Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2019. Том 27. № 1–2. С. 44–52

УДК 517.958

ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ НА ПЛОСКОСТИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ ТИПА ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ. III

В. И. Корзюк[1], И. С. Козловская[2], С. Н. Наумовец[3]

[1]*Институт математики НАН Беларуси*
[2]*Белорусский государственный университет*
[3]*Брестский государственный технический университет*
e-mail: korzyuk@bsu.by, kozlovskaja@bsu.by, e-cveta@tut.by
Поступила 20.09.2018

Данная работа является продолжением [1,2] под общим названием. В полуполосе на плоскости двух независимых переменных рассматриваются граничные задачи для гиперболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, оператор которого представляет композицию операторов первого порядка. Рассматриваются простейшие задачи, где на границе области присоединяются условия Коши и Дирихле. Рассматриваются корректные задачи, решения которых представляются в аналитическом виде.

1. Введение. Относительно независимых переменных $\mathbf{x} = (x_0, x_1)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ $\left(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\right)$ рассматривается дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка вида

$$\mathcal{L}u(\mathbf{x}) = \left(\partial_{x_0} + \varepsilon\partial_{x_1}\right)\left(\partial_{x_0} - a\partial_{x_1}\right)u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \tag{1}$$

относительно искомой функции $u : \mathbb{R}^2 \ni \mathbf{x} \to u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, где ∂_{x_0}, ∂_{x_1} - операторы частных производных первого порядка по переменным x_0 и x_1 соответственно.

В работе [1] рассмотрены задачи в случае $a, \varepsilon > 0$, а в [2] – $\varepsilon = 0$. Частному случаю $\varepsilon = a > 0$ посвящены работы [3–9]. Во всей названной литературе для рассмотренных в ней задач строятся решения в аналитическом виде, гладкость которых зависит от гладкости заданных функций и их условий согласования. Заметим, что указанные условия согласования выписаны в явном виде и являются необходимыми и достаточными для существования единственных классических решений в соответствующих классах функций рассмотренных задач.

В данной работе аналогично рассматриваются классические решения некоторых корректно поставленных задач для $\varepsilon < 0$ и $a > 0$. В аналитическом виде выписываются их решения и доказываются необходимые и достаточные условия согласования для заданных функций.

2. Постановка задачи. Пусть $0 < -\varepsilon < a$. В замыкании $\overline{Q} = [0, \infty) \times [0, l]$ области $Q = (0, \infty) \times (0, l)$ переменных $\mathbf{x} = (x_0, x_1)$ плоскости $\mathbb{R}^2$ рассматривается уравнение (1). На нижнем основании $\overline{Q}$ присоединяются условия Коши

$$u(0, x_1) = \varphi(x_1), \quad \partial_{x_0}u(0, x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0, l], \tag{2}$$

а на боковых границах – граничные условия

$$u(x_0, 0) = \mu^{(1)}(x_0), \quad x_0 \in \left[\frac{l}{a}, \infty\right), \tag{3}$$

$$u(x_0, l) = \mu^{(2)}(x_0), \quad x_0 \in [0, \infty). \tag{4}$$

Другие задачи рассмотрим после изучения задачи (1)–(4).

3. Частное решение уравнения (1). $(0 < -\varepsilon < a)$. Частное решение v_p уравнения (1) определяем локально. Для этого область Q разбиваем на подобласти $Q^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$. Разбиение Q на $Q^{(m)}$ уточним ниже. В каждой подобласти определяем функцию $v_p^{(m)}$ с помощью формулы

$$\begin{gathered} v_p^{(m)}(\mathbf{x}) = \tilde{f}^{(1,m)}(x_1 - \varepsilon x_0) + \tilde{f}^{(2,m)}(x_1 + a x_0) - \\ -\frac{1}{(\varepsilon + a)^2} \int\limits_{A^{(m)}}^{x_1 - \varepsilon x_0} d\xi \int\limits_{B^{(m)}}^{x_1 + a x_0} f\left(\frac{\eta - \xi}{a + \xi}, \frac{a\xi + \varepsilon\eta}{a + \xi}\right) d\eta, \quad \mathbf{x} \in \overline{Q^{(m)}}, \end{gathered} \tag{5}$$

где функции $\tilde{f}^{(j,m)}$ из класса C^2, $f \in C^1\left(\overline{Q}\right)$, пределы $A^{(m)}$ и $B^{(m)}$ будут указаны после разбиения Q на подобласти $Q^{(m)}$. Нетрудно видеть, что $\tilde{f}^{(1,m)}(x_1 - \varepsilon x_0)$ и $\tilde{f}^{(2,m)}(x_1 + a x_0)$ для каждого $m = 1, 2$, являются решениями однородного уравнения (1), то есть

$$\mathcal{L}\tilde{f}^{(1,m)}(x_1 - \varepsilon x_0) = \mathcal{L}\tilde{f}^{(2,m)}(x_1 + a x_0) = 0. \tag{6}$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}v_p^{(m)}\mathbf{x} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q^{(m)}.$$

Теперь за счет соответствующего выбора значений функций $\tilde{f}^{(j,m)}$ функция v_p, где

$$v_p(\mathbf{x}) = v_p^{(m)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \overline{Q^{(m)}}, \tag{7}$$

будет из класса $C^2\left(\overline{Q}\right)$ и удовлетворять уравнению (1).

Обозначим через $\tilde{E} = \left[-\frac{a}{\varepsilon}\right]$ целую часть числа $-\frac{a}{\varepsilon}$. Пусть $Q^{(m)}$ $(m = 1, \ldots)$, $\tilde{E}$ – прямоугольники $Q^{(m)} = \left(\frac{(m-1)l}{a}, \frac{ml}{a}\right) \times (0, l)$, а $Q^{(E)}$ – прямоугольник $\left(\tilde{E}\frac{l}{\varepsilon}, -\frac{l}{\varepsilon}\right) \times (0, l)$, где $E = \tilde{E} + 1$. Заметим, когда $\tilde{E} = -\frac{l}{\varepsilon}$, то прямоугольник $Q^{(E)}$ отсутствует, то есть $Q^{(E)} = \emptyset$, $\emptyset$ – пустое множество.

В $\overline{Q^{(1)}}$ функцию $v_p^{(1)}$ определяем формулой (5), в которой $A^{(1)} = B^{(1)} = l$. Функции $\tilde{f}^{(j,1)}$ выбираем таким образом, чтобы они удовлетворяли уравнениям

$$\begin{gathered} v_p^{(1)}(0, x_1) = \tilde{f}^{(1,1)}(x_1) + \tilde{f}^{(2,1)}(x_1) - \frac{1}{(\varepsilon + a)^2} \int\limits_l^{x_1} d\xi \int\limits_l^{x_1} f\left(\frac{\eta - \xi}{a + \varepsilon}, \frac{a\xi + \varepsilon\eta}{a + \varepsilon}\right) d\eta = 0, \\ \partial_{x_0} v_p^{(1)}(0, x_1) = -\varepsilon d\tilde{f}^{(1,1)}(x_1) + a d\tilde{f}^{(2,1)}(x_1) + \frac{\varepsilon}{(a + \varepsilon)^2} \int\limits_l^{x_1} f\left(\frac{\eta - x_1}{a + \varepsilon}, \frac{a x_1 + \varepsilon\eta}{a + \varepsilon}\right) d\eta - \\ -\frac{a}{(a + \varepsilon)^2} \int\limits_l^{x_1} f\left(\frac{x_1 - \xi}{a + \varepsilon}, \frac{a\xi + \varepsilon x_1}{a + \varepsilon}\right) d\xi = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Далее продвигаемся по x_0 вверх. Функция $v_p^{(2)}$ определяется опять формулой (5), где $A^{(2)} = l$, $B^{(2)} = 2l$. Функции $\tilde{f}^{(j,2)}$ определим так, чтобы выполнялись условия Коши для $v_p^{(2)}$ при $x_0 = \frac{l}{a}$ через значения функции $v_p^{(1)}$, то есть

$$v_p^{(2)}\left(\frac{l}{a}, x_1\right) = v_p^{(1)}\left(\frac{l}{a}, x_1\right), \tag{9}$$

$$\partial_{x_0} v_p^{(2)}\left(\frac{l}{a}, x_1\right) = \partial_{x_0} v_p^{(1)}\left(\frac{l}{a}, x_1\right).$$

Из уравнения (1) и условий (9) следует равенство

$$\partial_{x_0}^2 v_p^{(2)}\left(\frac{l}{a}, x_1\right) = \partial_{x_0}^2 v_p^{(1)}\left(\frac{l}{a}, x_1\right). \tag{10}$$

Таким образом, функция $v_p^{(1,2)}$, где

$$v_p^{(1,2)}(\mathbf{x}) = v_p^{(j)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1, 2,$$

принадлежит классу $C^2\left(\overline{Q^{(1)}} \cup \overline{Q^{(2)}}\right)$. Продолжая данный процесс дальше с помощью формулы (5), в которой полагаем $A^{(m)} = l$, $B^{(m)} = ml$, $m = 1, ..., E+1$, построим функцию $\tilde{v}_p$,

$$\tilde{v}_p(\mathbf{x}) = v_p^{(m)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \overline{Q^{(m)}}, \quad m = 1, ..., E+1,$$

которая принадлежит классу $C^2\left(\left[0, -\frac{l}{\varepsilon}\right] \times [0, l]\right)$ и удовлетворяет уравнению (1).

По предложенной выше схеме продолжаем строить частное решение v_p уравнения (1) с помощью формулы (5), в которой полагаем $A^{(m)} = 2l$, $B^{(m)} = -\frac{a}{\varepsilon}l + (m-E)\,l$, $m = E+1, ..., 2E$. Для указанных $m = E+1, ..., 2E$ получаем частные решения $v_p^{(m)}$ в замыкании $\overline{Q^{(m)}}$ областей $Q^{(m)} = \left(-\frac{l}{\varepsilon} + \frac{l}{a}(m-E-1), -\frac{l}{\varepsilon} + \frac{l}{a}(m-E)\right) \times (0, l)$. Данный процесс продолжаем для $m = 2E+1, 2E+2, \ldots$. В результате получим $\overline{Q} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \overline{Q^{(m)}}$ и частное решение v_p уравнения (1).

Теорема 1. *Если функция $f \in C^1\left(\overline{Q}\right)$, то функция v_p, определяемая формулами (5), (7) и условиями*

$$\partial_{x_0}^j v_p^{(m+1)}(\boldsymbol{x}) = \partial_{x_0}^j v_p^{(m)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(m+1)}} \cap \overline{Q^{(m)}}, \quad j = 0, 1, 2, \tag{11}$$

для $m = 1, 2, \ldots$ принадлежит классу $C^2\left(\overline{Q}\right)$ и является решением уравнения (1).

Доказательство следует из предыдущих рассуждений.

4. Задача (1)–(4). Рассматриваем общее решение уравнения (1)

$$u(\mathbf{x}) = g^{(1)}(x_1 - \varepsilon x_0) + g^{(2)}(x_1 + a x_0) + v_p(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \overline{Q}, \tag{12}$$

где $g^{(j)}$ – произвольные функции из класса C^2 на областях определения $D\left(g^{(j)}\right) = [0, \infty)$, v_p – частное решение уравнения (1), определенное в предыдущем пункте, $j = 1, 2$. Если $f \in C^1\left(\overline{Q}\right)$, то можно доказать, что u является классическим решением $\left(u \in C^2\left(\overline{Q}\right)\right)$ уравнения (1) тогда и только тогда, когда $g^{(j)} \in C^2([0, \infty))$, $j = 1, 2$ [3].

Так как (12) является решением уравнения (1), то путем соответствующего выбора функций $g^{(j)}$ от представления (12) требуем выполнения условий (2)–(4). Как и в предыдущих случаях [1,2], решение u задачи (2)–(4) будет строиться локально в подобластях. Затем будет произведена их склейка с помощью условий согласования.

Из условий Коши (2) [1,2] получим частично определенные функции $g^{(j)}$:

$$g^{(1)}(z) = g^{(1,0)}(z) = \frac{a}{a+\varepsilon}\varphi(z) - \frac{1}{a+\varepsilon}\int\limits_0^z \psi(\xi)\, d\xi - C, \quad z \in [0, l], \tag{13}$$

$$g^{(2)}(z) = g^{(2,0)}(z) = \frac{\varepsilon}{a+\varepsilon}\varphi(z) + \frac{1}{a+\varepsilon}\int\limits_0^z \psi(\xi)\,d\xi + C, \quad z \in [0,l],$$

где C – произвольная постоянная из множества действительных чисел $\mathbb{R}$.

Для $z \in [l,\infty)$ значения функций $g^{(j)}$, $j = 1,2$ определяем из условий (3) и (4). Подставляя представление (12) в граничные условия (3), (4), получим уравнения:

$$u(x_0,0) = g^{(1)}(-\varepsilon x_0) + g^{(2)}(a x_0) + v_p(x_0,0) = \mu^{(1)}(x_0), \quad x_0 \in \left[\frac{l}{a},\infty\right), \tag{14}$$

$$u(x_0,l) = g^{(1)}(l-\varepsilon x_0) + g^{(2)}(l + a x_0) + v_p(x_0,l) = \mu^{(2)}(x_0), \quad x_0 \in [0,\infty). \tag{15}$$

В уравнении (14) делаем замену $a x_0 = y$, а в уравнении (15) – замену $l - \varepsilon x_0 = z$. В результате получим

$$g^{(2)}(y) = \mu^{(1)}\left(\frac{y}{a}\right) - g^{(1)}\left(-\frac{\varepsilon}{a}y\right) - v_p\left(\frac{y}{a},0\right), \quad y \in [l,\infty), \tag{16}$$

$$g^{(1)}(z) = \mu^{(2)}\left(\frac{l-z}{\varepsilon}\right) - g^{(2)}\left(l + \frac{a}{\varepsilon}(l-z)\right) - v_p\left(\frac{l-z}{\varepsilon},l\right), \quad z \in [l,\infty). \tag{17}$$

С учетом (13) из уравнения (16) имеем

$$g^{(2)}(y) = g^{(2,1)}(y) = \mu^{(1)}\left(\frac{y}{a}\right) - g^{(1,0)}\left(-\frac{\varepsilon}{a}y\right) - v_p\left(\frac{y}{a},0\right), \quad y \in \left[l, -\frac{a}{\varepsilon}l\right]. \tag{18}$$

Продолжая данный процесс дальше, получим рекуррентные соотношения

$$\begin{gathered} g^{(1)}(z) = g^{(1,m)}(z) = \mu^{(2)}\left(\frac{l-z}{\varepsilon}\right) - g^{(2,m)}\left(l + \frac{a}{\varepsilon}(l-z)\right) - v_p\left(\frac{l-z}{\varepsilon},l\right), \\ z \in D\left(g^{(1,m)}\right) = \left[ml + \frac{m-1}{a}\varepsilon l, (m+1)l + m\frac{\varepsilon}{a}l\right], \quad m = 1,2,3,..., \end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered} g^{(2)}(y) = g^{(2,m)}(y) = \mu^{(1)}\left(\frac{y}{a}\right) - g^{(1,m-1)}\left(-\frac{\varepsilon}{a}y\right) - v_p\left(\frac{y}{a},0\right), \\ y \in D\left(g^{(2,m)}\right) = \left[-(m-1)\frac{a}{\varepsilon}l - (m-2)l, -m\frac{a}{\varepsilon}l - (m-1)l\right], \quad m = 2,3,4,.... \end{gathered} \tag{20}$$

Лемма 1. *Если* $\varphi \in C^2([0,l])$, $\psi \in C^1([0,l])$, $f \in C^1\left(\overline{Q}\right)$, $\mu^{(1)} \in C^2\left(\left[\frac{l}{a},\infty\right)\right)$, $\mu^{(2)} \in C^2([0,\infty))$, *то функции* $g^{(j,m)} \in C^2\left(D\left(g^{(j,m)}\right)\right)$, $j = 1,2$; $m = 0,1,2,...$.

Доказательство следует из формул (13), (18)–(20), с помощью которых определяются значения $g^{(j,m)}$ через заданные функции задачи (1)–(4).

Функции $g^{(j,m)}$, $j = 1,2$; $m = 0,1,...$, определяют функции $g^{(j)}$. Поэтому, чтобы $g^{(j)} \in C^2([0,\infty))$ в дополнение к лемме 1 необходимо и достаточно совпадение $g^{(j,m)}$ и их производных до второго порядка в общих точках соприкосновения, то есть

$$\begin{gathered} \left(d^p g^{(2,1)} - d^p g^{(2,0)}\right)(l) = 0, \quad p = \overline{0,2}, \\ \left(d^p g^{(1,m)} - d^p g^{(1,m-1)}\right)\left(ml + \frac{m-1}{a}\varepsilon l\right) = 0, \quad m = 1,2,3,..., \quad p = \overline{0,2}, \\ \left(d^p g^{(2,m)} - d^p g^{(2,m-1)}\right)\left(-(m-1)\frac{al}{\varepsilon} - (m-2)l\right) = 0, \quad m = 2,3,..., \quad p = \overline{0,2}, \end{gathered} \tag{21}$$

где d – оператор дифференцирования производной первого порядка. Из формул (19), (20) следует, что равенства (20) выполняются тогда и только тогда, когда

$$\left(d^p g^{(j,1)} - d^p g^{(j,0)}\right)(l) = 0, \quad j = 1,2; \quad p = \overline{0,2}, \tag{22}$$

$$\left(d^p g^{(1,m)} - d^p g^{(1,m-1)}\right)\left(ml + \frac{m-1}{a}\varepsilon l\right) =$$
$$= -\left(d^p g^{(2,m)} - d^p g^{(2,m-1)}\right)\left(-(m-1)\frac{a}{\varepsilon}l - (m-2)l\right), \quad m = 2,3,4,...; \quad p = \overline{0,2}, \tag{23}$$

$$\left(d^p g^{(2,m)} - d^p g^{(2,m-1)}\right)\left(-(m-1)\frac{a}{\varepsilon}l - (m-2)l\right) =$$
$$= \left(d^p g^{(1,m-1)} - d^p g^{(1,m-2)}\right)\left((m-1)l + (m-2)\frac{\varepsilon}{a}l\right), \quad m = 2,3,4,...; \quad p = \overline{0,2}. \tag{24}$$

Лемма 2. *Условия (21) выполняются тогда и только тогда, когда выполняются равенства (22)–(24).*

Доказательство следует из представленных соотношений.

Согласно формулам (13), (19) и (20), в случае $m = 1$ условия (22) записываются в равносильном им виде следующим образом:

$$\mu^{(1)}\left(\frac{l}{a}\right) - \frac{a}{a+\varepsilon}\varphi\left(-\frac{\varepsilon}{a}l\right) - \frac{\varepsilon}{a+\varepsilon}\varphi(l) - v_p\left(\frac{l}{a},0\right) = 0, \quad p = 0,$$
$$\frac{1}{a}d\mu^{(1)}\left(\frac{l}{a}\right) - \frac{1}{a+\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{a}+1\right)\psi(l) - \frac{1}{a}\partial_{x_0}v_p\left(x_0 = \frac{l}{a},0\right) = 0, \quad p = 1,$$
$$\frac{1}{a^2}d^2\mu^{(1)}\left(\frac{l}{a}\right) - \frac{\varepsilon}{a+\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{a}+1\right)d^2\varphi(l) + \frac{1}{a+\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon^2}{a^2}-1\right)d\varphi(l) -$$
$$-\frac{1}{a^2}\partial^2_{x_0}v_p\left(x_0 = \frac{l}{a},0\right) = 0, \quad p = 2, \tag{25}$$

$$\mu^{(2)}(0) - \mu^{(1)}\left(\frac{l}{a}\right) + \frac{a}{a+\varepsilon}\left(\varphi\left(-\frac{\varepsilon}{a}l\right) - 2\varphi(l)\right) + v_p\left(\frac{l}{a},0\right) = 0, \quad p = 0,$$
$$\frac{1}{\varepsilon}d\mu^{(1)}\left(\frac{l}{a}\right) - \frac{1}{\varepsilon}d\mu^{(2)}(0) + \frac{1}{\varepsilon}\partial_{x_0}v_p\left(x_0 = \frac{l}{a},0\right) = 0, \quad p = 1, \tag{26}$$
$$\frac{1}{\varepsilon^2}d^2\mu^{(2)}(0) - \frac{1}{\varepsilon^2}d^2\mu^{(1)}\left(\frac{l}{a}\right) + \frac{1}{\varepsilon^2}\partial^2_{x_0}v_p\left(x_0 = \frac{l}{a},0\right) = 0, \quad p = 2,$$

где функция v_p определена через f и следует использовать здесь формулы (5) для $m = 1$, решение $\tilde{f}^{(j,1)}$ системы (5).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия гладкости на заданные функции задачи (1)–(4), указанные в лемме 1. Тогда существует единственное классическое решение $u \in C^2\left(\overline{Q}\right)$ задачи (1)–(4) тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования (25), (26). Решение в аналитическом виде представляется с помощью формул (5), (12), (13), (19), (20) и непрерывно зависит от заданных функций задачи.*

Теорема фактически доказана предыдущими рассуждениями. Непрерывность решения от заданных функций следует из аналитического его представления.

5. $a = -\varepsilon > 0$ **. Постановка задачи.** В этом случае рассмотрим уравнение (1), то есть

$$\mathcal{L}u(\mathbf{x}) = (\partial_{x_0} - a\partial_{x_1})^2 u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \tag{27}$$

К уравнению (27) присоединяются условия Коши (2) и условия Дирихле (3), (4).

Требуется найти функцию u из класса $C^2\left(\overline{Q}\right)$, которая является решением уравнения (27) и удовлетворяет условиям (2)–(4).

Обозначим через $C^{k,r}\left(\overline{Q}\right)$ множество непрерывных, заданных на $\overline{Q}$ функций, имеющих непрерывные на $\overline{Q}$ частные производные по x_0 до порядка k, по x_1 – до порядка r включительно, $k, r \in \mathbb{N}$.

6. Частное решение уравнения (27). Область Q разбиваем на прямоугольники $Q^{(m)} = \left(\frac{ml}{a}, \frac{(m-1)l}{a}\right)$, $m = 1, 2, \ldots$. На каждом замыкании $\overline{Q^{(m)}}$ области $Q^{(m)}$ рассматриваем функцию

$$v^{(m)}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathcal{F}}^{(m)}(\mathbf{x}) + \tilde{v}^{(m)}(\mathbf{x}), \tag{28}$$

где

$$\tilde{\mathcal{F}}^{(m)}(\mathbf{x}) = \tilde{f}^{(1,m)}(x_1 + ax_0) + x_0 \tilde{f}^{(2,m)}(x_1 + ax_0),$$

$$\tilde{v}_p^{(m)}(\mathbf{x}) = \int\limits_{\frac{ml - x_1}{a}}^{x_0} dy \int\limits_{\frac{ml - x_1}{a}}^{y} f(z, x_1 + ax_0 - az)\, dz.$$

Для $\mathbf{x} \in \overline{Q^{(m)}}$ функция $\tilde{\mathcal{F}}^{(m)}(\mathbf{x})$ удовлетворяет однородному уравнению (27), то есть

$$\mathcal{L}\tilde{\mathcal{F}}^{(m)}(\mathbf{x}) = 0,$$

а $v_p^{(m)}$ – уравнению (27), где $\tilde{f}^{(j,m)} \in C^2[0, 2l]$, $j = 1, 2$; $m = 1, 2, \ldots$, а $f \in C^2\left(\overline{Q}\right)$.

Далее конструкцию частного решения v_p осуществляем по схеме предыдущих задач. Определяем

$$v_p(\mathbf{x}) = v_p^{(m)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \overline{Q^{(m)}}, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{29}$$

За счет соответствующего выборы функции $\tilde{f}^{(j,1)}$

$$v_p(0, x_1) = \partial_{x_0} v_p(0, x_1) = 0. \tag{30}$$

Далее для каждого $m = 1, 2, \ldots$ за счет функций $f^{(j,m+1)}$ и уравнения (27) получаем равенства

$$\partial_{x_0}^k v_p^{(m+1)}\left(\frac{ml}{a}, x_1\right) = \partial_{x_0}^k v_p^{(m)}\left(\frac{ml}{a}, x_1\right), \quad k = \overline{0, 2}. \tag{31}$$

Таким образом, получаем гладкую функцию v_p из класса $C^2\left(\overline{Q}\right)$, если $f \in C^2\left(\overline{Q}\right)$.

Лемма 3. *Если правая часть уравнения (1) f из класса $C^2\left(\overline{Q}\right)$, то функция v_p, определяемая формулами (29) и (30) с учетом условий (31), принадлежит классу $C^2\left(\overline{Q}\right)$ и удовлетворяет уравнению (27).*

7. Задача (27), (2)–(4). Согласно [3], общее решение уравнения (27) представимо в виде

$$u(\mathbf{x}) = g^{(1)}(x_1 + ax_0) + x_0 g^{(2)}(x_1 + ax_0) + v_p(\mathbf{x}), \tag{32}$$

где $g^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ – произвольные функции из класса C^2 с областями определения $D\left(g^{(j)}\right) = ([0, \infty))$, если $\mathbf{x} \in \overline{Q}$. Придерживаясь схемы предыдущих задач, определяем функции $g^{(j)}$, входящие в (32), начинаем с условий Коши (2). Согласно данным условиям,

$$\begin{gathered} g^{(1)}(x_1) = g^{(1,0)}(x_1) = \varphi(x_1) - v_p(0, x_1), \quad x_1 \in [0, l], \\ g^{(2)}(x_1) = g^{(2,0)}(x_1) = \psi(x_1) - ad\varphi(x_1) - a\partial_{x_1} v_p(0, x_1) - \partial_{x_0} v_p(0, x_1), \quad x_1 \in [0, l]. \end{gathered} \tag{33}$$

Теперь от функции (32) требуем, чтобы она удовлетворяла условиям (2), (3). Согласно этим условиям,

$$g^{(1)}(ax_0) + x_0 g^{(2)}(ax_0) = \mu^{(1)}(x_0) - v_p(x_0, 0),$$

$$g^{(1)}(l + ax_0) + x_0 g^{(2)}(l + ax_0) = \mu^{(2)}(x_0) - v_p(x_0, l),$$

или

$$\begin{gathered} g^{(1)}(z) = g^{(1,1)}(z) = \\ = \frac{z}{l}\mu^{(2)}\left(\frac{z-l}{a}\right) - \frac{z-l}{l}\mu^{(1)}\left(\frac{z}{a}\right) - \frac{z}{l}v_p\left(\frac{z-l}{a}, l\right) + \frac{z-l}{l}v_p\left(\frac{z}{a}, 0\right), \\ g^{(2)}(z) = g^{(2,1)}(z) = \\ = \frac{a}{l}\mu^{(1)}\left(\frac{z}{a}\right) - \frac{a}{l}\mu^{(2)}\left(\frac{z-l}{a}\right) + \frac{a}{l}v_p\left(\frac{z-l}{a}, l\right) - \frac{a}{l}v_p\left(\frac{z}{a}, 0\right), \quad z \in [l, \infty). \end{gathered} \tag{34}$$

Из соотношений (33) и (34) видно, что функции $g^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ определены отдельно на $[0, l]$ и $[l, \infty)$. Чтобы они в точке $z = l$ были непрерывными и непрерывно дифференцируемыми, необходимо и достаточно выполнения условий

$$d^k g^{(j,0)}(l) = d^k g^{(j,1)}(l), \quad k = \overline{0, 2}. \tag{35}$$

Условия согласования (35) запишем в более развернутом виде через заданные функции задачи (27), (2)–(4), а именно:

$$\begin{gathered} \varphi(l) - \mu^{(2)}(0) = 0, \\ d\varphi(l) - \frac{1}{a}d\mu^{(2)}(0) + \frac{1}{l}\mu^{(1)}\left(\frac{l}{a}\right) - \mu^{(2)}(0) + \frac{1}{l}v_p(0, l) - \frac{1}{l}v_p\left(\frac{l}{a}, 0\right) + \\ + \partial_{x_0}v_p(0, l) - \partial_{x_1}v_p(0, l) = 0, \\ d^2\varphi(l) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{al}\right)d\mu^{(2)}(0) - \frac{1}{a^2}d^2\mu^{(2)}(0) + \frac{2}{al}d\mu^{(1)}\left(\frac{l}{a}\right) + \\ + \left(\frac{1}{al} + \frac{1}{l}\right)\partial_{x_0}v_p(0, l) + \partial_{x_0}^2 v_p(0, l) - \frac{2}{al}\partial_{x_0}v_p\left(\frac{l}{a}, 0\right) = 0; \end{gathered} \tag{36}$$

$$\begin{gathered} ad\varphi(l) - \psi(l) + \frac{a}{l}\mu^{(1)}\left(\frac{l}{a}\right) - \frac{a}{l}\mu^{(2)}(0) + \frac{a}{l}v_p(0, l) - \frac{a}{l}v_p\left(\frac{l}{a}, 0\right) + \\ + a\partial_{x_1}v_p(0, l) + \partial_{x_0}v_p(0, l) = 0, \\ ad^2\varphi(l) - d\psi(l) + \frac{1}{l}d\mu^{(1)}\left(\frac{l}{a}\right) - \frac{1}{l}d\mu^{(2)}(0) + \frac{1}{l}\partial_{x_0}v_p(0, l) - \frac{1}{l}\partial_{x_0}v_p\left(\frac{l}{a}, 0\right) + \\ + a^2\partial_{x_1}^2 v_p(0, l) + \partial_{x_0}\partial_{x_1}v_p(0, l) = 0, \\ ad^3\varphi(l) - d^2\psi(l) + \frac{1}{la}d^2\mu^{(1)}\left(\frac{l}{a}\right) - \frac{1}{al}d^2\mu^{(2)}(0) + \frac{1}{al}\partial_{x_0}^2 v_p(0, l) - \\ - \frac{1}{al}\partial_{x_0}^2 v_p\left(\frac{l}{a}, 0\right) + a\partial_{x_1}^3 v_p(0, l) + \partial_{x_0}\partial_{x_1}^2 v_p(0, l) = 0, \end{gathered} \tag{37}$$

где значения функции v_p и ее производных рассматриваются из (29) для $m = 1$, то есть $v_p(\mathbf{x}) = v_p^{(1)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \overline{Q^{(1)}}$.

Если проанализировать формулы (33)–(37), то можно указать достаточные условия гладкости для заданных функций задачи (27), (2)–(4), при выполнении которых существует классическое решение этой задачи из класса $C^2\left(\overline{Q}\right)$. Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. *Пусть выполняются следующие условия гладкости для функций задачи (27), (2)–(4):* $f \in C^{1,3}\left(\overline{Q}\right)$, $\varphi \in C^3([0,l])$, $\psi \in C^2([0,l])$, $\mu^{(1)} \in C^2\left(\left[\frac{l}{a},\infty\right)\right)$, $\mu^{(2)} \in C^2([0,\infty))$. *Тогда существует единственное классическое решение из класса* $C^2\left(\overline{Q}\right)$ *задачи (27), (2)–(4) тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (36), (37). Решение определяется аналитическими соотношениями (28), (29), (32)–(34) и непрерывно зависит от заданных функций задачи.*

Доказательство фактически проведено в предыдущих исследованиях. Непрерывность решения от заданных функций следует из формул (28), (29), (32)-(34), представляющих в аналитическом виде это решение.

8. $0 < a < -\varepsilon$. Данный случай фактически рассмотрен в пунктах 2–4, где $-\varepsilon$ и a следует поменять местами.

В данной работе для уравнения (1) для разных коэффициентов a и ε рассмотрены в полуполосе простейшие смешанные задачи с условиями Коши и Дирихле. Для уравнения (1), конечно, существует много и других корректно поставленных задач, для которых существуют классические решения и которые можно представить в аналитическом виде. Такой цели не ставилось и охватить весь арсенал таких задач практически не представляется возможным. Это будут уже другие исследования. Здесь продемонстрирована постановка задач в зависимости от коэффициентов a и ε и соотношений между ними.

Следует еще отметить, что уравнение (27) является нестрого гиперболическим. В этом случае, чтобы классическое решение задачи (27), (2)–(4) было бы из класса $C^2\left(\overline{Q}\right)$ по сравнению с задачами для строго гиперболического уравнения (1), требуется большая гладкость заданных функций. Это наглядно показывают представленные в аналитическом виде классические решения соответствующих задач.

Литература

1. *Корзюк В. И., Козловская И. С., Наумовец С. Н.* Постановка граничных задач на плоскости в зависимости от коэффициентов для типа волнового уравнения. I // Труды Института математики. – 2019. – Т. 27, № 1. – С. 29–36.
2. *Корзюк В. И., Козловская И. С., Наумовец С. Н.* Постановка граничных задач на плоскости в зависимости от коэффициентов для типа волнового уравнения. II // Труды Института математики. – 2019. – Т. 27, № 1. – С. 37–43.
3. *Корзюк В. И., Козловская И. С.* Классические решения задач для гиперболических уравнений. В десяти частях. Часть 1. Минск 2017. 45с.
4. *Корзюк В. И., Козловская И. С.* Классические решения задач для гиперболических уравнений. В десяти частях. Часть 2. Минск 2017. 52с.
5. *Корзюк В. И., Наумовец С. Н., Севостюк В. А.* О классическом решении второй смешанной задачи для одномерного волнового уравнения. // Труды Института математики. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 35–42.
6. *Корзюк В. И., Наумовец С. Н., Сериков В. П.* Метод характеристического параллелограмма решения второй смешанной задачи для одномерного волнового уравнения. // Труды Института математики. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 43–53.

7. *Корзюк В. И., Наумовец С. Н.* Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с производными высокого порядка в граничных условиях. // Докл. НАН Беларуси. – 2016. – Т.60, №3. – С. 11–17.
8. *Моисеев Е. И., Корзюк В. И., Козловская И. С.* Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного волнового уравнения. // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1373–1385.
9. *Корзюк В. И., Козловская И. С., Наумовец С. Н.* Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 1. – С. 7–20.

V. I. Korzyuk, I. S. Kozlovskaja, S. N. Naumavets

Statement of border tasks on the plane dependent on the coefficients for the type of the wave equation. III.

Summary

This paper is a continuation of [1, 2] under the general title. In the half-strip on the plane of two independent variables, boundary value problems for a second-order hyperbolic equation with constant coefficients are considered, whose operator represents a composition of first-order operators. The simplest problems are considered where Cauchy and Dirichlet conditions are attached at the boundary of the domain. We consider the correct problems, the solutions of which in an analytical form are presented.