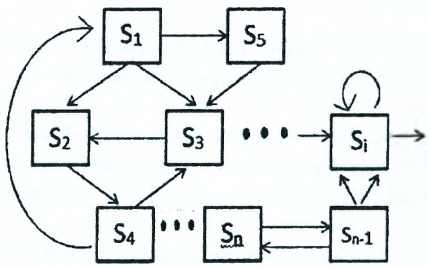
УДК 519.2

В.В. ШВАЙКО, И.Н. МЕЛЬНИКОВА
Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ С ДИСКРЕТНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ

Пусть имеется система S с дискретными состояниями $s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n$. Предположим, что случайные переходы системы из состояния в состояние могут происходить только в определённые моменты времени $t_0, t_1, t_2, \ldots$ Эти моменты мы будем называть шагами процесса; $t_0 = 0$ – его началом. Сам процесс представляет собой случайное блуждание системы S по состояниям. После первого шага система может оказаться в одном (и только одном) из своих возможных состояний: $s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, \ldots, s_i^{(1)}, \ldots, s_n^{(1)}$; на втором шаге – $s_1^{(2)}, s_2^{(2)}, \ldots, s_i^{(2)}, \ldots, s_n^{(2)}$; на k-м шаге – $s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, \ldots, s_i^{(k)}, \ldots, s_n^{(k)}$ (число состояний в общем случае может быть бесконечным, но счётным; с такими примерами мы встретимся в дальнейшем. Здесь же для простоты ограничимся конечным числом n состояний).

Предположим, что граф состояний системы S имеет вид, представленный на рисунок. Процесс блуждания системы S по состояниям можно представить как последовательность или «цепь» событий, состоящих в том, что в начальный момент $t_0 = 0$ система находится в одном из состояний (например, в состоянии $s_1^{(0)}$); в момент первого шага перешла из него скачком в состояние $s_5^{(1)}$, из которого на втором шаге перешла в $s_3^{(2)}$, на третьем шаге перешла в $s_2^{(3)}$ и т.д. «Траектория» системы, блуждающей по состояниям s_1, s_5, s_3, s_2, показана на рисунке жирными линиями. На каких-то шагах система может задерживаться в том или другом из своих состояний $s_i^{(k)} = s_i^{(k+1)}$ (это показано «возвратной стрелкой» на рисунке) или же вернуться в него после ряда шагов. «Траектория» блуждания системы по графу состояний, изображённая на рисунке жирными линиями, представляет собой не что иное, как реализацию случайного процесса, полученную в результате одного опыта. При повторении опыта, естественно, реализации в общем случае не совпадают.



Рисунок

Рассмотрим следующий процесс: система представляет собой техническое устройство (ТУ), которое осматривается в определённые моменты времени (скажем, через сутки), и её состояние регистрируется в отчётной ведомости. Каждый осмотр с регистрацией представляет собой «шаг» процесса. Возможные состояния ТУ следующие: s_1 – полностью исправно; s_2 – частично неисправно, требует наладки; s_3 – обнаружена серьёзная неисправность, требует ремонта; s_4 – признано непригодным, списано. Допустим, что как наладка, так и ремонт продолжаются менее суток и после их выполнения ТУ возвращается в состояние s_1 (полностью исправно) или списывается.

Реализация случайного процесса блуждания системы по состояниям может иметь, например, такой вид: $s_1^{(0)}$, $s_1^{(1)}$, $s_2^{(2)}$, $s_1^{(3)}$, $s_3^{(4)}$, $s_1^{(5)}$, $s_4^{(6)}$, что означает, что ТУ в начальный момент исправно; при первом осмотре – также исправно; при втором – частично исправно, требует наладки; при третьем исправно; при четвёртом – обнаружена серьёзная неисправность, требует ремонта; при пятом – снова исправно; при шестом – признано неисправным, списано (дальнейшее развитие процесса невозможно, так как он дошёл до поглощающего состояния s_4).

Рассмотрим общим случай. Пусть происходит случайный процесс в системе S с дискретными состояниями $s_1, s_2, ..., s_i, ..., s_n$, которые принимаются в последовательности шагов с номерами 0,1,2,…,k,…

Случайный процесс представляет собой последовательность событий вида $\{S\ (k) = s_i\}$ $(i = 1, 2, ..., n;\ k = 0, 1, 2, ...)$. Эта последовательность («цепь») событий подлежит нашему изучению. Наиболее важной ее характеристикой являются вероятности состояний системы

$$P\ \{S\ (k) = s_i\}\ (i = 1, 2, ..., n;\ k = 0, 1, 2, ...)\ \text{(рисунок)},$$

где $P\ \{S\ (k) = s_i\}$ – вероятность того, что на k-м шаге система S будет находиться в состоянии s_i.

Распределение вероятностей (рисунок) представляет собой не что иное, как одномерный закон распределения случайного процесса $S(t)$, протекающего в системе S с «качественными» дискретными состояниями и дискретным временем $t_0, t_1, t_2, ..., t_k$…

Процесс, протекающий в такой системе S, называется марковским процессом с дискретными состояниями и дискретным временем (или, короче, марковской цепью). Марковская цепь представляет собой разновидность марковского процесса, в котором будущее зависит от прошлого только через настоящее.

Понятие «настоящего» мы формулировали так: «на k_0-м шаге система находится в состоянии s_i», если вероятности состояний системы на последующих шагах зависят только от s_i, а не от предыдущих состояний системы. Если же эта вероятность зависит еще и от того, откуда (из какого состояния s_j) система пришла в состояние s_i, можно включить это состояние s_j в описание «настоящего».