

РАЗМЕРНОСТЬ ЭКСТРЕМАЛЬНОСТИ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ  
ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Математическая модель задачи стоимостной (весовой) оптимизации произвольных стержневых систем с учетом условий реального проектирования имеет вид [1]

$$\min \left\{ V(Y) \mid Y \in R, R = \left\{ Y \mid p(Y) = 0, g(Y) \leq 0 \right\} \right\}. \quad (1)$$

В качестве оптимизируемых параметров приняты линейно-независимые усилия и опасные напряжения в расчетных сечениях элементов, т.е.  $Y = \{X, \sigma\}$ .

Для линейно-упругих шарнирно-стержневых систем с учетом конкретных выражений учитываемых ограничений задачи (условий статической и кинематической совместности, допустимой жесткости, прочности и устойчивости элементов, а также конструктивных ограничений на площади сечений) математическую модель (1) приводим к виду:

минимизировать целевую функцию

$$V(X, \sigma) = B_x \sigma_x^{-1} [X] \bar{E}_x + B_{N_x} \sigma_{N_x}^{-1} \left[ A_{N_x}^{-1} P - A_{N_x} A_x X \right] \bar{E}_{N_x} \quad (2)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} & I_x \left( \sigma_x \bar{S}_x [X]^{-1} X + \bar{S}_{N_x} E_x t_{\alpha_x} + \Delta_x \right) + (-A_{N_x}^{-1} A_x)^T \left\{ \sigma_{N_x} S_{N_x} X \right. \\ & \times \left[ A_{N_x}^{-1} P - A_{N_x}^{-1} A_x X \right]^{-1} \left( A_{N_x}^{-1} P - A_{N_x}^{-1} A_x X \right) + \bar{S}_{N_x} E_{N_x} t_{N_x} \alpha_{N_x}^T \\ & \left. + \Delta_{N_x} \right\} = 0; \quad (3a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \hat{P} (A_{N_x}^{-1})^T \left\{ \sigma_{N_x} \bar{S}_{N_x} \left[ A_{N_x}^{-1} P - A_{N_x}^{-1} A_x X \right]^{-1} \left( A_{N_x}^{-1} P - \right. \right. \\ & \left. \left. - A_{N_x}^{-1} A_x X \right) + \bar{S}_{N_x} E_{N_x} t_{N_x} \alpha_{N_x} + \Delta_{N_x} \right\} \leq \bar{y}; \quad (3b) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| \begin{array}{c} \sigma_x [X]^{-1} X \\ \sigma_{N_x} [A_{N_x}^{-1} P - A_{N_x}^{-1} A_x X]^{-1} (A_{N_x}^{-1} P - A_{N_x}^{-1} A_x X) \end{array} \right\| - \bar{\sigma}^+ \bar{E} \leq 0; \\ \left\| \begin{array}{c} \sigma_x [X]^{-1} X \\ \sigma_{N_x} [A_{N_x}^{-1} P - A_{N_x}^{-1} A_x X]^{-1} (A_{N_x}^{-1} P - A_{N_x}^{-1} A_x X) \end{array} \right\| + \bar{\sigma}^- \bar{E} \geq 0; \end{array} \right. \quad (3b)$$

$$\left\| (\sigma_x^{-1} [X] \bar{E}_x)^T \cdot \left\{ \sigma_{N_x}^{-1} [A_{N_x}^{-1} P - A_{N_x}^{-1} A_x X] \bar{E}_{N_x} \right\}^T \right\|^T - \bar{F} \geq 0. \quad (3r)$$

В выражениях (2), (3) индексы  $X$  и  $N_x$  обозначают подматрицы, соответствующие стержням с линейно-независимыми и линейно-зависимыми усилиями;  $A_x, A_{N_x}$  -  $(2l \times n)$  и  $2l \times (r-n)$ -мерные подматрицы условий статического равновесия;  $B_x, B_{N_x}$  -

подматрицы стоимости элементов с единичными площадями, равные  $B_x = S_x^T C_x \gamma_x$ ,  $B_{N_x} = S_{N_x}^T C_{N_x} \gamma_{N_x}$ ;  $C = \|C_x, C_{N_x}\|$ ,  $\delta = \|\delta_x, \delta_{N_x}\|$ ,  $E = \|E_x, E_{N_x}\|$  -  $r$ -мерные диагональные

матрицы соответственно удельных стоимостей материалов элементов в деле, удельных весов материалов и модулей упругости первого рода;  $P - (2l \times w)$  - мерная матрица внешних сил;  $S = \|S_x, S_{N_x}\|$ ,  $\bar{F}$ ,  $t_\alpha = \|t_{\alpha_x}, t_{\alpha_{N_x}}\|^T$ ,  $\Delta - r$ -мерные

матрицы-столбцы соответственно длин, минимальных допустимых площадей поперечных сечений, температурных деформаций и полных начальных деформаций элементов:  $\sigma = \|\sigma_x, \sigma_{N_x}\|$ ,

$\bar{\sigma}^+$ ,  $\bar{\sigma}^-$  -  $r$ -мерные диагональные матрицы опасных напряжений и их допустимых максимальных значений;  $X - (n \times w)$ -мерная подматрица линейно-независимых усилий;  $\bar{y} - (s \times w)$ -мерная матрица предельных допустимых значений перемещений системы;  $\bar{S} = \|r S_j E_j\| = \|\bar{S}_x, \bar{S}_{N_x}\|$   $r$ -мерная диа-

гональная матрица приведенных длин элементов;  $\bar{E} = \|\bar{E}_x$ ,

$E_N \parallel \hat{E}$  - соответственно матрица-столбец и  $r$ -мерная матрица с единичными элементами;  $r, l, n, w, s$  - соответственно число стержней, узлов, степень статической неопределимости, количество внешних одновременных воздействий и число узлов с ограниченными величинами перемещений;  $[X], [A_N^{-1} P - A_N^{-1} A_X X] = [N_X]$  -  $n$  и  $(r-n)$ -мерные диагональные матрицы линейно-независимых и линейно-зависимых опасных усилий в элементах;  $I_x$  -  $n$ -мерная единичная матрица.

В математической модели (2), (3) статические условия совместности (равновесия) представлены в форме, заимствованной из работ [2, 3], и учтены в целевой функции и в остальных ограничениях задачи. Построение практического метода оптимизации ферменных конструкций в принятой постановке возможно на основе предварительно выявленных свойств математической модели (2), (3) и в первую очередь установления размерности экстремальности и критериев выделения подмножеств множества допустимых решений, характеризующихся наличием одного экстремума.

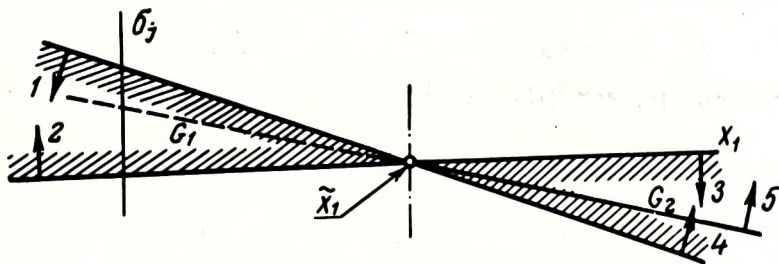


Рис. 1. Геометрическая интерпретация условия (4):  
 $\tilde{x}_1 = x_1 / N_{j0} + N_{j1} x_1 = 0; 1 - N_j \geq F_j^+ \sigma_j;$   
 $2 - \sigma_j \geq 0; 3 - \sigma_j \leq 0; 4 - N_j \leq F_j^- \sigma_j$  при  $F_j^- = F_j^+;$   
 $5 - N_j \leq F_j^- \sigma_j$  при  $F_j^- > F_j^+.$

Рассмотрим случай одного внешнего воздействия. При этом система ограничений (3) принимает линейный характер. Типичной особенностью конструктивных ограничений на  $F$  и условий неотрицательности их знаков (3г), представленных в линейной форме, является перемена знака неравенства на противоположный при одновременном изменении знака свободного переменного  $\sigma_j$  и соответствующего усилия. Так, одно из ограничений (3г), записанное в линейной форме, имеет вид

$$N_j \geq F_j \sigma_j \text{ при } N_j \geq 0, \sigma_j \geq 0 \text{ и } N_j \leq F_j \sigma_j \text{ при } N_j \leq 0, \sigma_j \leq 0. (4)$$

Геометрическая интерпретация условия (4) представлена на рис. 1. Если иметь в виду наличие в задаче оптимизации лишь одного ограничения (4), то  $R = G_1 \cup G_2$ . В реальных условиях, при учете других ограничений, подмножества  $G_1$  и  $G_2$  сужаются и одно из них вообще может оказаться невыполнимым. Кроме того, для одного и того же стержня минимальные конструктивные значения площадей при растяжении  $F_j^+$  и сжатии  $F_j^-$  могут существенно отличаться друг от друга. В связи с этим в точке  $X_1 = \bar{X}_1$  возможен излом границы ограничений (4). При  $X_1 = \bar{X}_1$  имеет место  $N_j = 0$  и  $\sigma_j = 0$ . Данное решение осуществимо только тогда, когда возможно существование формально статически неопределимой системы, т.е. системы с существующими, но не работающими лишними связями. Принципиально возможность такого решения существует для реальных схем ферм при  $r \geq 3$ .

Таким образом, в рассматриваемом случае для реальных схем ферм справедливым является соотношение

$$R = \bigcup_{q=\overline{1,m}} G_q. (5)$$

Благодаря указанным особенностям образования  $G_q$  множество допустимых решений  $R$  в общем случае является невыпуклым, а каждое из  $G_q$ ,  $q = \overline{1, m}$  характеризуется определенным набором знаков усилий в стержнях или картиной знаков усилий. Осуществимые картины знаков усилий могут быть легко получены путем построения так называемого графика следов усилий [4].

Учитывая изложенное, а также изученные ранее свойства выпуклости целевой функции (2) [5], приходим к следующим выводам:

1. Задача оптимизации шарнирно-стержневых систем в общем случае является многоэкстремальной. Для частных видов конструкций с небольшим числом элементов она может оказаться одноэкстремальной.

2. В пределах каждого подмножества  $G_q$ ,  $q = \overline{1, m}$  целевая функция (2) имеет один локальный, он же глобальный минимум.

3. Размерность экстремальности  $m$  задачи равна количеству подмножеств  $G_q$ , а следовательно, количеству осуществимых картин знаков усилий, т.е. картин знаков, удовлет-

Таблица 1. Результаты оптимизации фермы, рассмотренной в первом примере

Номера стержней	$N_j$ , тс	$\sigma_j$ , кгс/см <sup>2</sup>	$F_j$ , см <sup>2</sup>	$\min V$ , м <sup>3</sup>
1 - 2	-12,617	-1166,1	10,82	0,03844
3 - 2	-16,823	-961,56	17,49	
4 - 3	11,382	1382,48	8,23	
4 - 1	13,178	1426,51	10,63	
3 - 1	-18,970	-771,17	24,60	
2 - 4	21,029	146,62	18,34	

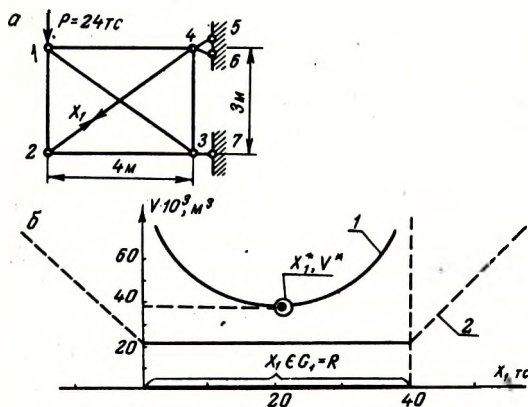


Рис. 2. Пример одноэкстремальной задачи:  
 а - расчетная схема; б - зависимости  $V = V(X_1)$ : 1 -  $V = V(X_1, \sigma = \sigma | V(\sigma, X = const) \rightarrow \min$ ; 2 -  $V = V(X_1, \sigma_j^+ = R, \sigma_j^- = 0,8R)$ .

воряющих условиям статической и кинематической совместности.

В подтверждение изложенных положений приведем результаты оптимизации однократно статически неопределимых ферм, загружаемых одной комбинацией внешних нагрузок. Оптимизация выполнена без уточнения коэффициентов продольного изгиба для сжатых стержней по разработанному алгоритму и программе расчета на ЭВМ "Минск-22" [6]. Исходные данные для одной из рассмотренных ферм на рис. 2, а такие:  $E_j = 2,1 \cdot 10^6$  кгс/см<sup>2</sup>;  $R_j = 2,1 \cdot 10^3$  кгс/см<sup>2</sup>;  $C_j \nu_j = 1$ ;  $m_j = 1$ ;  $\varphi^0 = 0,8$ ;  $\bar{y}_2 = 0,007$  м;  $j = 1,6$ . За линейно-независимое  $X_1$  принято усилие в стержне 2 - 4. Результаты оптимизации приведены в табл. 1, а зависимости  $V = V(X)$ , соответствующие равнопрочному решению без учета ограничений задачи и решению задачи оптимизации (2), (3), изображены на рис. 2, б. Зависимость  $V = V(X)$  при равнопрочном решении представляет собой линейную модулярную функцию, детально изученную



Ю.А. Радигом [7]. Данный пример иллюстрирует случай одноэкстремальной задачи оптимизации ( $m=1$ ), так как он характеризуется наличием лишь одной осуществимой картины знаков усилий, соответствующей подмножеству  $G_1 = R_1$ .

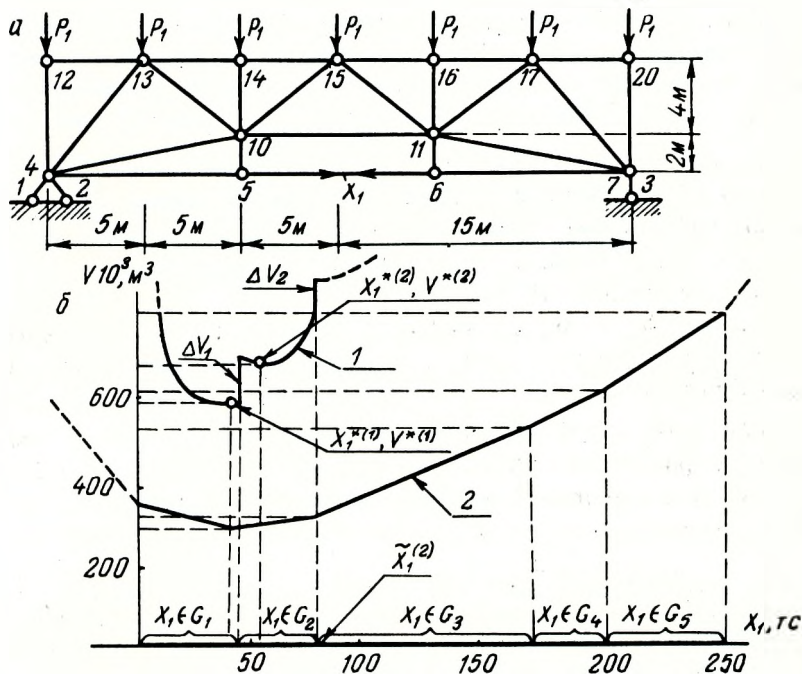


Рис. 3. Пример многоэкстремальной задачи:

а) расчетная схема; б) зависимости  $V = V(X)$ : 1.  $V = V(X_1, \sigma) = \sigma |V(X) - \text{const}, \epsilon) \rightarrow \min$ ; 2.  $V = V(X_1, \sigma_j^+ = \sigma_j^- = R)$ .

Таблица 2. Результаты оптимизации формы, рассмотренной во втором примере

Номера стержней	$F_{jj}^* = F_{jj}^{*(1)}$ , см	$\sigma_j^* = \sigma_j^{*(1)}$ , кгс/см	$\sigma_j^{*(2)}$ , кгс/см <sup>2</sup>	Номера стержней	$F_{jj}^* = F_{jj}^{*(1)}$ , см	$\sigma_j^* = \sigma_j^{*(1)}$ , кгс/см	$\sigma_j^{*(2)}$ , кгс/см <sup>2</sup>
06-05	20,51	1325,6	1438,4	10-11	47,87	1124,1	1507,2
07-06	20,18	1340,7	1425,6	10-15	39,40	-406,3	-406,3
17-07	94,20	-899,4	-653,4	14-15	85,71	-938,5	-1186,9
11-07	24,59	126,4	147,02	10-14	16,30	-1227,0	-1227,0
16-17	60,07	-1338,9	-1488,0	13-14	85,86	-938,85	-1125,9
11-17	38,54	1271,1	1641,2	13-10	56,57	866,13	786,8
11-16	16,30	-1227,0	-1227,0	04-10	24,59	126,43	-147,0
15-16	60,07	-1338,9	-1488,0	04-13	94,20	-899,36	-853,4
15-11	38,40	-406,2	-406,2	04-05	20,18	1340,8	1303,6

$X_1^* = X^{*(1)} = 39,125$  тс;  $X_1^{*(2)} = 52,984$  тс  
 $V^* = V^{*(1)} = 0,6033$  м<sup>3</sup>;  $V^{*(2)} = 0,7049$  м<sup>3</sup>

Исходные данные для второй из рассмотренных ферм, представленной на рис. 3, а, следующие:  $P_1 = 20$  тс;  $C_j \nu_j = 1$ ;  $m_j = 1$ ;  $m_j = 1$ ;  $\varphi^0 = 0,8$ ;  $\bar{y}_5 = 0,03$  м. Недостающие параметры приняты равными соответствующим параметрам предыдущего примера. Зависимости  $V = V(X)$ , соответствующие равнопрочному решению без учета ограничений задачи и решению задачи оптимизации (2), (3), изображены на рис. 3, б. Данный пример иллюстрирует случай пятиэкстремальной задачи оптимизации ( $m = 5$ ). При этом  $R = \bigcup_q G_q$ ,  $q = \bar{1}, \bar{5}$  и осуществимыми оказываются пять картин знаков усилий. Для сопоставления результатов решения, соответствующие двум локальным минимумам, приводятся в табл. 2. Увеличение объема в точке второго локального минимума по сравнению с глобальным составляет 16,8%.

Значения  $\bar{F}_j$  определяются в зависимости от принимаемого типа поперечных сечений и нормативных значений предельных гибкостей  $\chi_{пр}$ . В связи с этим в точках  $\tilde{X}_1^k$  для стержней с  $N_j = 0$  имеет место отмеченный ранее излом границы ограничений ( $3r$ ), а на графике  $V = V(X, \sigma = \sigma | V(X = \text{const}, \sigma) \rightarrow \min)$  возникают разрывы, равные по величине

$$\Delta V = \sum_j \bar{F}_j^- S_j - \sum_j \bar{F}_j^+ S_j, \quad j = \{j | N_j = 0\}. \quad (6)$$

Выявленные качественные особенности задачи оптимизации шарнирно-стержневых систем справедливы для произвольного значения  $n$ . В то же время геометрическая интерпретация зависимости  $V = V(X, \sigma = \sigma | (X = \text{const}, \sigma) \rightarrow \min)$  при  $n_{n+1} > 1$  не приводится ввиду сложности ее представления в  $E_{n+1}$ .

Рассмотрим случай многих одновременных внешних воздействий. Система ограничений (3), за исключением ( $3r$ ), в данном случае принимает нелинейный характер, но справедливым остается соотношение (5). В то же время каждое из  $G_q$  характеризуется уже не одной картиной знаков, а определенной совокупностью осуществимых картин знаков усилий для всех воздействий. Так же, как и в предыдущем случае, по линейным многообразиям  $\tilde{X}_1^{k(v)} = \{X | N_j^{(v)} = 0\}$  функция  $V = V(X, \sigma = \sigma | V(X = \text{const}, \sigma) \rightarrow \min)$  будет характеризоваться разрывами, величины которых определяются выражениями (6). Таким образом, качественное отличие зада-

чи оптимизации в случае многих воздействий от предыдущего случая будет определяться только структурой и свойствами выпуклости подмножеств  $G_q$ . Для выявления их выполнено исследование нелинейных границ подмножеств  $G_q$  на выпуклость с помощью гессианов соответствующих функций. Опуская выкладки, связанные с этим исследованием, отметим, что границы подмножеств  $G_q$  носят произвольный в отношении выпуклости характер.

Выявленные свойства границ подмножеств  $G_q$ ,  $q = \overline{1, m}$  и анализ соответствующих функциональных зависимостей позволяют при  $n > 1$  сделать следующие выводы.

1. Каждое из подмножеств допустимых решений  $G_q \subset R, q = \overline{1, \eta}$  в общем случае является невыпуклым, следовательно, в пределах каждого из них задача оптимизации (2), (3) является многоэкстремальной.

2. Размерность  $m$  экстремальности задачи оптимизации в общем случае равна сумме размерностей экстремальности задач для каждого из подмножеств, т.е.

$$m = \sum_q m_q, q = \overline{1, \eta}.$$

Значения  $m$  зависят от величин параметров  $r, n, w$ , а также от того, какие из ограничений (3) являются активными.

3. При фиксированном  $X \in G_q$  система ограничений (3) становится линейной относительно  $\sigma$  и образует выпуклые подмножества  $G_q^x \subset G_q$ . Следовательно, в пределах каждого из  $G_q^x$  задача оптимизации является одноэкстремальной.

Выявленные свойства математической модели позволяют представить ее решение в виде решения последовательности выпуклых задач

$$\min \{ V(Y) \mid Y \in G \subset R, q = \overline{1, m} \} \text{ для } w=1$$

$$\text{и } \min \{ V(\sigma) \mid \sigma \in G_q^x \subset G_q \subset R, q = \overline{1, m} \} \text{ при фиксированных значениях } X \text{ для } w > 1$$

с применением эффективных методов выпуклого программирования, приспособленных к случаю линейных ограничений. Реализация этого подхода осуществлена автором при разработке практического метода поэтапной оптимизации шарнирно-стержневых систем [8]. При этом разработана методика выделения подмножества  $G^*$ , содержащего глобальный минимум задачи (2), (3).



## Л и т е р а т у р а

1. Коршун Л.И. Задача статического расчета оптимальных упругих стержневых конструкций на произвольные внешние воздействия. - "Строительство и архитектура Белоруссии", 1972, №3.
2. Мацюлявичюс Д.А. Алгоритм уточнения сечений для синтеза упругой стержневой конструкции минимального веса в случае многих нагружений. - В сб.: Строит. механика. Докл. ХУ науч.-техн. конф. Каунас. политехн. ин-та. Вильнюс, 1965.
3. Чирас А.А. Двойственность в задачах строительной механики, теории упругости и пластичности. - В кн.: Литовский механический сборник. Вильнюс, 1968, №2(3).
4. Хуберян К.М. Расчет статически неопределимых ферм по методу напряжений на нагрузку и температурные воздействия. - "Изв. ТНИСГЭИ", т. 10, 1958.
5. Коршун Л.И. Определение глобального минимума теоретического объема шарнирно-стержневых систем. 25-я науч.-техн. конф. БПИ, мат-лы секции строит. механики. Минск, 1969.
6. Коршун Л.И., Кухарчик Я.И. Программа расчета оптимальных шарнирно-стержневых систем на ЭВМ "Минск-22" с учетом условий реального проектирования. - В сб.: Краткие тез. докл. к конф. по применению ЭЦВМ в строит. механике. Секция 5. Л., 1972.
7. Радциг Ю.А. Статически неопределимые фермы наименьшего веса. Казань, 1969.
8. Коршун Л.И. Практический метод оптимизации ферм с заданным очертанием осей. - В сб.: Гидромелиорация и гидротехническое строительство. Львов, 1976, вып. 4.

УДК 624.072.001.24

И.С. Сыроквашко (канд. техн. наук)

Брестский инженерно-строительный институт

### ОПТИМИЗАЦИЯ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМ ПРИ УЧЕТЕ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ЧАСТОТУ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ И ЖЕСТКОСТЬ СИСТЕМЫ

Задача оптимизации статически определимых ферм при учете ограничений, наложенных только на упругие напряжения, тривиальна, так как внутренние усилия не зависят от площадей сечений стержней. В этом случае наилучшее решение такое, при котором в стержнях будут иметь место предельные напряжения от опасных комбинаций нагрузок. Если же определяющими при