

Министерство образования Республики Беларусь  
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

---

А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

*Допущено Министерством образования  
Республики Беларусь в качестве учебного пособия  
для студентов учреждений, обеспечивающих  
получение высшего образования  
по строительным специальностям*

Минск 2009

УДК 624.04(75.8)  
ББК 38.112я73  
Б82

Рецензенты:

кафедра «Строительные конструкции, здания и сооружения»  
Белорусско-Российского университета,  
заведующий кафедрой д-р техн. наук, профессор *С.Д. Семенюк*;  
доцент кафедры «Строительная механика»  
Белорусского государственного университета транспорта,  
д-р физ.-мат. наук *А.В. Яровая*

**Борисевич, А.А.**  
Б82 Строительная механика: учебное пособие для вузов / А.А. Борисевич,  
Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Минск: БНТУ, 2009. – 756 с.

ISBN 978-985-479-820-2

Рассмотрены основные положения расчета статически определенных и статически неопределимых стержневых систем на статические и динамические нагрузки и воздействия, изложены вопросы расчета упругих систем на устойчивость в деформированном состоянии, даны основы нелинейного расчета стержневых систем по деформированной схеме. Приведены примеры расчета.

УДК 624.04(75.8)  
ББК 38.112я73

ISBN 978-985-479-820-2

©А.А. Борисевич,  
Е.М. Сидорович  
В.И. Игнатюк, 2009  
© БНТУ, 2009

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие по строительной механике предназначено для студентов строительных специальностей высших учебных заведений. Оно соответствует учебной программе, по которой ведется подготовка инженеров-строителей специальности «Промышленное и гражданское строительство». Содержание предлагаемого изучению материала рассчитано на курс лекционных и практических занятий примерно 180–200 учебных часов.

В методическом отношении учебное пособие воспроизводит в значительно переработанном и дополненном виде содержание лекционных и практических занятий, проводившихся авторами в течение ряда лет со студентами Белорусского национального технического университета и Брестского государственного технического университета.

Наряду с изложением традиционных методов расчета, в пособии много внимания уделяется изучению подходов к автоматизации расчета и получению достоверных результатов.

Затронутые в книге вопросы могут представлять интерес для лиц, работающих в области приложений строительной механики к разработке проектно-вычислительных комплексов. Поэтому удельный вес отдельных глав несколько увеличен по сравнению с традиционным представлением об их содержании, и изложение сделано, по возможности, доступным для широкого круга читателей.

Не останавливаясь здесь на содержании учебного пособия, представление о котором можно получить по оглавлению, отметим, что:

предисловие, глава 1 раздел 1.7, главы 2, 7–11, 15, 16 написаны проф., д-ром техн. наук А.А. Борисевичем;

главы 1 (кроме раздела 1.7), 12, 13, 18–25 написаны проф., д-ром техн. наук Е.М. Сидоровичем;

главы 3–6, 14, 17 написаны доц., канд. техн. наук В.И. Игнатуком.

Замечания о недостатках учебного пособия авторами будут приняты с благодарностью.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Строительная механика. Стержневые системы: учебник для вузов / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
2. Александров, А.В. Строительная механика. Тонкостенные и пространственные системы: учебник для вузов / А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников; под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1983. – 488 с.
3. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: учебник для вузов / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.
4. Дарков, А.В. Строительная механика: учебник для строит. спец. вузов / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – М.: Высшая школа, 1986. – 607 с.
5. Киселев, В.А. Строительная механика: учебник для вузов / В.А. Киселев. – М.: Стройиздат, 1976. – 511 с.
6. Киселев, В.А. Строительная механика. Специальный курс (динамика и устойчивость сооружений) / В.А. Киселев. – М.: Стройиздат, 1969. – 432 с.
7. Леонтьев, Н.Н. Основы строительной механики стержневых систем: учебник / Н.Н. Леонтьев, Д.Н. Соболев, А.А. Амосов. – М.: Изд-во АСВ, 1996. – 541 с.
8. Строительная механика: учебник для вузов / Ю.И. Бутенко [и др.]. – Киев: Высшая школа, 1989. – 479 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	3
Глава 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ПОНЯТИЯ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ .....	4
1.1. Задачи и методы строительной механики .....	4
1.2. Понятие о расчетной схеме сооружения и ее элементах ..	6
1.3. Классификация сооружений. ....	13
1.4. Степень свободы плоской стержневой системы .....	20
1.5. Принципы образования геометрически неизменяемых систем .....	31
1.6. Матрицы в задачах строительной механики .....	37
1.7. Краткий исторический очерк развития строительной механики .....	40
Глава 2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ И МЕТОДЫ ИХ РАСЧЕТА ПРИ НЕПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКЕ ....	46
2.1. Понятие о статически определимых системах. Их основные свойства .....	46
2.2. Метод сечений .....	47
2.3. Метод замены связей .....	55
2.4. Кинематический метод .....	60
Глава 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ ОТ ПОДВИЖНЫХ НАГРУЗОК .....	64
3.1. Понятие о подвижной нагрузке и особенностях расчета на ее действие .....	64
3.2. Статический метод построения линий влияния усилий в простых балках .....	65
3.3. Кинематический метод построения линий влияния усилий ..	74
3.4. Определение усилий по линиям влияния от неподвижных нагрузок .....	77
3.5. Линии влияния усилий при узловой передаче нагрузки ....	83
3.6. Определение наиболее невыгодного положения подвижных нагрузок по линиям влияния .....	85
3.7. Понятие об огибающих эпюрах .....	91

Глава 4. РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРОК И РАМ .....	95
4.1. Общие сведения и принципы образования .....	95
4.2. Расчет трехшарнирных арок .....	97
4.3. Линии влияния усилий в трехшарнирных арках .....	104
4.4. Рациональное очертание оси арки .....	108
4.5. Расчет трехшарнирных арок с надарочным строением ...	110
4.6. Расчет трехшарнирных рам .....	112
4.7. Расчет составных рам .....	118
Глава 5. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМ .....	123
5.1. Понятие о фермах, их классификация, анализ структуры .....	123
5.2. Определение усилий в стержнях ферм от неподвижных нагрузок .....	129
5.3. Определение усилий с использованием метода замены связей .....	134
5.4. Особенности определения усилий в стержнях шпренгельных ферм .....	136
5.5. Построение линий влияния усилий в фермах .....	144
5.5.1. Построение линий влияния усилий в балочных фермах .....	144
5.5.2. Построение линий влияния усилий в консольных фермах .....	151
5.5.3. Построение линий влияния усилий в шпренгельных фермах .....	156
Глава 6. РАСЧЕТ РАСПОРНЫХ ФЕРМ И КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ .....	166
6.1. Расчет распорных ферм .....	166
6.2. Расчет комбинированных систем .....	169
Глава 7. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ .....	176
7.1. Общие сведения о перемещениях стержневых систем ...	176
7.2. Работа внешних статически приложенных сил .....	177
7.3. Работа внутренних сил плоской линейно-упругой стержневой системы .....	180

7.4. Применение принципа возможных перемещений к упругим системам .....	184
7.5. Теоремы о взаимности работ и взаимности перемещений ..	186
7.6. Общая формула для определения перемещений плоской стержневой системы .....	191
7.7. Способы вычисления интегралов Мора .....	196
7.8. Определение перемещений от тепловых воздействий ....	210
7.9. Определение перемещений, вызываемых перемещениями опор .....	213
7.10. Матричная форма определения перемещений .....	214
7.11. Линии влияния перемещений .....	220
7.12. Матрица влияния перемещений .....	222
Глава 8. МЕТОД СИЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РАСЧЕТУ ПЛОСКИХ РАМ .....	225
8.1. Статически неопределимые системы и их свойства .....	225
8.2. Определение степени статической неопределимости. ....	228
8.3. Основная система и основные неизвестные .....	232
8.4. Канонические уравнения метода сил .....	233
8.5. Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. ....	236
8.6. Построение окончательных эпюр усилий .....	238
8.7. Алгоритм расчета. Проверки расчета .....	240
8.8. Понятие о рациональной основной системе и способы ее выбора. ....	249
8.9. Определение перемещений в статически неопределимых системах .....	254
8.10. Расчет рам на действие температуры и смещение опор. ....	258
8.11. Линии влияния усилий .....	265
Глава 9. МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РАСЧЕТУ ПЛОСКИХ РАМ .....	272
9.1. Степень кинематической неопределимости. Основные неизвестные .....	272
9.2. Основная система .....	275
9.3. Канонические уравнения .....	288
9.4. Статический способ определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений .....	290

9.5. Кинематический способ определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений . . . . .	293
9.6. Построение и проверки эпюр $M, Q, N$ в заданной системе от внешней нагрузки . . . . .	299
9.7. Расчет рам с наклонными элементами . . . . .	304
9.8. Использование симметрии системы . . . . .	309
9.9. Расчет рам на тепловое воздействие . . . . .	314
9.10. Расчет рам на смещение опор . . . . .	320
9.11. Построение линий влияния усилий. . . . .	323
9.12. Расчет рам с учетом продольных деформаций стержней . . . . .	330
Глава 10. СОВМЕСТНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СИЛ И МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. СМЕШАННЫЙ МЕТОД. . . . .	333
10.1. Сопоставление метода сил и метода перемещений. . . . .	333
10.2. Совместное использование метода сил и метода перемещений . . . . .	334
10.3. Смешанный метод . . . . .	339
Глава 11. РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК. . . . .	344
11.1. Общие сведения . . . . .	344
11.2. Примеры расчета неразрезной балки . . . . .	344
11.3. Построение линий влияния усилий. . . . .	357
11.4. Огибающие эпюры усилий. . . . .	359
11.5. Расчет неразрезных балок на упругих опорах. . . . .	361
Глава 12. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМ . . . . .	364
12.1. Виды статически неопределимых ферм. . . . .	364
12.2. Особенности расчета статически неопределимых ферм . . . . .	365
12.3. Построение линий влияния усилий. . . . .	367
Глава 13. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ АРОК, ВИСЯЧИХ И КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ. . . . .	370
13.1. Виды статически неопределимых арок . . . . .	370
13.2. Расчет двухшарнирной арки с затяжкой. . . . .	371
13.3. Влияние податливости затяжки на усилие в затяжке . . . . .	375

13.4. Особенности расчета бесшарнирной арки . . . . .	377
13.5. Применение метода перемещений к расчету статически неопределимых арок . . . . .	381
13.6. Понятие о расчете комбинированных и висячих систем . . . . .	382
<b>Глава 14. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИСТЕМ . . . . .</b>	
14.1. Виды пространственных систем. . . . .	386
14.2. Опоры пространственных стержневых систем. Кинематический анализ. . . . .	387
14.3. Определение усилий и перемещений в статически определимых пространственных рамах. . . . .	392
14.4. Расчет пространственных ферм . . . . .	396
14.5. Особенности расчета статически неопределимых пространственных систем . . . . .	401
<b>Глава 15. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ . . . . .</b>	
15.1. Понятие о дискретной физической модели . . . . .	404
15.2. Нагрузки и перемещения . . . . .	406
15.3. Усилия и деформации . . . . .	408
15.4. Уравнения равновесия . . . . .	410
15.5. Геометрические уравнения. . . . .	412
15.6. Принцип двойственности . . . . .	415
15.7. Физические уравнения. . . . .	416
15.8. Особенности расчета системы на изменение температуры, осадку опор и неточность изготовления стержней . . . . .	418
15.9. Общие уравнения для расчета стержневой системы. Смешанный метод. . . . .	420
15.10. Метод перемещений. . . . .	421
15.11. Метод сил. . . . .	427
15.12. Статически определимые системы . . . . .	433
15.13. Основные уравнения строительной механики для стержня . . . . .	434
15.14. Формирование матрицы равновесия и матрицы внутренней жесткости для стержневой системы. . . . .	444
15.15. Матрицы влияния перемещений и усилий. . . . .	450

15.16. Пространственные фермы .....	454
15.17. Пространственные рамы .....	458

## Глава 16. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ.

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ .....	473
16.1. Потенциальное силовое поле. Потенциальная энергия ...	473
16.2. Потенциальная энергия деформации упругой системы ...	476
16.3. Выражение потенциальной энергии деформации через квадратичные формы обобщенных перемещений и обобщенных сил. Производные от выражений потенциальной энергии .....	479
16.4. Полная энергия деформируемой системы .....	482
16.5. Принцип вариации перемещений .....	485
16.6. Способы решения вариационных задач .....	489
16.7. Расчет упругих систем на основе принципа вариации перемещений .....	492
16.8. Принцип вариации напряжений или внутренних сил ...	496
16.9. Применение принципа вариации внутренних сил к расчету упругих систем .....	498
16.10. Сущность метода конечных элементов .....	500
16.11. Матрица жесткости стержня в местной системе координат .....	503
16.12. Матрица жесткости стержня в общей системе координат .....	516
16.13. Формирование матрицы жесткости всей системы .....	518
16.14. Матрица жесткости прямоугольного конечного элемента для расчета тонких плит .....	523
16.15. Общие замечания о методе конечных элементов .....	536

## Глава 17. ОСНОВЫ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПО НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ .....

17.1. Общие понятия .....	537
17.2. Предельное состояние сжато-растянутого элемента по нормальному сечению .....	538
17.3. Предельное состояние изгибаемого элемента по нормальному сечению .....	539
17.4. Предельное состояние систем и методы расчета .....	544

17.5. Расчет стержневых систем по несущей способности . . . .	547
Глава 18. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДИНАМИКИ СООРУЖЕНИЙ . . . . .	556
18.1. Динамические нагрузки и их классификация . . . . .	556
18.2. Силы инерции и степень свободы деформируемой системы . . . . .	559
18.3. Силы сопротивления движению . . . . .	566
18.4. Виды колебаний . . . . .	567
18.5. Задачи и методы динамики сооружений . . . . .	569
Глава 19. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ . . . . .	571
19.1. Дифференциальное уравнение движения . . . . .	571
19.2. Свободные колебания . . . . .	574
19.3. Общий случай действия возмущающей нагрузки . . . . .	580
19.4. Действие внезапно приложенной нагрузки . . . . .	581
19.5. Действие гармонической нагрузки . . . . .	582
19.6. Резонанс и его развитие во времени . . . . .	585
19.7. Свободные колебания с учетом сил сопротивления . . . . .	586
19.8. Вынужденные колебания с учетом сил сопротивления . . . . .	594
19.9. Кинематическое возбуждение колебаний . . . . .	597
Глава 20. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ . . . . .	600
20.1. Дифференциальные уравнения движения в общем виде . . . . .	600
20.2. Свободные незатухающие колебания . . . . .	604
20.3. Действие вибрационной нагрузки при отсутствии сил сопротивления . . . . .	619
20.4. Действие вибрационной нагрузки при учете сил сопротивления . . . . .	627
20.5. Решение уравнений движения в общем случае методом разложения по собственным формам . . . . .	631
Глава 21. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ . . . . .	635
21.1. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня с распределенной массой . . . . .	635

21.2. Свободные колебания. Балочные функции . . . . .	637
21.3. Вынужденные колебания при вибрационной нагрузке . . . . .	642
Глава 22. ПРИБЛИЖЕННЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ДИНАМИКЕ СООРУЖЕНИЙ . . . . .	648
22.1. Приближенные методы определения частот собственных колебаний . . . . .	648
22.2. Замена распределенных масс сосредоточенными . . . . .	653
22.3. Специальные численные методы решения частичной проблемы собственных колебаний . . . . .	654
22.4. Применение метода степенных рядов для прямого интегрирования дифференциальных уравнений движения . . . . .	666
Глава 23. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ . . . . .	669
23.1. Понятие о равновесии в деформированном состоянии. Устойчивые и неустойчивые состояния равновесия. . . . .	669
23.2. Статический метод исследования устойчивости . . . . .	678
23.3. Критическое равновесие . . . . .	685
23.4. Динамический метод исследования устойчивости . . . . .	688
23.5. Критерии устойчивости равновесия . . . . .	691
23.6. Энергетический метод исследования устойчивости . . . . .	692
23.7. Качественный метод исследования устойчивости . . . . .	693
Глава 24. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМЫХ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА НЕДЕФОРМИРУЕМЫХ ОПОРАХ . . . . .	695
24.1. Дифференциальное уравнение изгиба сжатого стержня . . . . .	695
24.2. Учет опорных закреплений сжатых стержней . . . . .	697
24.3. Особые случаи исследования устойчивости сжатых стержней . . . . .	703
Глава 25. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ . . . . .	705
25.1. Основные допущения и сущность метода перемещений . . . . .	705
25.2. Особенности дискретизации деформируемых систем при автоматизированном расчете на устойчивость методом перемещений . . . . .	716
25.3. Матрица внутренней жесткости сжатого стержня . . . . .	723
25.4. Матрица внутренней жесткости растянутого стержня . . . . .	737

25.5. Матрица внешней жесткости сжатого стержня как конечного элемента. ....	739
25.6. Понятие о расчете сооружений по деформированному состоянию .....	743
Литература .....	747

Учебное издание

БОРИСЕВИЧ Арсений Александрович  
СИДОРОВИЧ Евгений Мечиславович  
ИГНАТЮК Валерий Иванович

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Технический редактор И.Н. Зюзикова  
Компьютерная верстка: О.В. Дубовик, И.Н. Зюзикова

---

Подписано в печать . . . 2009.

Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 43,94. Уч.-изд. л. 25,28. Тираж 500. Заказ . . .

---

Издатель и полиграфическое исполнение:

Белорусский национальный технический университет.

ЛИ № 02330/0131627 от 01.04.2004.

220013, Минск, проспект Независимости, 65.