УДК 517.9

А. И. ЖУК, Е. Н. ЗАЩУК
УО «Брестский государственный технический университет» (г. Брест, Беларусь)

МНОГОМЕРНЫЕ АВТОНОМНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T=[0;a]\subset R$:

$$\dot{x}^i(t)=\sum_{j=1}^{q} f^{ij}(x(t))\dot{L}^j(t),\quad i=\overline{1,p}, \tag{1}$$

где $x(0)=x_0$ и f^{ij} – функции, удовлетворяющие условию линейного роста, $L^j(t)$ – функции ограниченной вариации на отрезке T. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^j(t)$ непрерывны справа. Решения уравнения (1) в случае непрерывных функций $L^j(t)$ получены в [1].

Рассмотрим расширенную прямую $\widetilde{\Re}$ и выделим на множестве $\widetilde{\Re}$ подмножества

$$H=\{\widetilde{h}\in\widetilde{R}:\widetilde{h}=[(h_n)],h_n>0,\forall n\in N,\lim_{n\to\infty}h_n=0\},$$

$$I=\{\widetilde{h}\in H:1/n=o(h_n),\,n\to\infty,\,h_n\to 0,\forall(h_n)\in\widetilde{h}\}.$$

Множество всех новых обобщенных функций обозначим $\Im(\Re)$. Будем говорить, что новая обобщенная функция $\widetilde{f}=[\{f_n\}]$ ассоциирует обычную функцию или обобщенную функцию f, если f_n сходится к f в некотором топологическом пространстве.

Пусть $\widetilde{f}=[\{f_n\}]$ и $\widetilde{g}=[\{g_n\}]$ являются обобщенными функциями, тогда $\widetilde{f}\circ\widetilde{g}=[\{f_n(g_n)\}]\in\Im(\Re)$. Аналогично мы можем определить значение новой обобщенной функции $\widetilde{f}$ в обобщенной вещественной точке $\widetilde{x}=[\{x_n\}]\in\widetilde{\Re}$ $\widetilde{f}(\widetilde{x})=[\{f_n(x_n)\}]$.

Для каждого $\widetilde{h}=[\{h_n\}]\in H$ и $\widetilde{f}=[\{f_n(x)\}]\in\Im(\Re)$ определим обобщенный дифференциал $d_{\widetilde{h}}\widetilde{f}=[(f_n(x+h_n)-f_n(x))]$.

Обобщенный дифференциал $d_{\widetilde{h}}$ назовем I – обобщенным дифференциалом и будем обозначать $d^I_{\widetilde{h}}$, если $\widetilde{h}\in I$. Будем говорить, что $\widetilde{f}=[(f_n)]$ ассоциирует элемент f из топологического пространства Ω, если последовательность $\{f_n\}$ при $n\to\infty$ сходится к f в топологии Ω.

Введенные понятия позволяют исследовать дифференциальные уравнения, в том числе и некорректные, с помощью соответствующих уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных функций.

Заменяя обычные функции, присутствующие в (1), на соответствующие им новые обобщенные функции получим запись уравнения в дифференциалах в алгебре новых обобщенных функций (см., [2])

$$d_{\widetilde{h}}\widetilde{x}^i(\widetilde{t}) = \sum_{j=1}^{q} \widetilde{f}^{ij}(\widetilde{t}, \widetilde{x}(\widetilde{t}))d_{\widetilde{h}}\widetilde{L}^j(\widetilde{t}), \ i = \overline{1,p} \tag{2}$$

с начальным условием $\widetilde{x}\big|_{[0,\widetilde{h})} = \widetilde{x}^0$, где обобщенные функции $\widetilde{f}^{ij}$, $\widetilde{L}^j$ ассоциируют функции f^{ij} и L^j соответственно.

Наряду с задачей (2) с начальным условием $\widetilde{x}\big|_{[0,\widetilde{h}]} = \widetilde{x}^0$ рассмотрим систему уравнений с $I-$обобщенным дифференциалом:

$$d^I_{\widetilde{h}}\widetilde{x}^i(\widetilde{t}) = \sum_{j=1}^{q} \widetilde{f}^{ij}(\widetilde{x}(\widetilde{t}))d^I_{\widetilde{h}}\widetilde{L}^j(\widetilde{t}) \ \ i = \overline{1,p} \tag{3}$$

Будем говорить, что функция x является $I-$ассоциированным решением уравнения (2), если данная функция является ассоциированным решением задачи (3). В работе [3] получены $I-$ассоциированные решения уравнения (2) в пространстве $L^1(T)$, а смешанный случай рассмотрен в [4].

Заменим в (3) каждую новую обобщенную функцию представителем класса ее определяющего, получим запись (3) на уровне представителей

$$x^i_n(t+h_n) - x^i_n(t) = \sum_{j=1}^{q} f^{ij}_n(x_n(t))[L^j_n(t+h_n) - L^j_n(t)], \ i = \overline{1,p} \tag{4}$$

где $x_n(t)\big|_{[0,h_n)} = x_{n0}(t)$. Для описания предельного поведения задачи (4) рассмотрим систему

$$x^i(t) = x^i_0 + \sum_{j=1}^{q}\int_0^{t+} f^{ij}(x(s-))dL^j(s), \ i = \overline{1,p} \tag{5}$$

Теорема 1. Пусть f^{ij} $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ удовлетворяют условию линейного роста и ограничены. $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ так, что $\frac{1}{n} = o(h_n)$ решение $x_n(t)$ задачи Коши (4) сходится к решению системы уравнений (5) в пространстве $L^p(T)$, если $\left|x_{n0}(\tau_t) - x_0\right| \to 0$ в этом пространстве.

Теорема 2. Пусть f^{ij} $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ удовлетворяют условию линейного роста и ограничены. $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$ – непрерывные справа функций ограниченной вариации. Тогда I-ассоциированное решение задачи Коши (3) является решением системы уравнений (5) в $L^p(T)$, если $\left|x_{n0}(\tau_t) - x_0\right| \to 0$ в пространстве $L^p(T)$.

Аналогичные теоремы в других пространствах и с другими условиями для функций f^{ij} $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ были рассмотрены в работах [5, 6, 7, 8].

Список использованных источников

1. Жук, А. И. Системы дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных функций / А. И. Жук, О. Л. Яблонский // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. – № 1. – С. 12–16.

2. Лазакович, Н. В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н. В. Лазакович // Докл. НАН Беларуси. – 1994. – Т. 38, № 5. – С. 23–27.

3. Жук, А. И. Оценки скорости сходимости к ассоциированным решениям дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций / А. И. Жук, О. Л. Яблонский // Докл. НАН Беларуси. – 2015. – Т. 59. – № 2. – С. 17–22.

4. Жук, А. И. Ассоциированные решения многомерных неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами / А. И. Жук // Вестник Брестского государственного технического университета. Сер. Физика, математика, информатика. – 2015. – № 5 (95). – С. 64–66.

5. Жук, А. И. Ассоциированные решения системы неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами. Смешанный случай / А. И. Жук, О. Л. Яблонский, С. А. Спасков // Весці БДПУ. Сер. 3, Фізіка, матэматыка, інфарматыка, біялогія, геаграфія. – 2019. – № 4. – С. 16–22.

6. Zhuk, A. I. On associated solution of the system of non-autonomous differential equations in the Lebesgue spaces / A. I. Zhuk, H. N. Zashchuk // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. – 2022. – № 1. – P. 6–13.

7. Жук, А. И. Неавтономные системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных функций / А. И. Жук, О. Л. Яблонский // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 6. – С. 20–23.

8. Жук, А. И. Системы квазидифференциальных уравнений в прямом произведении алгебр мнемофункций. Симметрический случай / А. И. Жук, А. К. Хмызов // Вестник Белорусского государственного университета. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2010. – № 2. – С. 87–93.