УДК 624.075.001.24

А.С. Хамутовский

Брестский инженерно-строительный институт

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ СТОЕК СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

В настоящей работе предлагается методика получения аналитических зависимостей для стоек ступенчато-переменного сечения при действии на них осевых сил.

Для стойки, показанной на рис. 1, отыскивается минимальный объем материала с учетом ограничений по прочности и устойчивости. При этом предполагается, что механические свойства материала, работающего в упругой стадии, форма поперечного сечения, геометрические размеры, жесткость упругих связей, величины осевых сил являются заданными.

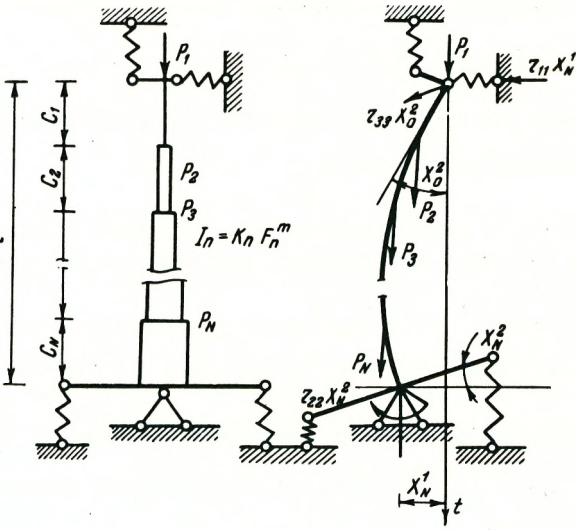

Рис. 1.

Приняв за фазовые координаты для n-го участка прогибы X_n^1, углы поворота X_n^2, изгибающие моменты X_n^3, проекцию поперечной и продольной сил на нормаль к первоначальной оси стойки X_n^4 и воспользовавшись уравнением упругой линии сжато-изогнутого стержня в форме метода начальных параметров [1], можно записать

$$X_n^1 = T_n^1(X_{n-1}^i;\ \nu_n) = X_{n-1}^1 + X_{n-1}^2 c_n / \nu_n \sin \nu_n +$$
$$+ X_{n-1}^3 c_n / f_n (1 - \cos \nu_n) + X_{n-1}^4 c_n^2 / f_n \nu_n (\nu_n - \sin \nu_n);$$
$$X_n^2 = T_n^2(X_{n-1}^i; \nu_n) = X_{n-1}^2 \cos \nu_n + X_{n-1}^3 \nu_n \sin \nu_n / f_n +$$
$$+ X_{n-1}^4 c_n / f_n (1 - \cos \nu_n);$$
$$X_n^3 = T_n^3(X_{n-1}^i; \nu_n) = -X_{n-1}^2 f_n / \nu_n \sin \nu_n +$$
$$X_{n-1}^3 \cos \nu_n + X_{n-1}^4 c_n / \nu_n \sin \nu_n; \qquad (1)$$
$$X_n^4 = T_n^4(X_{n-1}^4) = X_{n-1}^4 .$$

Здесь $\nu_n = \sqrt{c_n f_n / E I_n}$ – критический параметр, принятый за управляющую переменную,

$$f_n = c_n \sum_{i=1}^{n} P_i . \qquad (2)$$

Для первого участка в уравнениях (1) изгибающий момент X_{n-1}^3 заменяется выражением

$$X_{n-1}^3 = r_{33} X_o^2 + X_o^3 . \qquad (3)$$

Граничные условия для данного примера имеют вид

при $t = 0 \quad X_o^1 = 0; \quad X_o^3 = 0;$ (4)

$t = 1 \quad X_N^1 = X_{N-1}^4 / r_{11}; \ X_N^3 = - r_{22} X_N^2 ,$ (5)

где r_{11} – реакция в упругой связи при единичном линейном смещении; r_{22}, r_{33} – то же, но при угловом смещении соответствующей связи.

Для сведения целевой функции

$$V = \sum_{n=1}^{N} c_n F_n = \sum_{n=1}^{N} b_n / (\nu_n)^{\frac{2}{m}} \qquad (6)$$

к стандартному виду дискретного принципа максимума [2]

$$V = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i X_N^i \qquad (7)$$

вводится еще одна фазовая координата

$$X^5_n = X^5_{n-1} + b_n / (\nu_n)^{\frac{2}{m}} \tag{8}$$

при условии, что $X^5_o = 0$, где

$$b_n = c_n (c_n f_n / k_n E)^{\frac{1}{m}}. \tag{9}$$

Для минимизации целевой функции необходимо составить функции Гамильтона

$$H_n = \sum_{i=1}^{5} Z^i_n T^i_n (X^i_{n-1}, \nu_n); \quad n = 1, 2, \ldots, N \tag{10}$$

с учетом условий (3) и (5) и ввести сопряженный вектор Z_n, отыскиваемый по правилу

$$Z^i_{n-1} = \partial H_n / \partial X^i_{n-1}. \tag{11}$$

Граничные условия для сопряженного вектора зависят от начального и конечного фазового состояния объекта [3] и имеют вид

при $t = 0$ $\quad Z^2_o(\nu) = 0; \; Z^4_o(\nu) = 0;$

$$t = 1 \quad Z^2_N = 0; \; Z^4_N = 0; \; Z^5_1 = Z^5_2 = \ldots = Z^5_N = -1. \tag{12}$$

Функция (7) достигает минимума, если

$$\partial H_n / \partial \nu_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N. \tag{13}$$

Решив совместно систему уравнений (13), (11), (1) с учетом выражений (4), (5), (12), получим искомые аналитические зависимости, из которых находятся оптимальные критические параметры. Эти параметры должны удовлетворять условию прочности

$$\nu_n \leq (c_n^{m+1} \sigma_o^m / k_n E f_n^{m-1})^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

Если оно не выполняется для некоторых ν_n, то последние назначаются исходя из условий прочности. Зная критические параметры, определяют минимальный объем системы, использовав выражение (6).

Для двухступенчатой стойки искомые аналитические зависимости имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{A}{B} = \frac{D}{C}; \\ &\frac{C\frac{\partial A}{\partial \nu_1} - D\frac{\partial B}{\partial \nu_1} + A\frac{\partial C}{\partial \nu_1} - B\frac{\partial D}{\partial \nu_1}}{B\frac{\partial D}{\partial \nu_2} - A\frac{\partial C}{\partial \nu_2} - C\frac{\partial A}{\partial \nu_2} + D\frac{\partial B}{\partial \nu_2}} = -\frac{b_1}{b_2}\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{\frac{2}{m}+1} \end{aligned}\right\}, \tag{15}$$

где

$$A = \frac{c_1}{\nu_1}\sin\nu_1 + r_{33}\frac{c_1}{f_1}(1-\cos\nu_1) + \frac{c_2}{f_2}(1-$$

$$-\cos\nu_2)\Psi + \frac{c_2}{\nu_2}\varphi\sin\nu_2;$$

$$B = \frac{c_1^2(\nu_1 - \sin\nu_1)}{f_1\nu_1} + \frac{c_1 c_2}{f_1\nu_2}\sin\nu_2(1-\cos\nu_1) +$$

$$+\frac{c_1 c_2}{f_2\nu_1}\sin\nu_1(1-\cos\nu_2) + \frac{c_2^2(\nu_2 - \sin\nu_2)}{f_2\nu_2} -$$

$$-\frac{1}{r_{11}};$$

$$C = \frac{c_1}{f_1}(1-\cos\nu_1)\mathcal{E} + \frac{c_1}{\nu_1}\sin\nu_1\beta + \frac{c_2}{\nu_2}\sin\nu_2 +$$

$$+ r_{22}\frac{c_2}{f_2}(1-\cos\nu_2);$$

$$D = \varphi\mathcal{E} + \Psi\beta;\quad \Psi = r_{33}\cos\nu_1 - \frac{f_1}{\nu_1}\sin\nu_1;$$

$$\varphi = r_{33}\frac{\nu_1}{f_1}\sin\nu_1 + \cos\nu_1;\quad \mathcal{E} = r_{22}\cos\nu_2 -$$

$$-\frac{f_2}{\nu_2}\sin\nu_2;$$

$$\beta = \cos\nu_2 + r_{22}\frac{\nu_2}{f_2}\sin\nu_2.$$

Из уравнений (15) можно получить ряд частных решений, учитывающих различное закрепление концов стойки. Так, например, положив $r_{11} = 0$, $r_{22} = \infty$, $r_{33} = 0$ (консольная стойка), получим

$$\left.\begin{aligned} & 1 - \frac{f_1 \nu_2}{f_2 \nu_1} \operatorname{tg} \nu_1 \operatorname{tg} \nu_2 = 0; \\ & \frac{\operatorname{tg} \nu_1 + \frac{f_1 \nu_2}{f_2 \nu_1^2} (\nu_1 - \operatorname{tg} \nu_1) \operatorname{tg} \nu_2}{\operatorname{tg} \nu_2 + \frac{f_1 \operatorname{tg} \nu_1}{f_2 \nu_1} (\nu_2 + \operatorname{tg} \nu_2)} = \frac{b_1}{b_2} \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{\frac{2}{m}} + 1 \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Для этой же стойки при $N = 3$ уравнения получены в виде

$$\left.\begin{aligned} & 1 - \frac{f_1 \nu_2}{f_2 \nu_1} \operatorname{tg} \nu_1 \operatorname{tg} \nu_2 + \frac{f_1 \nu_3}{f_3 \nu_1} \operatorname{tg} \nu_1 \operatorname{tg} \nu_3 + \\ & + \frac{f_2 \nu_3}{f_3 \nu_2} \operatorname{tg} \nu_2 \operatorname{tg} \nu_3 = 0; \\ & \operatorname{tg} \nu_2 + \frac{f_1 \operatorname{tg} \nu_1}{f_2 \nu_1} (\nu_2 + \operatorname{tg} \nu_2) + \nu_3 \operatorname{tg} \nu_3 \left[\frac{f_2 (\nu_2 - \operatorname{tg} \nu_2)}{f_3 \nu_2^2} \right. \\ & \left. - \frac{f_1 \operatorname{tg} \nu_1 \operatorname{tg} \nu_2}{f_2 \nu_1}\right] = \alpha \frac{b_2}{b_3} \left(\frac{\nu_3}{\nu_2}\right)^{\frac{2}{m}} + 1; \\ & \left(1 - \frac{f_2 \nu_3}{f_3 \nu_2} \operatorname{tg} \nu_2 \operatorname{tg} \nu_3\right) \operatorname{tg} \nu_1 + \left(\frac{f_1 \nu_2 \operatorname{tg} \nu_2}{f_2} + \right. \\ & \left. + \frac{f_1 \nu_3 \operatorname{tg} \nu_3}{f_3}\right) \frac{(\nu_1 - \operatorname{tg} \nu_1)}{\nu_1^2} = \alpha \frac{b_1}{b_3} \left(\frac{\nu_3}{\nu_1}\right)^{\frac{2}{m}} + 1, \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Для шарнирно опертой стойки при действии на нее только силы P_1 $N = 3$ критические параметры находятся из выражений (18)

$$\left.\frac{f_3}{\nu_3} \operatorname{tg} \nu_3 + \frac{f_2}{\nu_2} \operatorname{tg} \nu_2 - \frac{f_1}{\nu_1} \operatorname{tg} \nu_1 \left(\frac{f_3 \nu_2}{f_2 \nu_3} \operatorname{tg} \nu_2 \operatorname{tg} \nu_3 - 1\right) = 0; \right\} \quad (18)$$

$$\frac{f_3}{\nu_3}\operatorname{tg}\nu_3\left[\operatorname{tg}\nu_2+\frac{f_1\operatorname{tg}\nu_1}{f_2\nu_1}(\nu_2+\operatorname{tg}\nu_2)\right]-\left[\frac{f_2}{\nu_2^2}(\nu_2-\operatorname{tg}\nu_2)-\right.$$

$$\left.-\frac{f_1}{\nu_1}\operatorname{tg}\nu_1\operatorname{tg}\nu_2\right]=\gamma\frac{b_2}{b_3}\left(\frac{\nu_3}{\nu_2}\right)^{\frac{2}{m}+1};$$

$$\left(\frac{f_3}{\nu_3}\operatorname{tg}\nu_3+\frac{f_2}{\nu_2}\operatorname{tg}\nu_2\right)\operatorname{tg}\nu_1+\frac{f_1}{\nu_1^2}(\nu_1-$$

$$-\operatorname{tg}\nu_1)\left(\frac{f_3\nu_2}{f_2\nu_3}\operatorname{tg}\nu_3\operatorname{tg}\nu_2-1\right)=\gamma\frac{b_1}{b_2}\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{\frac{2}{m}+1},$$

где $\gamma=\operatorname{tg}\nu_3\left(\frac{f_2}{\nu_2}\operatorname{tg}\nu_2+\frac{f_1}{\nu_1}\operatorname{tg}\nu_1\right)-\frac{f_3}{\nu_3^2}(\nu_3-$

$$-\operatorname{tg}\nu_3)\left(1-\frac{f_1\nu_2}{f_2\nu_1}\operatorname{tg}\nu_1\operatorname{tg}\nu_2\right). \tag{18}$$

Пример. Определить минимальный объем двухступенчатой и трехступенчатой консольных стоек прямоугольного поперечного сечения с постоянной высотой $h=1$ и переменной шириной сечения, если $P_1=1$, $E=12$, $l=3$ и потеря устойчивости происходит в плоскости h. Стойки имеют ступени равной длины.

По формулам (2), (9), (16) или (17), (6) при $k_n=h^2/12=1/12$ и $m=1$ определим соответственно значения f_n, b_n, ν_n, V.

Для двухступенчатой стойки

$c_1=c_2=1{,}5$; $f_1=f_2=1{,}5$; $b_1=b_2=27/8$; $\nu_1=1{,}01$; $\nu_2=0{,}722$; $V=9{,}81$.

Для трехступенчатой стойки

$c_1=c_2=c_3=1$; $f_1=f_2=f_3=1$; $b_1=b_2=b_3=1$; $\nu_1=0{,}804$; $\nu_2=534$; $\nu_3=0{,}475$; $V=9{,}51$.

Полученный результат при $N=3$ совпадает с решением, приведенным в работе [4].

Резюме. Предлагаемую методику можно применять для расчета многопролетных стержней на упругих и жестких опорах, однопролетных симметричных и многопролетных одноэтажных рам.

Литература

1. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Расчетно-теоретический, кн. 2. М., 1973. 2. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М., 1973. 3. Фан Лян-цень, Вань Чу-сен. Дискретный принцип максимума. М., 1967. 4. Баублис П.С., Ципинас И.К. Применение метода проектируемых градиентов Розена для оптимизации упругих систем, подверженных потере устойчивости. - В кн.: Литовский механический сборник. Вильнюс, 1969, № 1 (4).