	30	2	1	1
3	1,0	32	120	34	1	1	1,2
4	0,8	34	90	36	1,2	2	1
5	1,1	30	70	32	2	1	2
6	1,0	36	80	38	1	2	1,2
7	1,2	38	90	28	1,2	1	1
8	0,9	40	100	30	2	2	2
9	1,0	30	110	32	1,2	1	1,2
10	1,1	40	80	30	1	2	2
11	0,9	34	90	40	2	1	1
12	1,2	36	65	38	1,2	2	1
13	1,1	38	70	32	1	1	2
14	0,9	40	75	30	2	2	1
15	1,2	42	80	28	1	1	1,2
16	1,1	44	60	34	1,2	2	1
17	1,0	32	70	42	2	2	2
18	0,8	42	80	40	1,2	1	1,2
19	0,9	34	90	32	1	2	2
20	1,1	36	100	36	1	1	1
21	0,8	30	110	28	2	2	2
22	0,9	38	120	30	2	1	1
23	1,0	40	95	42	1	2	1,2
24	1,1	32	110	28	1,2	2	1
25	1,2	34	105	40	1	1	2
26	1,1	38	110	30	2	1	1,2
27	1,2	40	80	40	1	2	1
28	0,8	34	90	36	2	1	2
29	0,9	30	100	38	1	2	1
30	1,0	32	110	32	1,2	1	1,2
31	1,1	50	90	40	1	2	2
32	0,8	45	60	30	2	1	1
33	0,9	40	70	35	1,2	2	1
34	0,8	50	80	32	1	2	2
35	1,0	44	120	30	2	1	1
36	1,1	30	140	36	1,2	2	2
37	0,9	34	70	38	2	1	2
38	1,1	32	110	28	1	2	1
39	1,0	40	80	40	1,2	2	1
40	0,8	36	70	50	2	1	1,2

### 1.6 Пример расчета двутавровой балки на прочность и жесткость

Дано: Двутавровая балка (рисунок 1.3) загружена сосредоточенной силой  $F = 40$  кН, моментом  $m = 50$  кН·м и распределенной нагрузкой  $q = 30$  кН/м. Расчетное сопротивление материала балки  $R = 210$  МПа,  $R_s = 120$  МПа; модуль продольной упругости  $E = 200$  ГПа; допускаемый прогиб  $[f/l] = 1/500$  для пролета и  $1/100$  для консолей.

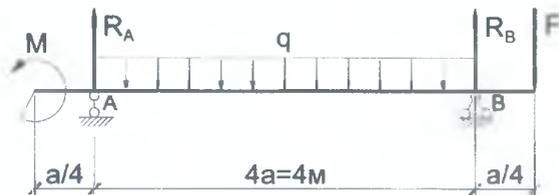


Рисунок 1.3 – Расчетная схема балки и нагрузки

Требуется: (см. п.п. 1–7).

Решение:

#### 1. Определение опорных реакций.

Составим уравнения статического равновесия:

$$\sum m_A = 0, F \cdot 4,25a + q \cdot 4a \cdot 2a - R_B \cdot 4a - m = 0,$$

$$R_B = \frac{4,25 \cdot Fa + 8 \cdot qa^2 - m}{4a};$$

$$R_B = 90 \text{ кН},$$

$$\sum m_B = 0, F \cdot 0,25a - q \cdot 4a \cdot 2a + R_A \cdot 4a - m = 0,$$

$$R_A = \frac{m + 8 \cdot qa^2 - 0,25Fa}{4a};$$

$$R_A = 70 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = 0; R_A + R_B - 4qa - F = 0; \quad 70 + 90 - 120 - 40 = 160 - 160 = 0.$$

#### 2. Построение эпюр $Q$ , $M$ .

Определяем значения  $Q$ ,  $M$  в характерных сечениях балки.

$$Q_0 = 0;$$

$$Q_{A(\text{лев})} = 0;$$

$$Q_{A(\text{прав})} = R_A = 70 \text{ кН};$$

$$Q_C = F = 40 \text{ кН};$$

$$M_0 = -m = -50 \text{ кН·м};$$

$$M_A = -m = -50 \text{ кН·м};$$

$$M_C = 0;$$

$$M_B = -F a/4 = -40 \cdot 0,25 = -10 \text{ кН·м}.$$

Определим положение сечения с координатой  $z_0$ , в котором  $Q = 0$ :

$$Q_{z_0} = R_A - qz_0 = 0; \quad z_0 = \frac{R_A}{q} = \frac{70}{30} = 2,33 \text{ м}.$$

Тогда величина максимального момента для сечения ( $z_0$ ) будет равна:

$$M_{\max} = -m + R_A z_0 - q \frac{z_0^2}{2} = -50 + 70 \cdot 2,33 - 30 \cdot \frac{2,33^2}{2} = 32 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

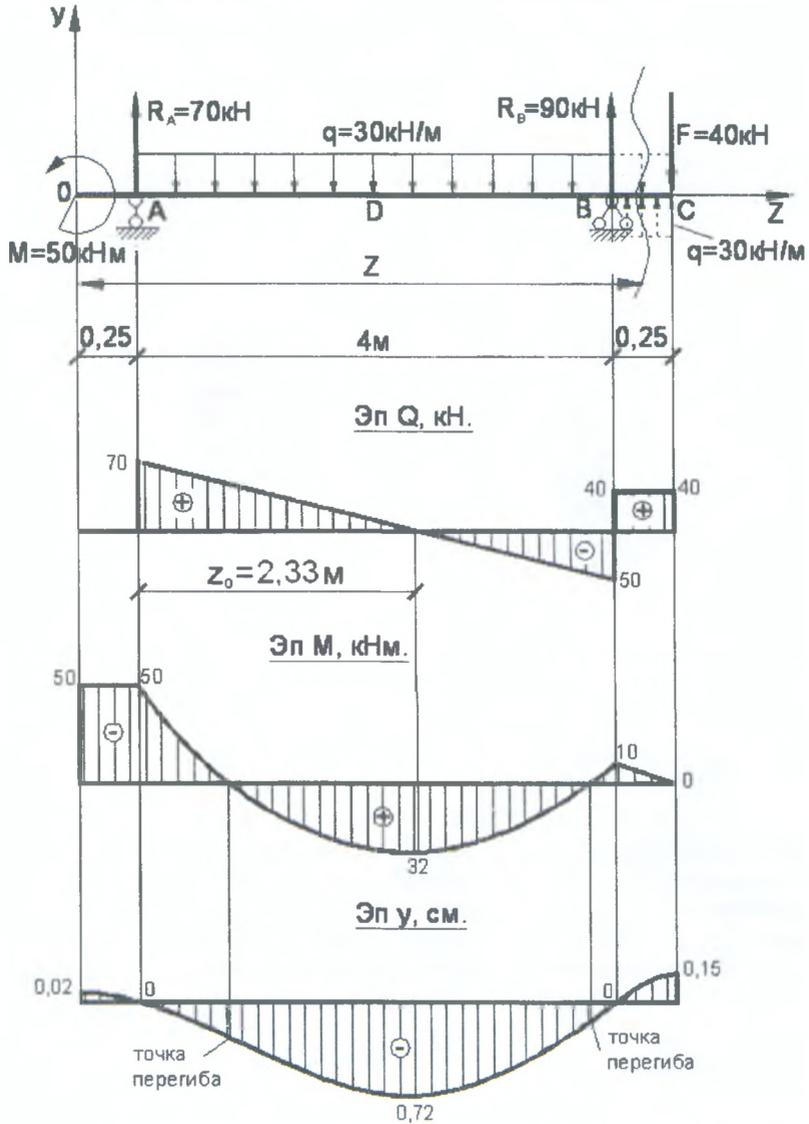


Рисунок 1.4 – Эпюры поперечных сил, изгибающих моментов, прогибов

### 3. Подбор сечения балки и проверка на прочность.

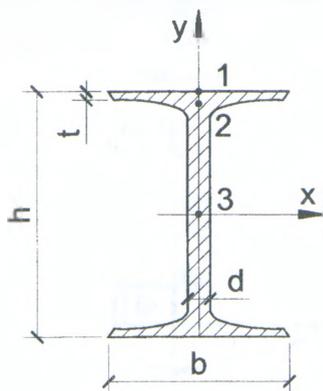
Сечение подбираем из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R.$$

Требуемый момент сопротивления равен:

$$W_x = \frac{M_{\max}}{R} = \frac{50 \cdot 10^4}{210 \cdot 10^6} = 238 \text{ см}^3.$$

По таблицам прокатных профилей выбираем двутавр № 22. Геометрические характеристики принятого двутавра:



$$\begin{aligned} h &= 22 \text{ см}; \\ b &= 12 \text{ см}; \\ t &= 0,89 \text{ см}; \\ d &= 0,54 \text{ см}; \\ I_x &= 2790 \text{ см}^4; \\ W_x &= 254 \text{ см}^3; \\ \sigma_{x,\max}^{\text{отс}} &= 143 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Рисунок 1.5 – Схема двутавра

Проверка прочности балки по касательным напряжениям в точке 3 (см. рис. 3) сечения А справа, где  $Q_{\max} = 70 \text{ кН}$ .

$$\tau_{\max} = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 143 \cdot 10^{-6}}{2790 \cdot 10^{-8} \cdot 0,54 \cdot 10^{-2}} = 66,4 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\tau_{\max} = 66,4 \text{ МПа} < R_s = 120 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

Проверка прочности балки по главным напряжениям, используя третью теорию прочности. Проверку производим для точек примыкания полки двутавра к стенке (точка 2, рисунок 1.5), в сечении А справа, где  $Q_A = 70 \text{ кН}$ ;  $M_A = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}$ . Условие прочности по третьей теории прочности имеет вид:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R.$$

Для точки 2

$$y_2 = \frac{h}{2} - t = \frac{22}{2} - 0,89 = 10,11 \text{ см};$$

$$S_{x,2} = b \cdot t \cdot \frac{h-t}{2} = 12 \cdot 0,89 \cdot \frac{22-0,89}{2} = 112,7 \text{ см}^3;$$

$$\sigma_z = \frac{M_z \cdot y_z}{I_z} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 10,11 \cdot 10^{-2}}{2790 \cdot 10^8} = 181,2 \text{ МПа};$$

$$\tau_z = \frac{Q_z \cdot S_{x,z}^{\text{max}}}{I_z \cdot d} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 112,7 \cdot 10^{-6}}{2790 \cdot 10^8 \cdot 0,54 \cdot 10^{-2}} = 52,4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_n = \sqrt{181,2^2 + 4 \cdot 52,4^2} = 209,5 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по главным напряжениям выполняется.

4. Определение главных напряжений для одной из опасных точек сечения графическим путем.

Покажем напряженное состояние в точке 2 сечения А (справа).

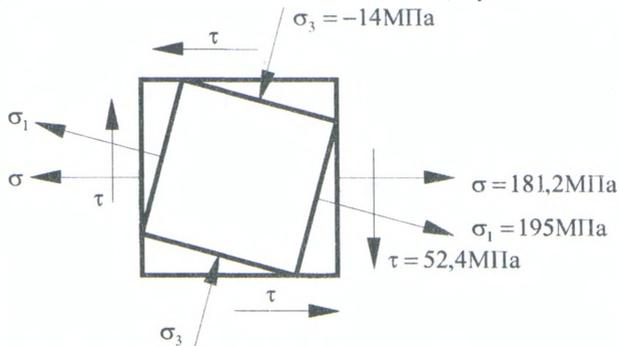


Рисунок 1.6 – Напряженное состояние в точке 2

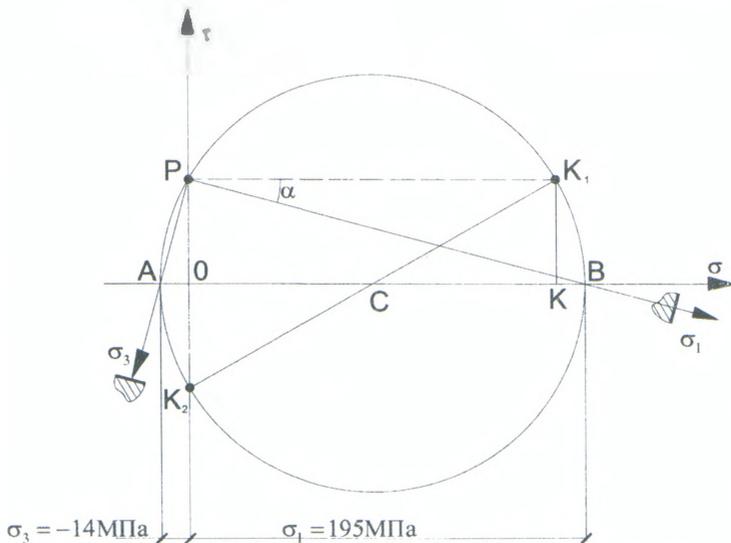


Рисунок 1.7 – Круг Мора

В системе координат  $\tau - \sigma$  (рисунок 1.7) откладываем в масштабе отрезки:  $OK = \sigma = 181,2$  МПа;  $KK_1 = \tau = 52,4$  МПа,  $OK_2 = -52,4$  МПа. Соединив точки  $K_1$  и  $K_2$  получим диаметр искомого круга напряжений с центром в точке  $C$  на котором описываем окружность. Пересечение круга с осью  $\sigma$  даёт две точки  $A$  и  $B$ , которые характеризуют главные напряжения. Так, отрезок  $OB$  в масштабе представляет  $\sigma_1 = 195$  МПа, а  $OA = \sigma_3 = -14$  МПа. Проведя прямые через точки  $K_1$  и  $K_2$  до их пересечения, находим полюс  $P$ . Соединив точки  $P$  и  $B$ , получим направление действия напряжения  $\sigma_1$ , а точки  $P$  и  $A$  – направление действия  $\sigma_3$ . Переносим параллельно направлению действия напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  на элемент, представленный на рисунке 1.6, и покажем положение главных площадок, которые перпендикулярны к соответствующим напряжениям  $\sigma_1, \sigma_3$ .

5. Построение эпюр нормальных, касательных, главных и экстремальных касательных напряжений для опасного сечения по главным напряжениям.

При определении величины главных напряжений и экстремальных касательных напряжений воспользуемся теорией плоского напряженного состояния.

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}); \quad \tau_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2};$$

где  $\sigma$  и  $\tau$  определяем по известным формулам для соответствующих точек сечения:

$$\sigma = -\frac{M_x}{I_x} \cdot y; \quad \tau = \frac{Q \cdot S_x^{omc}}{I_x \cdot b}$$

При этом  $Q, M, y$  необходимо подставить в формулы с учетом их знаков.

$$\text{Точка 1:} \quad \sigma = -\frac{M_x}{W_x} = \frac{50 \cdot 10^4}{254 \cdot 10^4} = 196,8 \text{ МПа,}$$

$$\tau = 0 \text{ т.к. } S_x^{omc} = 0; \quad \sigma_1 = 196,8 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_3 = 0; \quad \tau_{\max, \min} = \pm \frac{\sigma_1}{2} = \pm 98,4 \text{ МПа.}$$

$$\text{Точка 2:} \quad \sigma = \frac{50 \cdot 10^4}{2790 \cdot 10^4} \cdot 10,11 \cdot 10^2 = 181,2 \text{ МПа,}$$

$$\tau = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 112,7 \cdot 10^{-6}}{2790 \cdot 10^{-8} \cdot 12 \cdot 10^2} = 2,4 \text{ МПа,}$$

$$\tau = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 112,7 \cdot 10^{-6}}{2790 \cdot 10^{-8} \cdot 0,54 \cdot 10^2} = 52,4 \text{ МПа.}$$

Дальнейший ход вычислений сводим в таблицу 1.2 и по полученным результатам строим эпюры напряжений (рисунок 1.8).

Таблица 1.2 – Результаты расчетов

Точка сечения	Y см.	$S_{x,2}^{отс.}$ см <sup>3</sup>	$\sigma$ МПа	$\tau$ МПа	$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ МПа	$\sigma_1$ МПа	$\sigma_3$ МПа	$\tau_{\max}$ МПа
1	11	0	196,8	0	196,8	196,8	0	$\pm 98,4$
2	полка	10,11	112,7	181,2	2,4	181,5	181,4	$\pm 90,8$
	стенка	10,11	112,7	181,2	52,4	209,5	195,4	$\pm 104,8$
3	0	143	0	66,4	132,8	66,4	$\pm 66,4$	
2'	полка	-10,11	112,7	-181,2	2,4	181,5	0,15	$\pm 90,8$
	стенка	-10,11	112,7	-181,2	52,4	209,5	14,2	$\pm 104,8$
1'	11	0	-196,8	0	196,8	0	-196,8	$\pm 98,4$

Эп. $\sigma$ (МПа)      Эп. $\tau$ (МПа)      Эп. $\sigma_1, \sigma_3$ (МПа)      Эп. $\tau_{\max}$ (МПа)

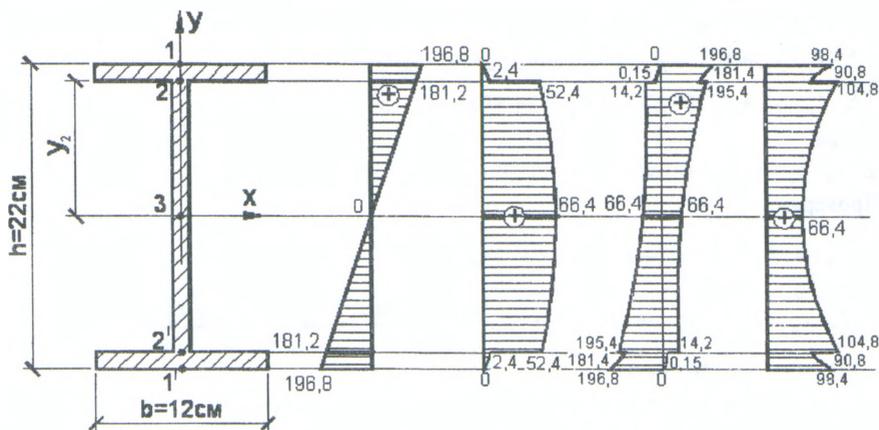


Рисунок 1.8 – Эпюры напряжений в сечении А (справа)

#### 6. Построение эпюры прогибов балки.

Начало координат выбираем на левом конце балки (т.  $O$ ). Продлим равномерно распределенную нагрузку  $q$  до правого конца балки и уравновесим её компенсирующей распределённой нагрузкой обратного направления (рисунок 1.2).

Составим универсальное уравнение прогибов для последнего силового участка ВС.

$$E \cdot I_x \cdot Y_z = E \cdot I_x \cdot Y_0 + E \cdot I_x \cdot \theta_0 \cdot z - \frac{m \cdot z^2}{2} + \frac{R_a \cdot (z - 0,25a)^3}{6} - \frac{q \cdot (z - 0,25a)^4}{24} + \frac{R_b \cdot (z - 4,25a)^3}{6} + \frac{q \cdot (z - 4,25a)^4}{24}$$

где  $\theta_0$  и  $y_0$  – начальные параметры (угол поворота и прогиб сечения в начале координат), которые определим из условий для опорных сечений.

При  $z = 0,25a$ ,  $y_A = 0$ ,

$$E \cdot I_X \cdot y_A = E \cdot I_X \cdot y_O + E \cdot I_X \cdot \theta_O \cdot 0,25a - \frac{m \cdot (0,25a)^2}{2} = 0;$$

при  $z = 4,25a$ ,  $y_B = 0$ ,

$$E \cdot I_X \cdot y_B = E \cdot I_X \cdot y_O + E \cdot I_X \cdot \theta_O \cdot 4,25a - \frac{m \cdot (4,25a)^2}{2} + \frac{R_A \cdot (4a)^3}{6} - \frac{q \cdot (4a)^4}{24} = 0.$$

Решаем систему уравнения:  $y_A = 0$ ;  $y_B = 0$ .

$$\begin{cases} E \cdot I_X \cdot y_O + 0,25 \cdot E \cdot I_X \cdot \theta_O - \frac{50 \cdot 0,25^2}{2} = 0; \\ E \cdot I_X \cdot y_O + 4,25 \cdot E \cdot I_X \cdot \theta_O - \frac{50 \cdot 4,25^2}{2} - \frac{70 \cdot 4^2}{6} - \frac{30 \cdot 4^4}{24} = 0. \end{cases}$$

После упрощения получим:

$$\begin{cases} E \cdot I_X \cdot y_O + 0,25 \cdot E \cdot I_X \cdot \theta_O = 1,5625 \text{ кН} \cdot \text{м}^3; \\ E \cdot I_X \cdot y_O + 4,25 \cdot E \cdot I_X \cdot \theta_O = 24,8965 \text{ кН} \cdot \text{м}^3. \end{cases}$$

Тогда

$$E \cdot I_X \cdot \theta_O = 5,8335 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \quad E \cdot I_X \cdot y_O = 0,1041 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Проверка:

$$E \cdot I_X \cdot y_A = E \cdot I_X \cdot y_O + E \cdot I_X \cdot \theta_O \cdot 0,25a - \frac{m \cdot (0,25a)^2}{2} = 1,5625 - 1,5625 = 0;$$

$$E \cdot I_X \cdot y_B = E \cdot I_X \cdot y_O + E \cdot I_X \cdot \theta_O \cdot 4,25a - \frac{m \cdot (4,25a)^2}{2} + \frac{R_A \cdot (4a)^3}{6} - \frac{q \cdot (4a)^4}{24} = 771,5631 - 771,5625 \approx 0.$$

Для построения эпюры прогибов балки, в нашем случае, вычислим прогибы только следующих сечений:

В сечении  $O$  ( $z = 0$ ):

$$E \cdot I_X \cdot y_O = 0,1041 \text{ кН} \cdot \text{м}^3; \quad E \cdot I_X = 2 \cdot 10^{11} \cdot 2790 \cdot 10^{-8} = 5580 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

$$y_O = \frac{0,1041}{5580} = 0,02 \text{ мм}.$$

В сечении  $A$  ( $z = a/4$ ):

$$y_A = 0.$$

В сечении  $D$  (середина пролета,  $z = 2,25a$ ):

$$E \cdot I_X \cdot y_D = E \cdot I_X \cdot y_O + E \cdot I_X \cdot \theta_O \cdot 2,25a - \frac{m \cdot (2,25a)^2}{2} + \frac{R_A \cdot (2a)^3}{6} - \frac{q \cdot (2a)^4}{24} = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$y_D = -\frac{40}{5580} = -0,72 \text{ см}.$$

В сечении  $B$  ( $z = 4,25a$ ):

$$y_B = 0.$$

В сечении  $C$  ( $z = 4,5a$ ):

$$E \cdot I_x \cdot y_C = E \cdot I_x \cdot y_0 + E \cdot I_x \cdot \theta_0 \cdot 4,5a - \frac{m \cdot (4,5a)^2}{2} + \frac{R_l \cdot (4,25a)^1}{6} - \frac{q \cdot (4,25a)^4}{24} +$$

$$+ \frac{R_R \cdot (0,25a)^3}{6} + \frac{q \cdot (0,25a)^4}{24} = 0,1041 + 5,8335 \cdot 4,5 - \frac{50 \cdot 4,5^2}{2} + \frac{70 \cdot 4,25^1}{6} -$$

$$\frac{30 \cdot 4,25^4}{24} + \frac{90 \cdot 0,25^3}{6} + \frac{30 \cdot 0,25^4}{24} = 812 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$y_C = \frac{812}{5580} = 0,15 \text{ см.}$$

По данным расчёта построена эпюра прогибов балки (рисунок 1.3).

**Примечание** – В расчетно-проектировочной работе необходимо еще определить прогибы двух сечений в пролёте балки, т. е. при  $z = 2a$ ;  $z = 4a$ , для более точного построения эпюры прогибов.

7. Проверка балки на жёсткость.

В пролёте:  $l = 4a = 4 \text{ м}$ ;

$$\frac{y_D}{l} = \frac{0,72}{400} = \frac{1}{555} < \left[ \frac{f}{l} \right] = \frac{1}{500}.$$

На правой консоли:  $l = \frac{a}{4} = 0,25 \text{ м}$ ;

$$\frac{y_C}{l} = \frac{0,15}{25} = \frac{1}{167} < \left[ \frac{f}{l} \right] = \frac{1}{100}.$$

Условие жёсткости выполняется. Окончательно принимаем двутавр № 22.

8. Определение коэффициентов запаса по прочности и жёсткости.

Запас по напряжениям:

– по нормальным напряжениям  $K_{\sigma} = \frac{R}{\sigma_{\max}} = \frac{210}{196,8} = 1,07;$

– по касательным напряжениям  $K_{\tau} = \frac{R_s}{\tau_{\max}} = \frac{120}{66,4} = 1,81;$

– по главным напряжениям  $K_{\sigma_1} = \frac{R}{\sigma_1} = \frac{210}{209,5} = 1,00.$

Запас по жёсткости:  $K_{y_D} = \frac{[y_D]}{y_D} = \frac{0,8}{0,72} = 1,1;$   $K_{y_C} = \frac{[y_C]}{y_C} = \frac{0,25}{0,15} = 1,67;$

где  $[y_D] = \frac{l}{500} = 0,8 \text{ см,}$   $[y_C] = \frac{l}{100} = 0,25 \text{ см.}$

## 2 СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

### 2.1 Общие сведения

В реальных конструкциях часто встречаются случаи, когда в поперечных сечениях действуют два или более внутренних силовых фактора, вызывающих сочетание простых видов деформации. В таких случаях элементы конструкций

испытывают сложное сопротивление (сложную деформацию): кривой изгиб; внецентренное сжатие (растяжение); изгиб с кручением и др.

## 2.2 Кривой изгиб

Кривой изгиб возникает тогда, когда силовая плоскость, проходящая через продольную ось бруса, не совпадает ни с одной из главных осей инерции поперечного сечения, или одновременное сочетание двух прямых изгибов, действующих во взаимно перпендикулярных плоскостях.

При поперечном кривой изгибе в поперечных сечениях балок действуют четыре внутренних силовых фактора: поперечные силы  $Q_x, Q_y$  и изгибающие моменты  $M_x, M_y$ . Однако, как правило, влияние поперечных сил незначительно и в расчетах ими пренебрегают. При определении напряжений и перемещений при кривой изгибе используют принцип независимости действия сил. Так, суммарные нормальные напряжения определяют по следующей формуле:

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x, \quad (2.1)$$

где  $M_x, M_y$  – изгибающие моменты;

$x, y$  – координаты точек, в которых определяется  $\sigma$ ;

$I_x, I_y$  – главные центральные моменты инерции поперечного сечения. Знаки слагаемых напряжений целесообразнее устанавливать исходя из характера деформирования продольных слоёв балки.

Расчет на прочность при кривой изгибе сводится к составлению условия прочности для опасного сечения балки:

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \leq R, \quad (2.2)$$

где  $W_x, W_y$  – осевые моменты сопротивления поперечного сечения при изгибе;

$R$  – расчетное сопротивление материала балки на растяжение и сжатие.

По условию прочности, как обычно, можно решить три типа задач. Наибольший интерес представляет проектная задача, т. к. в условие прочности входит две неизвестные величины:  $W_x, W_y$ . Поэтому при решении проектной задачи предварительно задаются соотношением  $k = W_x/W_y$ . Тогда условие прочности примет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{W_x} (M_x + kM_y) \leq R, \quad (2.3)$$

отсюда:

$$W_x = (M_x + kM_y) / R; \quad W_y = W_x / k. \quad (2.4)$$

При этом, коэффициент соотношения осевых моментов сопротивления поперечного сечения зависит от формы сечения. Так, например, для прямоугольного сечения  $k = h/b$ , для двутавровых  $k = 8 \div 10$ ; швеллеров  $k = 6 \div 9$  и т. д.

### 2.3 Внецентренное сжатие

Внецентренное сжатие (растяжение) возникает в том случае, когда брус нагружен в продольном направлении силой, приложенной внецентренно, т. е. на некотором расстоянии от центра тяжести поперечного сечения. Деформация внецентренного сжатия является более характерной для элементов строительных конструкций.

В любом поперечном сечении бруса при внецентренном сжатии возникают три внутренних силовых фактора:

$$N = -F; \quad M_x = F \cdot y_F; \quad M_y = F \cdot x_F, \quad (2.5)$$

где  $x_F, y_F$  – координаты точки приложения внешней силы.

Следовательно, общий случай внецентренного сжатия сводится к центральному сжатию ( $N$ ) и чистому косому изгибу ( $M_x, M_y$ ), который, как описано в пункте 2.2, можно представить в виде двух чистых прямых изгибов, действующих во взаимно перпендикулярных плоскостях. С учетом принципа независимости действия сил, нормальные напряжения в поперечном сечении бруса равны алгебраической сумме напряжений от каждого внутреннего силового фактора:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{N}{A} + \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y}, \quad (2.6)$$

Данная формула позволяет определить напряжения в любой точке поперечного сечения, характеризуемой координатами  $x, y$ . Путем преобразования полученную формулу для определения напряжений можно представить в виде

$$\sigma = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x}{i_x^2} + \frac{y_F y}{i_y^2} \right), \quad (2.7)$$

где  $F$  – внешняя нагрузка (при внецентренном сжатии следует приписывать знак «–», а при внецентренном растяжении знак «+»);

$i_x^2, i_y^2$  – квадраты главных радиусов инерции поперечного сечения;

$x, y$  – координаты точки, в которой определяется напряжение;

$x_F, y_F$  – координаты точки приложения внешней нагрузки. При этом координаты точек:  $x, y, x_F, y_F$  следует учитывать с их знаками.

Расчет на прочность при внецентренном сжатии сводится к составлению условия прочности для опасных точек поперечного сечения. Положения опасных точек определяются при помощи нулевой линии, т. е. линия в точках которой нормальные напряжения  $\sigma$  равны нулю. Для определения положения нулевой линии вычисляют отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_F}; \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_F}, \quad (2.8)$$

По полученным отрезкам изображают в сечении нулевую линию, а проведя две касательные к сечению параллельно нулевой линии, находят две наиболее напряженные (наиболее удаленные) точки поперечного сечения в растянутой и сжатой зонах, условия прочности для которых получают вид:

$$\sigma_{\max} = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x}{i_x^2} + \frac{y_F y}{i_y^2} \right) \leq R_p, \quad (2.9)$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x}{i_x^2} + \frac{y_F y}{i_y^2} \right) \leq R_c.$$

где  $x, y$  – координаты опасных точек сечения;

$R_p, R_c$  – расчетные сопротивления материала бруса на растяжение и сжатие соответственно.

При решении проектной задачи (подбор сечений) в общем случае приходится пренебрегать либо деформацией центрального сжатия, либо деформацией чистого косоугольного изгиба из-за трудностей решения кубического уравнения. При этом, полученные результаты округляют в большую сторону и окончательно проверяют по общему условию прочности. Но в тех случаях, когда можно выразить размеры поперечного сечения через один неизвестный параметр (например, « $b$ »), то решение задачи несколько упрощается.

#### 2.4 Вопросы для самопроверки

1. Что понимают под внецентренным сжатием (растяжением)?
2. Какие простые деформации возникают при внецентренном растяжении?
3. Что понимают под нулевой линией? Какими свойствами обладает нулевая линия?
4. Какие используют способы определения положения нулевой линии при внецентренном сжатии?
5. Как устанавливают опасные точки в сечениях при внецентренном сжатии?
6. Как производится расчет на прочность и подбор сечений?
7. Что понимают под ядром сечения. Способы его построения?
8. В каких случаях строят ядро сечения?

#### 2.5 Задание по расчетно-проектировочной работе № 5 «Расчет внецентренно сжатой колонны»

Дано: Колонна (принять по номеру схемы) сложной формы поперечного сечения подвергнута внецентренному сжатию внешней нагрузкой  $F$  (величину нагрузки и точку нагружения принять по номеру варианта). Расчетное сопротивление материала колонны на сжатие  $R_c = 10$  МПа, на растяжение  $R_p = 1$  МПа.

Требуется:

- 1) определить геометрические характеристики поперечного сечения колонны;
- 2) определить положение нулевой линии и опасных точек сечения;
- 3) вычислить наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения;
- 4) подобрать размеры поперечного сечения из расчета на прочность;
- 5) построить эпюры нормальных напряжений;
- 6) построить и исследовать ядро сечения.

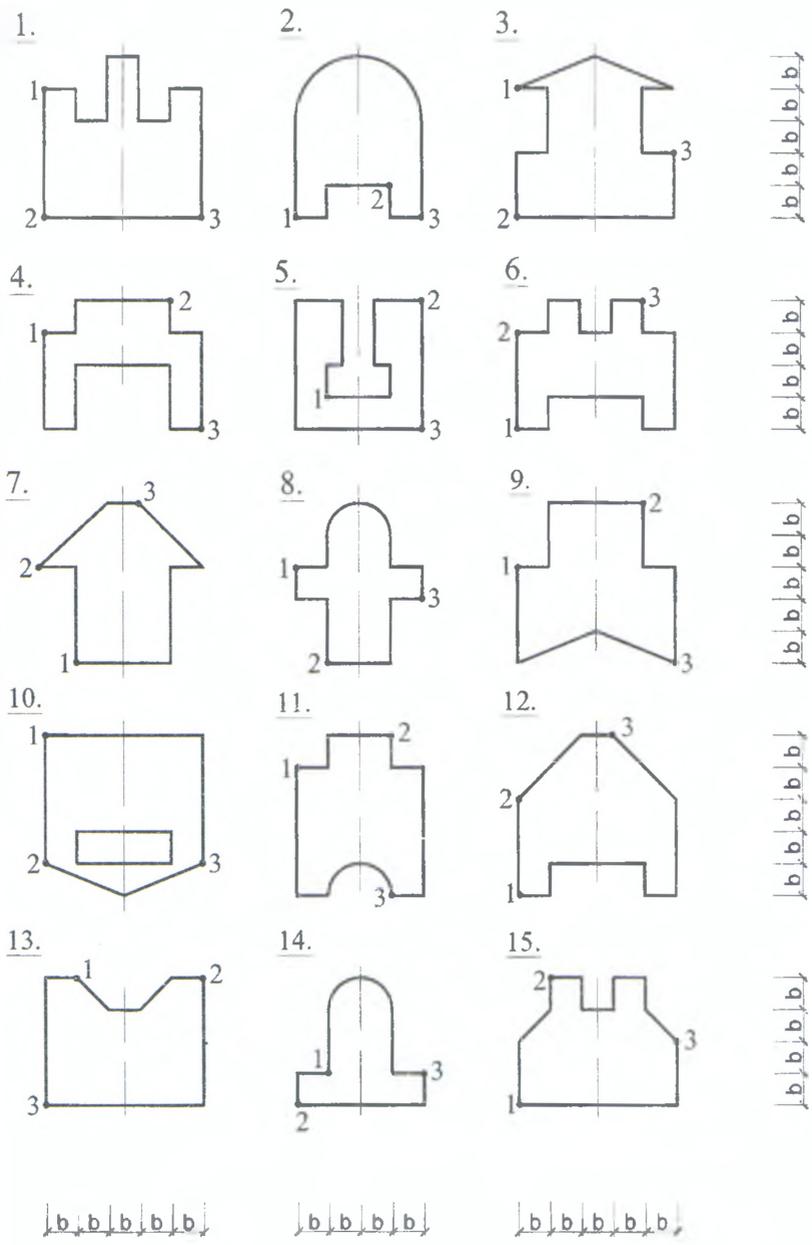
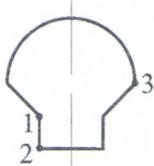


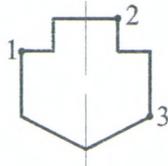
Рисунок 2.1 – Схемы поперечных сечений колонны с точками приложения F

Продолжение рисунка 2.1

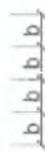
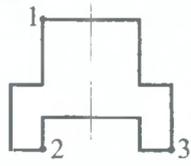
16.



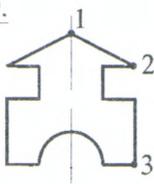
17.



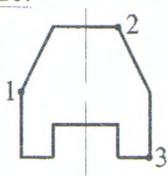
18.



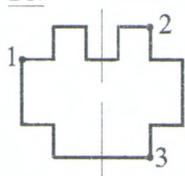
19.



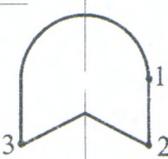
20.



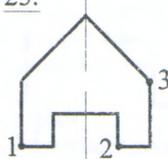
21.



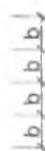
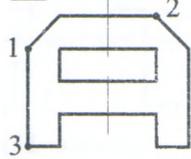
22.



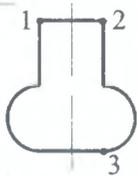
23.



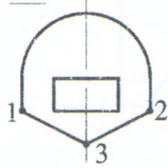
24.



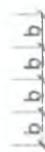
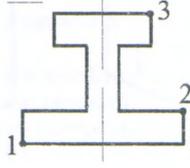
25.



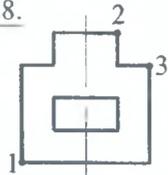
26.



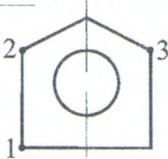
27.



28.



29.



30.

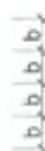
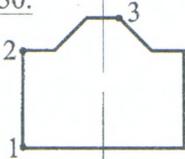


Таблица 2.1 – Числовые значения нагрузок и точки их приложения

Номер варианта	F, кН	Точка приложения силы	Номер варианта	F, кН	Точка приложения силы
1	450	1	26	710	2
2	480	2	27	750	3
3	490	3	28	775	1
4	460	1	29	740	2
5	440	2	30	700	3
6	430	3	31	310	1
7	420	1	32	320	2
8	470	2	33	330	3
9	410	3	34	340	1
10	550	1	35	350	2
11	530	2	36	360	3
12	540	3	37	370	1
13	505	1	38	380	2
14	515	2	39	390	3
15	525	3	40	40	1
16	535	1	41	200	2
17	640	2	42	220	3
18	620	3	43	230	1
19	610	1	44	240	2
20	630	2	45	250	3
21	660	3	46	260	1
22	680	1	47	270	2
23	655	2	48	280	3
24	745	3	49	290	1
25	720	1	50	300	2

### 2.8 Пример расчета внецентренно сжатой колонны

Дано: Колонна сложной формы поперечного сечения, подвергнута внецентренному сжатию внешней нагрузкой  $F = 250$  кН. Расчётное сопротивление материала колонны на сжатие  $R_c = 10$  МПа, на растяжение  $R_p = 1$  МПа.

Требуется: (см. пп.1–6).

Решение:

1. Определение геометрических характеристик поперечного сечения колонны. Покажем поперечное сечение колонны в масштабе и выберем вспомогательные оси координат  $x, y$ . Разбиваем сечение на два простых и определим координаты центров тяжести простых сечений, их площади.

1. Для первого сечения (полукруг)

$$x_1 = 3b + \frac{4b}{3\pi} = 3,43b; \quad y_1 = 0; \quad A_1 = 1,57b^2.$$

2. Для второго сечения (прямоугольник)

$$x_2 = 1,5b; \quad y_2 = 0; \quad A_2 = 6b^2.$$

Ось  $x$  совпадает с осью симметрии сечения, следовательно, она является одной из главных центральных осей инерции.

Определим статический момент сечения относительно оси  $Y$

$$S_y = S_y^I + S_y^{II} = A_1 x_1 + A_2 x_2 = 1,57b^2 \cdot 3,43b + 6b^2 \cdot 1,5b = 14,38b^3,$$

общая площадь:

$$A = A_1 + A_2 = 1,57b^2 + 6b^2 = 7,57b^2.$$

Определим координату центра тяжести сечения  $x_C$ :

$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{14,38b^3}{7,57b^2} = 1,9b.$$

Изобразим на схеме сечения главные центральные оси  $x_C, y_C$  и определим координаты центров тяжести простых сечений относительно главных центральных осей

$$x_{C_1} = x_1 - x_C = 1,53b; \quad y_{C_1} = 0; \quad x_{C_2} = x_2 - x_C = -0,4b; \quad y_{C_2} = 0.$$

Вычислим главные центральные моменты инерции всего сечения

$$I_{x_C} = I_{x_C}^I + I_{x_C}^{II} = \frac{\pi(2b)^4}{128} + \frac{3b(2b)^3}{12} = 2,39b^4;$$

$$I_{y_C} = I_{y_C}^I + I_{y_C}^{II} = I_{y_C}^I + x_{C_1}^2 \cdot A_1 + I_{y_C}^{II} + x_{C_2}^2 \cdot A_2 = 0,11b^4 + (1,53b)^2 \cdot 1,57b^2 + \frac{2b(3b)^3}{12} + (0,4b)^2 \cdot 6b^2 = 9,2b^4.$$

Определим квадраты радиусов инерции

$$i_{x_C}^2 = \frac{I_{x_C}}{A} = \frac{2,39b^4}{7,57b^2} = 0,32b^2; \quad i_{y_C}^2 = \frac{I_{y_C}}{A} = \frac{9,2b^4}{7,57b^2} = 1,22b^2.$$

2. Определение положения нулевой линии и опасных точек сечения.

Координаты точки приложения внешней нагрузки:  $x_F = -1,9b$ ;  $y_F = b$ . Вычислим отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат

$$a_x = -\frac{i_{y_C}^2}{x_F} = \frac{1,22b^2}{1,90b} = 0,64b; \quad a_y = -\frac{i_{x_C}^2}{y_F} = -\frac{0,32b^2}{b} = -0,32b.$$

Нулевая линия показана на рисунке 2.2.

Найдём положение опасных точек. Проведя касательные к сечению параллельно нулевой линии, устанавливаем, что наиболее напряжённые точки сечения – это точки  $F$  и  $D$ , которые наиболее удалены от нулевой линии. В точке  $F$  действует наибольшее сжимающее напряжение, а в точке  $D$  – наибольшее растягивающее.

3. Вычисление наибольших напряжений.

Напряжения в опасных точках определим по следующим формулам

$$\sigma_F = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y_F}{i_y^2} + \frac{x_F x_F}{i_x^2} \right); \quad \sigma_D = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y_D}{i_y^2} + \frac{x_F x_D}{i_x^2} \right);$$

где  $x_F = -1,9b$ ;  $y_F = b$ ;  $x_D = (3b - x_c) + b \cos \alpha$ ;  $y_D = -b \sin \alpha$ ;

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{a_x}{a_y} \right| = \frac{0,64b}{0,32b} = 2; \quad \alpha = 63,4^\circ; \quad \cos \alpha = 0,447; \quad \sin \alpha = 0,894;$$

$$x_D = 1,1b + 0,447b = 1,547b; \quad y_D = -0,894b.$$

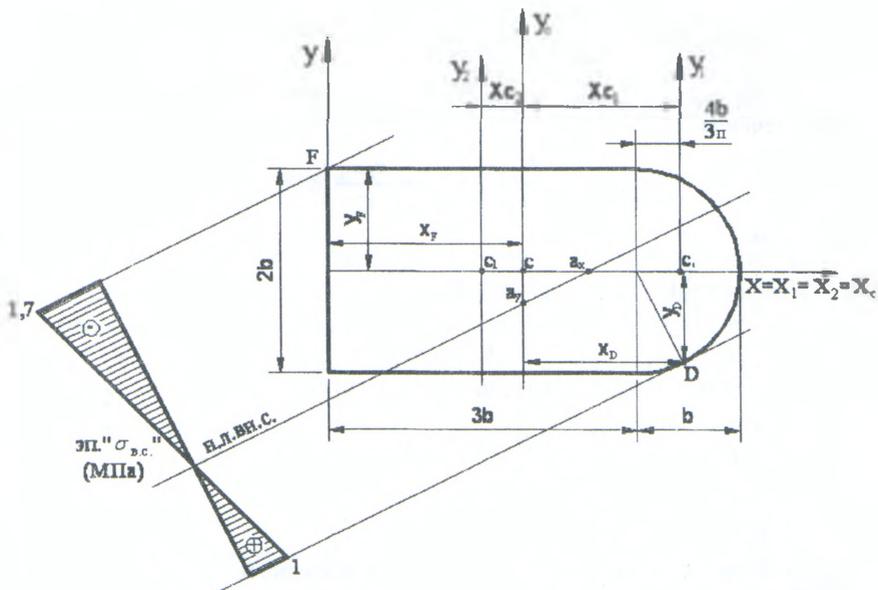


Рисунок 2.2 – Схема сечения колонны, нулевая линия и эпюра напряжений

#### 4. Подбор размеров поперечного сечения из расчёта на прочность.

Составим условие прочности для опасной точки в сжатой области сечения.

$$\sigma_F = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F^2}{i_y^2} + \frac{x_F^2}{i_x^2} \right) \leq R_c.$$

Перепишем условие прочности следующим образом

$$\sigma_F = -\frac{F}{A} \left[ 1 + \frac{1}{i_x^2} \left( y_F^2 + \frac{i_x^2}{i_y^2} x_F^2 \right) \right] \leq R_c$$

$$\text{Обозначим } k = \frac{i_x^2}{i_y^2} = \frac{0,32b^2}{1,22b^2} = 0,26,$$

$$\text{тогда } \sigma_r = -\frac{F}{A} \left[ 1 + \frac{1}{i_x^2} (y_F^2 + kx_F^2) \right] \leq R_c$$

Перепишем через неизвестный параметр «b»:

$$\sigma_r = -\frac{F}{7,57b^2} \left[ 1 + \frac{1}{0,32b^2} (b^2 + 0,26 \cdot 1,9^2 b^2) \right] \leq R_c,$$

$$\sigma_r = -\frac{F}{7,57b^2} 7,058 = -0,93 \frac{F}{b^2} \leq R_c,$$

$$b = \sqrt{\frac{0,93F}{R_c}} = \sqrt{\frac{0,93 \cdot 250 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6}} = 15,3 \text{ см.}$$

Составим условие прочности для наиболее удалённой точки в растянутой области сечения

$$\sigma_D = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y_D}{i_x^2} + \frac{x_F x_D}{i_y^2} \right) \leq R_p$$

Перепишем

$$\sigma_D = -\frac{F}{A} \left[ 1 + \frac{1}{i_x^2} (y_F y_D + k \cdot x_F x_D) \right] \leq R_p,$$

$$\sigma_D = -\frac{F}{7,57 \cdot b^2} \left[ 1 + \frac{1}{0,32 \cdot b^2} \left( \begin{array}{l} b \cdot (-0,894b) + \\ + 0,26 \cdot (-1,9b) \cdot 1,547b \end{array} \right) \right] \leq R_p,$$

$$\sigma_D = \frac{F}{7,57b^2} \cdot 4,18 = 0,55 \frac{F}{b^2} \leq R_p, \text{ откуда}$$

$$b = \sqrt{\frac{0,55F}{R_p}} = \sqrt{\frac{0,55 \cdot 250 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^6}} = 37,2 \text{ см.}$$

За расчётную величину принимаем большее значение  $b = 37,2$  см.

Определим напряжения в опасных точках сечения и выполним проверку прочности.

$$\sigma_r = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F^2}{i_x^2} + \frac{x_F^2}{i_y^2} \right) = -\frac{250 \cdot 10^3}{7,57 \cdot 37,2^2 \cdot 10^{-4}} \times \left( 1 + \frac{b^2}{0,32b^2} + \frac{(1,9b)^2}{1,22b^2} \right) =$$

$$= -1,7 \text{ МПа} < R_c = 10 \text{ МПа};$$

$$\sigma_D = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y_D}{i_x^2} + \frac{x_F x_D}{i_y^2} \right) = -\frac{250 \cdot 10^3}{7,57 \cdot 37,2^2 \cdot 10^{-4}} \times$$

$$\left( 1 + \frac{b(-0,894b)}{0,32b^2} + \frac{(-1,9b) \cdot 1,547b}{1,22b^2} \right) = 1 \text{ МПа} \leq R_p = 1 \text{ МПа.}$$

Эпюра напряжений при внецентренном сжатии показана на рисунке 2.2.

##### 5. Построение эпюры нормальных напряжений.

Для построения эпюры  $\sigma$  воспользуемся графическим способом, построив предварительно эпюры  $\sigma$  для простых деформаций. Строим эпюры нормальных

напряжений от чистых прямых изгибов относительно главных центральных осей  $X_c$  и  $Y_c$ . Величины напряжений от моментов  $M_x = Fy_F$  и  $M_y = Fx_F$  в точках сечения  $B, F, D, C$  равны соответственно:

$$\sigma_{M_x}^B = -\frac{F \cdot y_F}{I_x} y_B = -\frac{250 \cdot 10^3 \cdot 37,2 \cdot (-37,2) \cdot 10^{-4}}{2,39 \cdot 37,2^4 \cdot 10^{-8}} = 0,75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{M_x}^F = -\sigma_{M_x}^B = -0,75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{M_x}^D = -\frac{F \cdot y_F}{I_x} y_D = -\frac{250 \cdot 10^3 \cdot 37,2 \cdot (-0,894) \cdot 10^{-4}}{2,39 \cdot 37,2^4 \cdot 10^{-8}} = 0,57 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{M_y}^B = -\frac{F \cdot x_F}{I_y} x_B = -\frac{250 \cdot 10^3 \cdot (-1,9) \cdot 37,2 \cdot 2,1 \cdot 37,2 \cdot 10^{-4}}{9,2 \cdot 37,2^4 \cdot 10^{-8}} = 0,78 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{M_y}^F = -\frac{F \cdot x_F}{I_y} x_F = -\frac{250 \cdot 10^3 \cdot (-1,9)^2 \cdot 37,2^2 \cdot 10^{-4}}{9,2 \cdot 37,2^4 \cdot 10^{-8}} = -0,71 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{M_y}^D = -\frac{F \cdot x_F}{I_y} x_D = -\frac{250 \cdot 10^3 \cdot (-1,9) \cdot 37,2 \cdot 1,547 \cdot 37,2 \cdot 10^{-4}}{9,2 \cdot 37,2^4 \cdot 10^{-8}} = 0,57 \text{ МПа}.$$

Накладывая эпюру  $\sigma_{M_x}$  на эпюру  $\sigma_{M_y}$ , находим нулевую точку  $i$ , соединив которую с центром тяжести поперечного сечения  $C$  получим положение нейтральной оси чистого косоугольного изгиба. Суммируя ординаты эпюр  $\sigma_{M_x}$  и  $\sigma_{M_y}$ , в точках  $F$  и  $D$  получим эпюру напряжений чистого косоугольного изгиба  $\sigma_{\text{ч.к.и.}}$  (рисунок 2.2).

Строим эпюру нормальных напряжений от центрального сжатия, при котором  $N = -F$ .

$$\sigma_N = -\frac{F}{A} = -\frac{250 \cdot 10^3}{7,57 \cdot 37,2^2 \cdot 10^{-4}} = -0,24 \text{ МПа}.$$

Складывая эпюры  $\sigma_{\text{ч.к.и.}}$  и  $\sigma_N$ , получаем эпюру нормальных напряжений от внецентренного сжатия (рисунок 2.2). Через нулевую точку на эпюре  $\sigma_{\text{в.с.}}$  проводим нулевую линию при внецентренном сжатии параллельно нейтральной оси при чистом косоугольном изгибе. Для контроля необходимо сравнить эпюру  $\sigma_{\text{в.с.}}$  с эпюрой нормальных напряжений, полученную аналитически (рисунок 2.2).

6. Построение и исследование ядра сечения.

Для построения ядра сечения определим отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат:

1. Нулевая линия 1-1:  $a_x = -1,9b$ ;  $a_y = \infty$ .

Координаты точки приложения силы (точка 1):

$$x_1 = -\frac{i_y^2}{a_x} = \frac{1,22b^2}{1,9b} = \frac{1,22 \cdot 37,2}{1,9} = 23,9 \text{ см}; \quad y_1 = -\frac{i_x^2}{a_y} = 0.$$

2. Нулевая линия 2-2:  $a_x = \infty$ ;  $a_y = -b$ .

$$x_{F_2} = -\frac{i_y^2}{a_x} = 0; \quad y_{F_2} = -\frac{i_x^2}{a_y} = \frac{0,32 \cdot b^2}{b} = 12 \text{ см.}$$

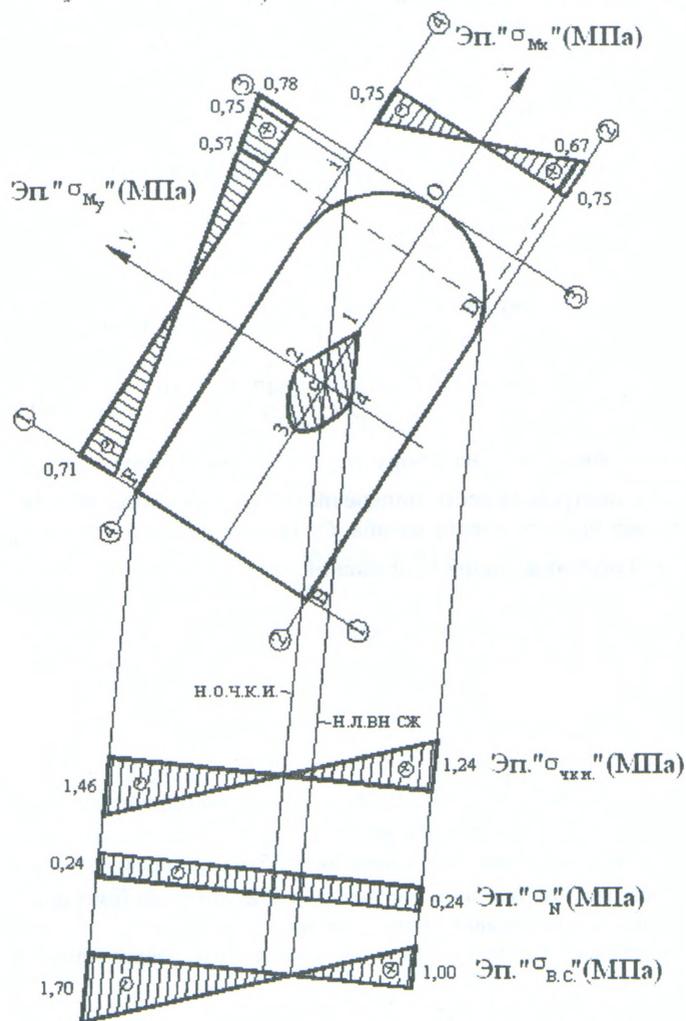


Рисунок 2.3 – Эпюры напряжений. Ядро сечения

3. Нулевая линия 3-3:  $a_x = 2,1b$ ;  $a_y = \infty$ ;

$$x_{F_3} = -\frac{i_x^2}{a_x} = -\frac{1,22b^2}{2,1b} = -0,58b = -21,6 \text{ см.}$$

4. Нулевая линия 4-4:  $a_x = \infty$ ;  $a_y = b$ ;

$$x_{F_0} = -\frac{i_c^2}{a_x} = 0; \quad y_{F_0} = -\frac{i_c^2}{a_y} = -\frac{0,32b^2}{b} = -12 \text{ см.}$$

Соединяя полученные точки прямыми или кривыми линиями, получаем ядро сечения (рисунок 2.3).

Для исследования ядра сечения прикладываем силу поочередно в точках С, 1, 2, 3 (рисунок 2.4):

а) силу прикладываем в центре тяжести сечения (точка С).

$$\sigma = -\frac{F}{A} = -\frac{250 \cdot 10^3}{7,57 \cdot 37,2^2 \cdot 10^{-4}} = -0,24 \text{ МПа};$$

б) силу прикладываем в области ядра сечения (точка 1),  $x_F = 0,32b$ ;  $y_F = 0$ .

Напряжения в крайних точках сечения будут

$$\sigma_E = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_E}{i_c^2} \right) = -\frac{250 \cdot 10^3}{7,57b^2} \left( 1 + \frac{0,32 b \cdot (-1,9 b)}{1,22 b^2} \right) = -\frac{250 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{7,57 \cdot 37,2^2 \cdot 10^{-4}} = -0,12 \text{ МПа};$$

$$\sigma_0 = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_0}{i_c^2} \right) = -\frac{250 \cdot 10^3}{7,57b^2} \left( 1 + \frac{0,32 b \cdot 2,1 b}{1,22 b^2} \right) = -\frac{250 \cdot 10^3 \cdot 1,67}{7,57 \cdot 37,2^2 \cdot 10^{-4}} = -0,4 \text{ МПа.}$$

в) силу прикладываем на границе ядра сечения (точка 2),  $x_F = 0,64b$ ;  $y_F = 0$ .

$$\sigma_E = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_E}{i_c^2} \right) = -\frac{250 \cdot 10^3}{7,57b^2} \left( 1 + \frac{0,64 b \cdot (-1,9 b)}{1,22 b^2} \right) = 0;$$

$$\sigma_0 = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_0}{i_c^2} \right) = -\frac{250 \cdot 10^3}{7,57b^2} \left( 1 + \frac{0,64 b \cdot 2,1 b}{1,22 b^2} \right) = -\frac{250 \cdot 10^3 \cdot 2,1}{7,57 \cdot 37,2^2 \cdot 10^{-4}} = -0,5 \text{ МПа.}$$

г) силу прикладываем за ядром сечения (точка 3),  $x_F = 1,1b$ ;  $y_F = 0$ .

$$\sigma_E = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_E}{i_c^2} \right) = -\frac{250 \cdot 10^3}{7,57 b^2} \left( 1 + \frac{1,1b \cdot (-1,9 b)}{1,22 b^2} \right) = \frac{250 \cdot 10^3 \cdot 0,71}{7,57 \cdot 37,2^2 \cdot 10^{-4}} = 0,17 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_0 = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_0}{i_c^2} \right) = -\frac{250 \cdot 10^3}{7,57 \cdot 37,2^2 \cdot 10^{-4}} \left( 1 + \frac{1,1b \cdot 2,1 b}{1,22 b^2} \right) = -\frac{250 \cdot 10^3 \cdot 2,89}{7,57 \cdot 37,2^2 \cdot 10^{-4}} = -0,69 \text{ МПа.}$$

По полученным значениям напряжений строим их эпюры (рисунок 2.4).

Анализ эпюр напряжений, при различном расположении сжимающей силы  $F$ , показывает, что наиболее выгодным является загрузка колонны центрально-приложенной сжимающей силой. Для получения напряжений одного знака во всех точках поперечного сечения силу следует прикладывать в зоне ядра сечения.

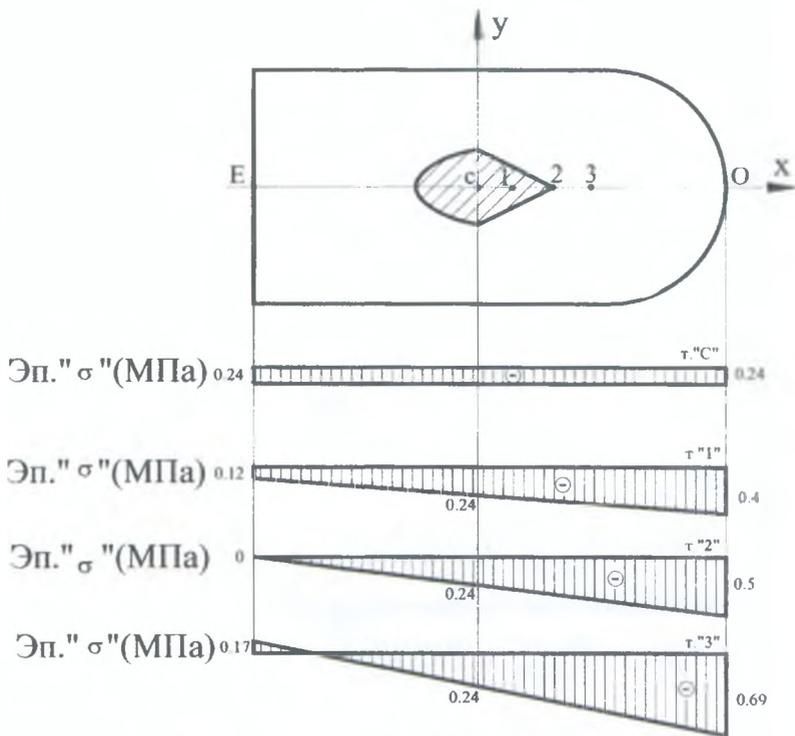


Рисунок 2.4 – Исследование ядра сечения

### 3 УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ БРУСЬБЕВ

#### 3.1 Устойчивость сжатых стержней

Ранее в задачах рассматривались вопросы расчета элементов конструкций на прочность и жесткость. Прочность определялась величиной действующего напряжения, а жесткость – величиной деформации. При этом считалось, что рассматриваемые детали, деформируясь от приложенной нагрузки, имели только запроектированную устойчивую форму равновесия.

Однако, при постепенном увеличении нагрузки, резко меняется форма равновесия и напряженное состояние тела, вследствие чего происходит потеря устойчивости и может произойти внезапное разрушение тела (конструкции). Иначе говоря, если сжимающие силы не превышают некоторой предельной величины, зависящей от длины стержня и жесткости его поперечного сечения, стержень будет испытывать обычное сжатие и его ось будет оставаться в прежнем проектном положении. Но если сжимающие силы станут больше этой предельной величины, то стержень внезапно выпучится и его ось изогнется.

Из теоретической механики известно, что равновесие абсолютно твердого тела может быть устойчивым, неустойчивым и безразличным. Возьмем тонкий длинный стальной стержень, прочно закрепим нижний конец, а к верхнему концу строго вдоль оси приложим сжимающую силу. Стержень под действием продольной силы сначала будет только сжиматься, и его ось при этом будет оставаться прямолинейной. Если же стержень вывести из прямолинейного состояния, отклонив его поперечной силой, ось искривится. И в случае удаления этой «возмущающей» силы стержень вновь вернется в прежнее положение и приобретет первоначальную форму, то такое упругое равновесие будет устойчивым.

Если же сжимающая сила станет больше предельной величины, то будут возможны две формы упругого равновесия стержня. Первая – прямолинейная форма станет теперь неустойчивой, а вторая – изогнутая – устойчивой. Это означает, что если по какой-либо причине стержень получит боковое отклонение, то он не возвратится к прямолинейной форме равновесия, а останется изогнутым. Наконец, при величине нагрузки выше критической, тело безусловно теряет устойчивость первоначальной формы и криволинейная его форма также является устойчивой. Между этими двумя состояниями существует переходное состояние, называемое критическим, при котором деформированное тело находится в безразличном равновесии: оно может сохранить первоначальную форму, но может и потерять ее от самого незначительного воздействия (рисунок 3.1).

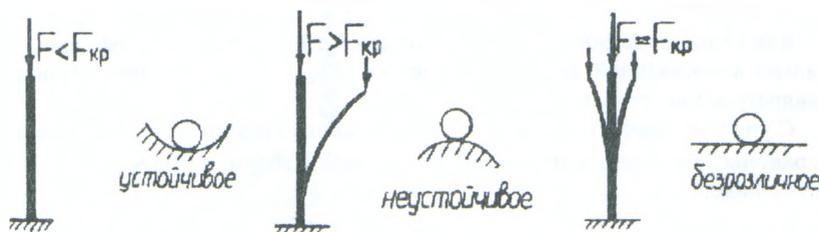


Рисунок 3.1 – Формы упругого равновесия стержня

Следовательно, критической силой  $F_{кр}$  называется такая сила, при которой прямолинейная форма равновесия из устойчивой переходит в неустойчивую.

Потеря устойчивости является весьма опасным явлением, и поэтому недопустима в деталях машин и сооружений, так как разрушение конструкции обычно происходит внезапно. Потеря устойчивости может быть как общей, так и местной (в виде местного выпучивания) и происходит тем легче, чем больше разница между продольными и поперечными размерами тела. Таким образом, критическая нагрузка при расчете на устойчивость аналогична разрушающей нагрузке при расчете на прочность, и поэтому должно быть соблюдено условие:

$$F_{доп} \leq \frac{F_{кр}}{m} \quad (3.1)$$

где  $F_{кр}$  – критическая нагрузка,  
 $F_{доп}$  – допускаемая нагрузка,  
 $m$  – коэффициент запаса устойчивости.

Величину коэффициента запаса устойчивости при статической нагрузке обычно берут: для стали  $m = 1,7 \dots 3$ ; для чугуна  $m = 5 \dots 6$ ; для дерева  $m = 3 \dots 4$ .

Вследствие изгиба в поперечных сечениях стержня возникнут напряжения как от продольной силы, так и от изгибающего момента, который вызовет быстро растущие дополнительные напряжения, и стержень может внезапно разрушиться при напряжениях ниже предела пропорциональности.

Искривление длинных стержней, сжимаемых продольными силами, принято называть продольным изгибом.

### 3.2 Формула Эйлера

Для расчета стержней на продольный изгиб надо уметь определять величину критической силы. Впервые она была выведена в 1744 году для центрально сжатой стойки с шарнирно закрепленной обоими концами членом Петербургской Академии наук Л. Эйлером:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{мин}}{l^2} \quad (3.2)$$

Как видно из формулы (3.2), величина критической силы прямо пропорциональна минимальной жесткости стержня ( $EI_{мин}$ ) и обратно пропорциональна квадрату длины стойки ( $l$ ).

С учетом коэффициентов приведенной длины стержня ( $\mu$ ) в зависимости от характера закрепления его концов (рисунок 3.2) формулу Эйлера можно записать в виде:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{мин}}{(\mu \cdot l)^2} \quad (3.3)$$

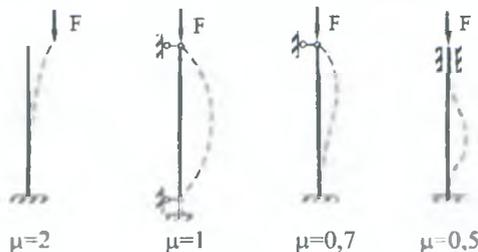


Рисунок 3.2 – Значения коэффициентов приведенной длины стержня в зависимости от характера закрепления его концов

Анализируя формулы, можно сделать вывод, что критическая сила зависит от геометрических размеров стержня и модуля упругости материала, но не зависит от прочностных характеристик материала, из которого изготовлен стержень.

Формула Эйлера справедлива в предположении упругой работы материала стержня и может быть использована, когда критическое напряжение в материале не превышает предел пропорциональности. Критическое напряжение, соответствующее этому условию, находится по формуле:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu \cdot l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2}, \quad (3.4)$$

где  $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$  – радиус инерции;

$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}$  – гибкость стержня.

Приравняв это напряжение к пределу пропорциональности, найдем предельное значение гибкости:  $\lambda_0 \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_m}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} = 100$ .

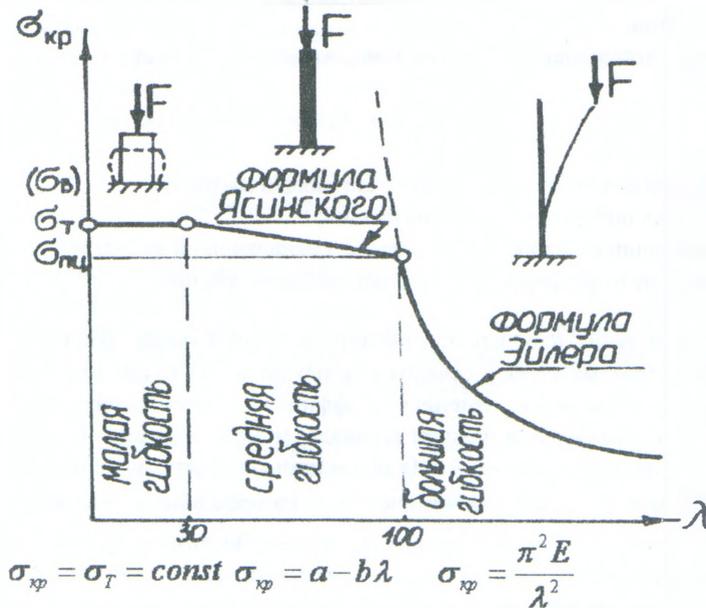


Рисунок 3.3 – Зависимость критических напряжений от гибкости

Из графика (рисунок 3.3) видно, что короткие стержни имеют гибкость  $\lambda$  до (30...40), в них потеря устойчивости исключена, а разрушение в основном происходит, когда напряжения достигают предела текучести для пластичных материалов, предела прочности – для хрупких. Расчет выполняем по формуле Гука:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \sigma_y \quad (3.5)$$

Если гибкость стержня находится в пределах  $\lambda = 40...100$ , стержень теряет устойчивость в результате упругопластических деформаций и критическое напряжение находится по формуле Ясинского:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (3.6)$$

где  $a, b$  – постоянные, зависящие от вида материала, находятся по таблицам справочника (например, для стали  $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа).

Если гибкость стержня  $\lambda > 100$ , для расчета критической силы применяется формула Эйлера (3.3).

При выборе размеров сжатых стержней обычно используется так называемый метод расчета, гарантирующий устойчивость сжатых стержней в процессе их эксплуатации.

Условие устойчивости для центрально сжатых стоек имеет следующий вид:

$$\sigma_{кр} = \frac{N}{A} \leq \varphi \cdot R, \quad (3.7)$$

где  $N$  – нормальная сила от расчетной сжимающей нагрузки;

$A$  – площадь поперечного сечения стойки;

$\varphi$  – коэффициент продольного изгиба, уменьшающий расчетное сопротивление  $R$ , зависит от размеров и формы поперечного сечения.

С другой стороны, площадь поперечного сечения  $A$  также зависит от размеров сечения. Поэтому подбор сечения обычно проводят путем итераций. Вначале задаются примерным значением коэффициента продольного изгиба. Для выбранного сечения стойки находят площадь, момент и радиус инерции сечения, а затем гибкость стержня  $\lambda$ . На основании гибкости по таблице определяют коэффициент  $\varphi$ , далее вычисляют  $\sigma_{кр}$ , которое обычно значительно отличается от расчетного сопротивления материала. Во втором приближении изменяют размеры поперечного сечения и повторяют расчет. Процесс последовательных попыток продолжается до тех пор, пока разница между  $\sigma$  и  $R$  составит не более 5 %.

Условие устойчивости при продольном изгибе позволяет выполнить три вида расчета, аналогично расчетам на прочность при центральном сжатии коротких стержней. Наибольший интерес при проектировании конструкций представляет задача подбора сечений по заданной нагрузке и расчетному сопротивлению материала, длине стержней, а также способах закрепления их концов.

### 3.3 Вопросы для самопроверки

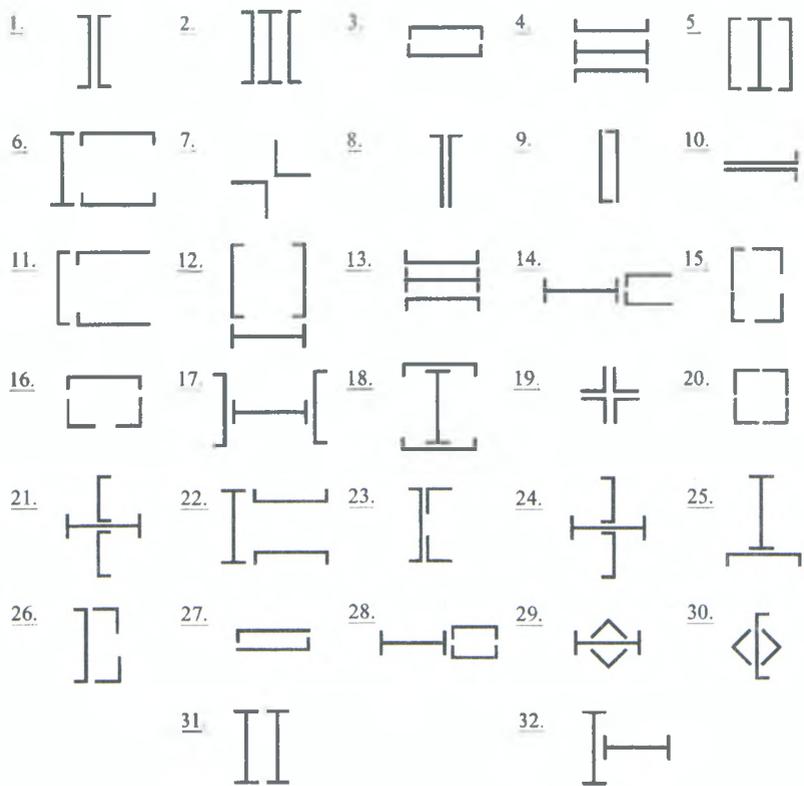
1. Что понимают под потерей устойчивости сжатого бруса?
2. Дайте определение устойчивого и неустойчивого состояния стоек.
3. Дайте определение критической силы.
4. Какое дифференциальное уравнение используется при выводе формулы Л. Эйлера?
5. Как определяются критические силы и напряжения?
6. Какие влияния оказывают жесткость поперечного сечения и длина стойки на величину критической силы?
7. Что понимают под гибкостью бруса? Приведите формулу определения геометрической гибкости.
8. Что понимают под приведенной (расчетной) длиной бруса? Как определяется и чему равен коэффициент приведения длины для различных условий закрепления стоек?
9. В каких случаях используют формулу Л. Эйлера?
10. Когда применяется при расчетах формула Ясинского?
11. К чему сводится расчет на устойчивость?
12. Что понимают под коэффициентом продольного изгиба и как определяется его величина?
13. Как осуществляется подбор сечений стоек при расчете на устойчивость?
14. Для чего используются условия равноустойчивости и что это такое?
15. Приведите график критических напряжений ( $\sigma_{кр} - \lambda$ ).

### 3.4 Задание по расчетно-проектировочной работе № 6 «Расчет сжатой стойки на устойчивость»

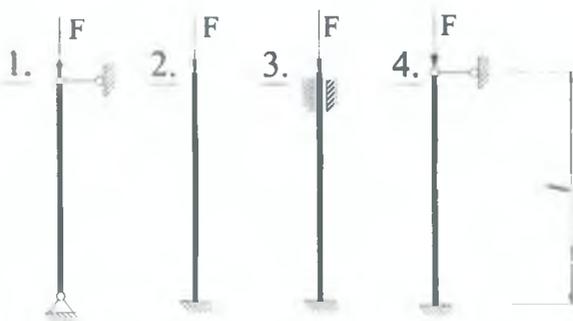
Дано: Стальная стойка длиной  $l$  (принять по номеру варианта) нагружена продольной сжимающейся нагрузкой  $F$ . Расчетное сопротивление материала стойки  $R = 210$  МПа; модуль продольной упругости материала  $E = 200$  ГПа.

Требуется:

- 1) подобрать размеры поперечного сечения составной стойки (поперечное сечение стойки принять по номеру схемы);
- 2) определить величину критической силы и сравнить ее с заданной нагрузкой  $F$ .



*Рисунок 3.4 – Схемы поперечных сечений составных стоек*



*Рисунок 3.5 – Схемы закрепления стоек*

Таблица 3.1 – Числовые значения длин стоек и нагрузок

Номер варианта	Схема стойки	$l$ , м	$F$ , кН	Номер варианта	Схема стойки	$l$ , м	$F$ , кН
1	3	2,4	450	16	3	3,3	535
2	1	2,4	480	17	1	3	640
3	2	3	490	18	2	2,55	620
4	3	3,2	460	19	3	2,6	610
5	1	2,6	440	20	1	3,25	630
6	2	2,5	430	21	2	2,9	660
7	3	3,2	420	22	3	2,5	680
8	1	3,3	470	23	1	2,7	655
9	2	2,9	410	24	2	3,4	745
10	3	2,6	550	25	3	2,95	720
11	1	3,3	530	26	1	2,4	710
12	2	2,8	540	27	2	3	750
13	3	2,85	505	28	3	3,2	775
14	1	2,45	515	29	1	3	740
15	2	3	525	30	2	2,1	700

### 3.5 Пример расчета стойки на устойчивость

Дано: стальная стойка (рисунок 3.6) длиной  $l = 2,8$  м; нагружена продольной сжимающей силой  $F = 290$  кН. Расчетное сопротивление материала стойки  $R = 210$  МПа; модуль продольной упругости материала  $E = 200$  ГПа.

Требуется:

- 1) подобрать размеры поперечного сечения стойки;
- 2) определить величину критической силы и сравнить ее с заданной нагрузкой.

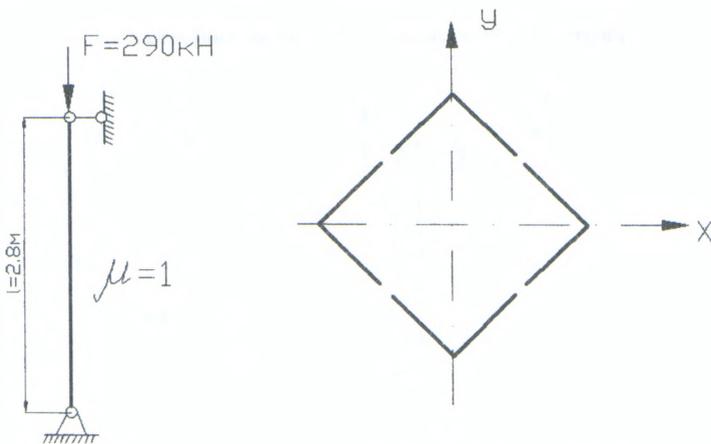


Рисунок 3.6 – Схема закрепления концов и поперечное сечение стойки

Решение:

1. Подбор размеров поперечного сечения стойки

Первое приближение. Принимаем  $\varphi_1 = 0,5$ , тогда из условия устойчивости определяем общую площадь 4-х уголков  $A = \frac{F}{\varphi_1 \cdot R} = \frac{290 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 210 \cdot 10^6} = 27,62 \text{ см}^2$ ,

требуемая площадь одного уголка  $A_1 = \frac{27,62}{4} = 6,9 \text{ см}^2$ .

Принимаем по таблице (ГОСТ 8509–86) четыре равнобоких уголка  $70 \times 70 \times 5$ , для которых  $b = 7,0 \text{ см}$ ;  $d = 0,5 \text{ см}$ ;  $A_1 = 6,86 \text{ см}^2$ ;  $I_{y_1} = I_{x_1} = 50,7 \text{ см}^4$ ;

$I_{y_0} = I_{x_0} = 13,2 \text{ см}^4$ ;  $I_{y_1} = 31,94 \text{ см}^4$ ;  $z_0 = 1,9 \text{ см}$ .

Площадь всего сечения  $A = 4 \cdot 6,86 = 27,44 \text{ см}^2$ .

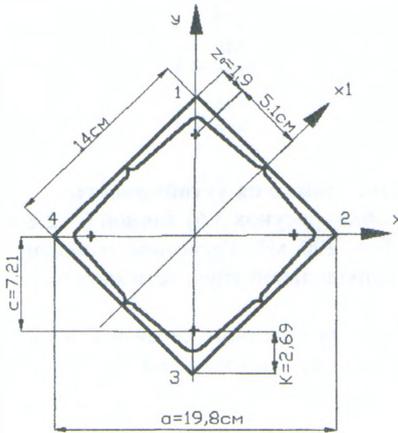


Рисунок 3.7 – Расчетная схема и поперечное сечение стойки

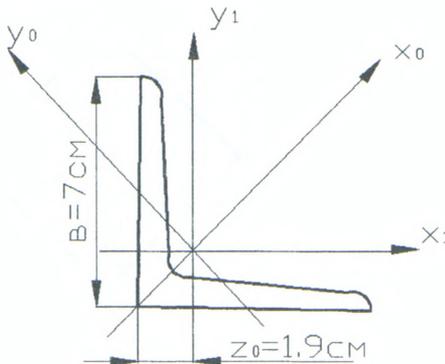


Рисунок 3.8 – Расчетная схема уголка

Определяем размеры сечения и его геометрические характеристики согласно расчетным схемам (рисунки 3.7, 3.8).

$$a = \sqrt{14^2 + 14^2} = 19,8 \text{ см}; \quad k = \sqrt{1,9^2 + 1,9^2} = 2,69 \text{ см};$$

$$c = \frac{a}{2} - k = \frac{19,8}{2} - 2,69 = 7,21 \text{ см}.$$

$$I_x = 2I_{2,4} + 2I_{1,3} = 2I_{2,4\max} + 2(I_{1,3\min} + A_1 \cdot c^2) = 2 \cdot 50,7 + 2(13,2 + 6,86 \cdot 7,21^2) = 837,8 \text{ см}^4.$$

Определим момент инерции составного сечения относительно оси  $x_1$ :

$$I_x = 4(31,94 + 6,86 \cdot 5,1^2) = 841,5 \text{ см}^4, \text{ так как } I_x = 837,8 \text{ см}^4 < I_x = 841,5 \text{ см}^4,$$

принимаяем  $I_{\min} = I_x = 837,8 \text{ см}^4$ , тогда  $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{837,8}{27,44}} = 5,52 \text{ см},$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 280}{5,52} = 50,7.$$

Путем интерполяции из таблицы 3.2 в зависимости от  $\lambda = 50,7$  и материала сталь Ст. 3 определяем  $\varphi_1^*$ :

$$\varphi_1^* = 0,89 - \frac{0,89 - 0,86}{10} \cdot (50,7 - 50) = 0,888; \quad \varphi_1^* = 0,888 \gg 0,5.$$

Второе приближение.  $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^*}{2} = \frac{0,5 + 0,888}{2} = 0,694$ .

Тогда  $A = \frac{F}{\varphi_2 \cdot R} = \frac{290 \cdot 10^3}{0,694 \cdot 240 \cdot 10^6} = 19,89 \text{ см}^2, \quad A_2 = \frac{A}{4} = \frac{19,89}{4} = 4,97 \text{ см}^2.$

Принимаем равнобокий уголок  $63 \times 63 \times 4$ ;

$$b = 6,3 \text{ см}; \quad d = 4 \text{ см}; \quad z_0 = 1,69 \text{ см}, \quad A_2 = 4,96 \text{ см}^2; \quad I_{x_0} = I_{\max} = 29,9 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_0} = I_{\min} = 7,81 \text{ см}^4; \text{ общая площадь стойки } A = 4,96 \cdot 4 = 19,84 \text{ см}^2.$$

$$a = \sqrt{12,6^2 + 12,6^2} = 17,82 \text{ см}; \quad k = \sqrt{1,69^2 + 1,69^2} = 2,39 \text{ см};$$

$$c = \frac{a}{2} - k = \frac{17,82}{2} - 2,39 = 6,52 \text{ см};$$

$$I_x = 2I_{2,4\max} + 2(I_{1,3\min} + A_2 \cdot c^2) = 2 \cdot 29,9 + 2(7,81 + 4,96 \cdot 6,52^2) = 497,12 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{497,12}{19,84}} = 5 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{\mu \cdot F}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 290}{5} = 58;$$

$$\varphi_2^* = 0,89 - \frac{0,89 - 0,86}{10} \cdot (58 - 50) = 0,866; \quad \varphi_2 = 0,694; \quad \varphi_2^* = 0,866.$$

Проверим стойку на прочность:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{290 \cdot 10^3}{19,84 \cdot 10^{-4}} = 146,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma = 146,2 \text{ МПа} < \varphi_2^* \cdot R = 0,866 \cdot 210 = 181,86 \text{ МПа}.$$

Недонапряжение  $\frac{181,86 - 146,2}{181,86} \cdot 100 \% = 19,28 \%.$

$$\text{Третье приближение. } \varphi_3 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{0,694 + 0,866}{2} = 0,78.$$

$$\text{Тогда } A = \frac{290 \cdot 10^3}{0,78 \cdot 210 \cdot 10^6} = 17,7 \text{ см}^2; A_3 = \frac{17,7}{4} = 4,43 \text{ см}^2.$$

Принимаем равнобокий уголок  $50 \times 50 \times 5$ .

$$b = 5 \text{ см}; d = 0,5 \text{ см}; z_0 = 1,42 \text{ см}; I_{x_0} = I_{\max} = 17,8 \text{ см}^4; I_{y_0} = I_{\min} = 4,63 \text{ см}^4; A_3 = 4,8 \text{ см}^2; \text{общая площадь стойки } A = 4,8 \cdot 4 = 19,2 \text{ см}^2.$$

$$a = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14,4 \text{ см}; k = \sqrt{1,42^2 + 1,42^2} = 2 \text{ см};$$

$$c = \frac{a}{2} - k = \frac{14,4}{2} - 2 = 5,2 \text{ см}; I_x = 2 \cdot 17,8 + 2 \cdot (4,63 + 4,8 \cdot 5,2^2) = 304,4 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{304,4}{19,2}} = 3,98 \text{ см}; \lambda = \frac{1 \cdot 290}{3,98} = 72,86;$$

$$\varphi_3^* = 0,81 - \frac{0,81 - 0,75}{10} \cdot (72,86 - 70) = 0,793; \varphi_3 = 0,78; \varphi_3^* = 0,793.$$

Проверяем стойку на прочность.

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{290 \cdot 10^3}{19,2 \cdot 10^4} = 151 \text{ МПа};$$

$$\sigma = 151 \text{ МПа} < \varphi_3^* \cdot R = 0,793 \cdot 210 = 166,53 \text{ МПа}.$$

$$\text{Недонапряжение } \frac{166,53 - 151}{166,53} \cdot 100\% = 9,32\%.$$

$$\text{Четвертое приближение. } \varphi_4 = \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2} = \frac{0,78 + 0,793}{2} = 0,788.$$

$$\text{Тогда } A = \frac{290 \cdot 10^3}{0,788 \cdot 210 \cdot 10^6} = 17,52 \text{ см}^2; A_4 = \frac{17,52}{4} = 4,38 \text{ см}^2.$$

Принимаем равнобокий уголок  $56 \times 56 \times 4$ .

$$b = 5,6 \text{ см}; d = 0,4 \text{ см}; z_0 = 1,52 \text{ см}; I_{x_0} = I_{\max} = 20,8 \text{ см}^4; I_{y_0} = I_{\min} = 5,41 \text{ см}^4; A_4 = 4,38 \text{ см}^2; \text{общая площадь стойки } A = 17,52 \text{ см}^2.$$

$$a = \sqrt{11,2^2 + 11,2^2} = 15,84 \text{ см}; k = \sqrt{1,52^2 + 1,52^2} = 2,15 \text{ см};$$

$$c = \frac{a}{2} - k = \frac{15,84}{2} - 2,15 = 5,77 \text{ см};$$

$$I_x = 2I_{2,4\max} + 2(I_{1,3\min} + A_4 \cdot c^2) = 2 \cdot 20,8 + 2 \cdot (5,41 + 4,38 \cdot 5,77^2) = 344 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{344}{17,52}} = 4,43 \text{ см}; \lambda = \frac{1 \cdot 290}{4,43} = 65,46;$$

$$\varphi_4^* = 0,86 - \frac{0,86 - 0,81}{10} \cdot 5,46 = 0,833.$$

Проверяем стойку на прочность.

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{290 \cdot 10^3}{17,52 \cdot 10^{-4}} = 165,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma = 165,5 \text{ МПа} < \varphi_4^* \cdot R = 0,833 \cdot 210 = 175 \text{ МПа}.$$

Недонапряжение  $\frac{175 - 165,5}{175} \cdot 100\% = 5,43\%$ , что приемлемо.

Окончательно принимаем сечение стойки, состоящей из 4-х уголков  $56 \times 56 \times 4$ ,  $A = 17,52 \text{ см}^2$ ,  $I_x = I_y = 344 \text{ см}^4$ .

2) Определяем критическую силу.

Для принятой стойки при  $\lambda = 65,46 < \lambda_{cr} = 100$ , используем формулу Ясинского:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 65,46 = 235,4 \text{ МПа, тогда критическая сила:}$$

$$F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = 235,4 \cdot 10^6 \cdot 17,52 \cdot 10^{-4} = 412 \text{ кН}.$$

Находим значение коэффициента запаса устойчивости:

$$n = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{412}{290} = 1,42.$$

Таблица 3.2 – Значения коэффициентов  $\varphi$

Гибкость $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}$	Коэффициент $\varphi$ для стали марки Ст.3	Гибкость $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}$	Коэффициент $\varphi$ для стали марки Ст.3
0	1,00	120	0,45
10	0,99	130	0,40
20	0,96	140	0,36
30	0,94	150	0,32
40	0,92	160	0,29
50	0,89	170	0,26
60	0,86	180	0,23
70	0,81	190	0,21
80	0,75	200	0,19
90	0,69	210	0,16
100	0,60	220	0,15
110	0,52	230	0,13

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дарков, А. В. Сопротивление материалов: учеб. для техн. вузов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – 5-е изд., перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 1989. – 624 с.
2. Александров, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин; под ред. А. В. Александрова. – М. : Высш. шк., 1995. – 560 с.
3. Сопротивление материалов / А. Ф. Смирнов [и др.]. – М. : Высшая школа, 1972. – 480 с.
4. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1986. – 512 с.
5. Писаренко, Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, Ф. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – 5-е изд., перераб. и доп. – Киев : Дельта, 2008. – 816 с.
6. Справочник по сопротивлению материалов / Под. ред. Е. Ф. Винокурова [и др.]. – Минск : Наука и техника, 1988. – 464 с.

Учебное издание

**Составители:**

*Онысько Сергей Романович  
Томашев Игорь Геннадьевич  
Веремейчик Андрей Иванович  
Молош Виктор Викторович*

# **ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

к выполнению расчетно-проектировочных работ  
по дисциплине  
**«Сопроотивление материалов и теория упругости»**  
*для студентов специальности 1-70 03 01  
«Автомобильные дороги»  
(весенний семестр)*

Ответственный за выпуск: Томашев И. Г.

Редактор: Митлошук М. А.

Компьютерная вёрстка: Соколюк А. П.

Корректор: Дударук С. А.

---

Подписано в печать 28.12.2021 г. Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага «Performer».  
Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 2,56. Уч. изд. л. 2,75. Заказ № 1483. Тираж 21 экз.  
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный  
технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 1/235 от 24.03.2014 г.