Литература

1. Коршун Л.И. Задача статического расчета оптимальных упругих стержневых конструкций на произвольные внешние воздействия. – "Строительство и архитектура Белоруссии", 1972, №3. 2. Мацюлявичюс Д.А. Алгоритм уточнения сечений для синтеза упругой стержневой конструкции минимального веса в случае многих загружений. – В сб.: Строит. механика. Докл. ХУ науч.-техн. конф. Каунас. политехн. ин-та. Вильнюс, 1965. 3. Чирас А.А. Двойственность в задачах строительной механики, теории упругости и пластичности. – В кн.: Литовский механический сборник. Вильнюс, 1968, №2(3). 4. Хуберян К.М. Расчет статически неопределимых ферм по методу напряжений на нагрузку и температурные воздействия. – "Изв. ТНИСГЭИ", т. 10, 1958. 5. Коршун Л.И. Определение глобального минимума теоретического объема шарнирно-стержневых систем. 25-я науч.-техн. конф. БПИ, мат-лы секции строит. механики. Минск, 1969. 6. Коршун Л.И., Кухарчик Я.И. Программа расчета оптимальных шарнирно-стержневых систем на ЭВМ "Минск-22" с учетом условий реального проектирования. – В сб.: Краткие тез. докл. к конф. по применению ЭЦВМ в строит. механике. Секция 5. Л., 1972. 7. Радциг Ю.А. Статически неопределимые фермы наименьшего веса. Казань, 1969. 8. Коршун Л.И. Практический метод оптимизации ферм с заданным очертанием осей. – В сб.: Гидромелиорация и гидротехническое строительство. Львов, 1976, вып. 4.

УДК 624.072.001.24

И.С. Сырокваш ко (канд.техн.наук)

Брестский инженерно-строительный институт

ОПТИМИЗАЦИЯ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМ ПРИ УЧЕТЕ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ЧАСТОТУ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ И ЖЕСТКОСТЬ СИСТЕМЫ

Задача оптимизации статически определимых ферм при учете ограничений, наложенных только на упругие напряжения, тривиальна, так как внутренние усилия не зависят от площадей сечений стержней. В этом случае наилучшее решение такое, при котором в стержнях будут иметь место предельные напряжения от опасных комбинаций нагрузок. Если же определяющими при решении задачи будут ограничения на частоту собственных колебаний или на перемещения узлов системы, то предугадать заранее картину снижения напряжений в элементах, приводящую к минимальному увеличению объема материала, не представляется возможным. К тому же при действии на систему динамической нагрузки заранее неизвестна величина динамического коэффициента, а значит, неизвестна и полная величина нагрузки.

В настоящей работе предлагается метод расчета оптимальных по объему ферм для тех случаев, когда определяющими являются эти ограничения.

Ставится задача при заданной геометрии фермы и действующих на нее статической и изменяющей по гармоническому закону динамической нагрузках подобрать площади поперечных сечений стержней при соблюдении следующих требований: 1) теоретический объем материала стержней должен быть минимальным; 2) частота собственных колебаний системы должна быть не меньше заданной величины; 3) максимальное перемещение любого из узлов не может превосходить допускаемое значение; 4) напряжения во всех стержнях не должны превышать допустимых значений.

При решении задачи приняты следующие допущения:

а) система линейно деформируема; б) учитываются перемещения узлов в направлении приложенных нагрузок; в) форма колебаний основного тона соответствует форме статического прогиба от постоянной нагрузки; г) при выборе предельных напряжений в стержнях учтена возможность снижения величины напряжений в сжатых стержнях.

Сформулированную задачу можно представить в виде общей задачи математического программирования:

минимизировать целевую функцию

$$V = \sum_{i=1}^{n} F_i l_i \tag{1}$$

при ограничениях

$$\psi_1 = [\omega] - \omega \le 0 ; \tag{2}$$

$$\psi_s = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i \bar{N}_i l_i}{F_i} - [f_k] \le 0 ; \tag{3}$$

$$\psi_j \equiv [\, N_j^Q + \mu N_j^P \,] - F_i \, [\sigma_i] \le 0 ; \tag{4}$$

$i = 1, \ldots, n$; $s = 2, \ldots, u+1$; $j = u+2, \ldots, u+n+1$,

где n – число стержней фермы; V – объем материала; F_i, l_i – площадь поперечного сечения и длина i -го стержня; N_i – полное усилие в i –м стержне; $\bar{N}_i$ – усилие в стержне от единичной силы, приложенной в узле, перемещение которого ограничивается; N_i^Q, N_i^P – усилия в стержне от статической и амплитудного значения возмущающей нагрузки; ω – основная частота собственных колебаний системы; μ – динамический коэффициент; $[\omega]$, $[f_k]$, $[\sigma_i]$ – соответственно предельные допустимые значения основной частоты собственных колебаний, перемещения k –го узла и напряжения в i –м стержне.

Так как площади поперечных сечений стержней являются переменными параметрами и заранее неизвестны, то для определения частоты собственных колебаний системы с К степенями свободы точным способом пришлось бы раскрывать в общем виде детерминант К–го порядка, что практически при К > > 2 представляет задачу трудноразрешимую. В данной работе основная частота определяется по приближенной формуле Граммеля [1]

$$\omega^2 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} m_j y_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\tilde{N}_i^2 l_i}{E F_i}}, \tag{5}$$

где m_j и y_j – масса и перемещение j –го узла от статической нагрузки; $\tilde{N}_i$ – усилие в j –м стержне, вызванное условной нагрузкой в узлах my.

Для решения поставленной задачи оказывается эффективным один из методов нелинейного программирования – метод возможных направлений [2].

Предлагается следующий алгоритм расчета.

1. Нахождение опорного решения.

Принимаются произвольные значения неизвестных площадей сечений стержней $F^A = (F_1^A, \dots, F_n^A)$, заведомо удовлетворяющие любому из ограничивающих неравенств. Для ускорения сходимости рекомендуется принимать значения площадей сечений пропорционально статическим усилиям в стержнях.

Исходя из значений частоты колебаний возмущающей нагрузки и предельной частоты собственных колебаний определяется значение динамического коэффициента. Далее из точки F^A осуществляется спуск на границу допустимой области в направлении антиградиента целевой функции до встречи с ближайшей ограничивающей поверхностью в точке $F^O = F^A - \nabla A_t$, где ∇^A_i – градиент целевой функции в точке A; t – наименьший положительный корень уравнений

$$\varphi_j(F^A_i - \nabla^A_i t_j) = 0; \quad i=1,\ldots,n; \quad j=1,\ldots,m;$$

m – число ограничивающих неравенств.

В полученной точке определяется значение целевой функции.

2. Отыскание направления нового спуска.

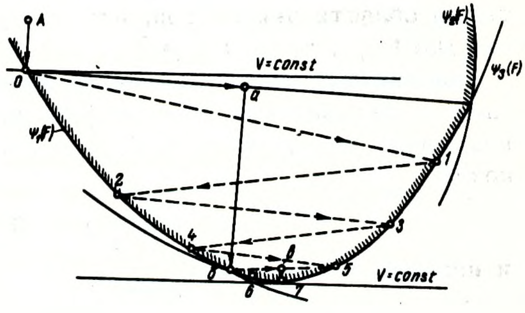
Прежде всего нужно установить, которому из ограничивающих неравенств с заданной точностью δ удовлетворяет точка F^O. Пусть оказалось, что $-\delta \leq \varphi_k(F^O) \leq \delta$.

Для определения направления спуска решается задача линейного программирования: минимизировать форму $u = \eta$ (6) при ограничениях

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial F_1} r^o_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_k}{\partial F_n} r^o_n - \beta\eta \leq 0; \tag{7}$$

$$\frac{\partial V}{\partial F_1} r^o_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial F_n} r^o_n - \eta \leq 0; \tag{8}$$

$$| r^o_i | \leq 1 . \tag{9}$$



Коэффициент β играет роль "отталкивающего" фактора. При значении $\beta = 0$ вектор искомого направления будет совпадать с касательной к активной в данной точке ограничивающей поверхности. При больших значениях $\beta \gg 1$ вектор направления будет стремиться к касательной поверхности уровня целевой функции в данной точке. В работах по обоснованию и применению метода возможных направлений [2], [3] принимается значение $\beta = 1$. В этом случае процесс спуска к оптимальной точке осуществляется по схеме 0 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 (рис. 1). В настоящей работе предлагается осуществлять спуск по схеме 0 – а – б – в – 7. Такая схема особенно эффективна при пологих ограничивающих поверхностях, какими являются поверхности, описываемые частотными уравнениями. Проведенные исследования показали, что скорость сходимости метода при этом возрастает в 2 – 5 раз. Для осуществления решения по такой схеме необходимо, чтобы выбираемое направление спуска из допускаемой точки приближалось к касательной поверхности уровня целевой функции в данной точке. Как показали расчеты, уже при $\beta \gg 50$ вектор направления спуска изменяется незначительно с изменением коэффициента β.

Решение задачи (6) – (9) определяют компоненты искомого вектора $r^o = (r_1^o, \ldots r_n^o)$.

3. Определение шага спуска.

Решением уравнений $\psi_j(F_i^o + r_i^o t) = 0$ определяются расстояния от точки F^o вдоль полученного направления до всех ограничивающих поверхностей. Из них следует выбрать наименьшее положительное значение $t = t_{j\,min}$, соответствующее шагу до ближайшей ограничивающей поверхности. Следующая точка принимается на полученном луче внутри допустимой области. В связи с тем что характер границы допустимой области неизвестен, эту точку можно взять на расстоянии 0,5 t, т.е. $F^a = F^o + r^o 0{,}5t$.

Дальнейшее передвижение из точки F^a осуществляется вдоль антиградиента целевой функции в данной точке до границы допустимой области. Для этого определяются корни уравнений

$$\psi_j(F_i^a - \nabla_i^a t_j) = 0$$

и находится шаг $t = t_{j\,min}$.

В полученной точке $F^б$ вычисляется значение основной частоты собственных колебаний и уточняется динамический коэффициент.

Если разность между значениями целевой функции в двух соседних точках не превышает заданной точности, то на этом процесс оптимизации заканчивается. В противном случае весь расчет, начиная с п. 2, повторяется.

Описанный алгоритм включает в себя ряд однотипных операций, использует метод линейного программирования, для которого разработаны надежные стандартные программы, и эффективен при применении ЭВМ.

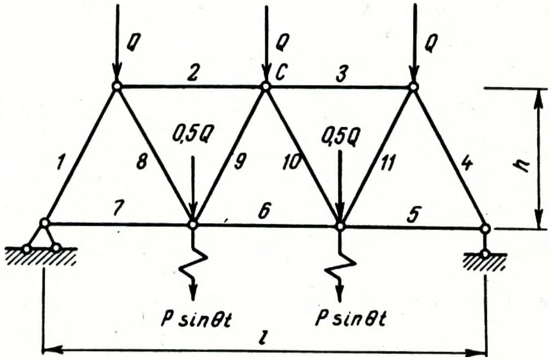


Рис. 2.

Пример 1. Рассчитать ферму (рис. 2) наименьшего объема при следующих исходных данных: $l = 9$ м; $h = 3{,}15$ м; расчетное сопротивление стали $R = 2100$ кгс/см^2 : модуль упругости $E = 2 \cdot 10^6$ кгс/см^2; $P = 5$ тс; частота возмущающей нагрузки $\theta = 32$ с$^{-1}$; $Q = 10$ тс ; $[\omega] = 40$ с$^{-1}$; $[f_c] = 0{,}8$ см.

В результате решения задачи по предлагаемому алгоритму на ЭВМ "Минск-22" получены следующие данные: площади сечений стержней $F^* = (49{,}915;\ 38{,}04;\ 38{,}04;\ 49{,}915;\ 21{,}43;50{,}29;\ 21{,}43;\ 38{,}93;\ 21{,}68;\ 21{,}68;\ 38{,}93)$ см^2; прогиб $f_c = 0{,}8$ см; частота собственных колебаний $\omega = 45{,}5$ с$^{-1}$; объем материала $V = 127880$ см^3. Напряжения в стержнях $\sigma = (-1120;\ -1015;\ -1015;\ -1120;\ -1120;\ 855;\ 1120;\ 860;\ -1010;\ -1010;\ 860)$ кгс/см^2.

Активным в данном случае явилось ограничение на перемещение узла С. Для сравнения приведем равнонапряженное решение, соответствующее всем условиям задачи.

$F = (65{,}7;\ 43{,}2;\ 43{,}2;\ 62{,}7;\ 26{,}9;\ 48{,}16;\ 26{,}9;\ 37{,}65;\ 12{,}55;\ 12{,}55;\ 37{,}65)$ см^2; прогиб $f_c = 0{,}8$ см; $\omega = 46{,}04$ с$^{-1}$; $V = 136240$ см^3. Величина напряжений во всех стержнях фермы $\sigma = 1120$ кгс/см^2. Разница в объемах материала составляет 6,5%.

Пример 2. Рассчитать эту же ферму при предельном прогибе для узла С $[f_c] = 1$ см и предельной частоте собственных колебаний $[\omega] = 45$ с$^{-1}$.

Оптимальному решению соответствуют площади стержней $F^* = (59,98;\ 38,75;\ 38,75;\ 59,98;\ 25,82;\ 45,21;\ 25,82;\ 30,12;\ 15,06;\ 15,06;\ 30,12)$ см^2.

Частота собственных колебаний $\omega = 45\ c^{-1}$; вертикальное перемещение узла $C_з\ f_c = 0,836$ см. Объем материала стержней $V = 125650$ см^3.

Характерной особенностью данного решения является то, что напряжения во всех стержнях от статической нагрузки равны между собой и равны $\sigma = 740$ кгс/см^2.

Резюме. Предлагаемый алгоритм оптимизации при активном ограничении на жесткость системы позволяет добиться снижения материалоемкости конструкций по сравнению с равнонапряженным решением. Проведенные исследования ряда примеров показывают, что при активном ограничении на частоту собственных колебаний оптимальные площади сечений стержней пропорциональны возникающим в них усилиям от статической нагрузки.

Литература

1. Бицено К., Граммель Р. Техническая динамика, т. 1. М., 1950. 2. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. М., 1963. 3. Силаков В.П. Расчет статически неопределимых ферм с обеспечением наименьшего объема методом наискорейшего спуска. – "Изв. вузов. Строительство и архитектура", 1971, № 12.

УДК 624.072

А.А. Борисевич (канд.техн.наук)
Белорусский политехнический институт

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА К ЗАДАЧАМ ОПТИМИЗАЦИИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ СО СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

В общей постановке задача нелинейного программирования (НП) включает ограничения (линейные и нелинейные) в виде равенств и нестрогих неравенств ($\geq$, $\leq$). Принципиально всегда можно свести систему ограничений или только к уравнениям, или только к неравенствам. Первое достигается введением дополнительных неизвестных в каждое неравенство [1, 2]. При наличии ограничений только в виде уравнений по-