# ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ, ИХ СВОЙСТВА И ПРИМЕНЕНИЕ

*М. Н. Божко, В. Т. Дацык (БрГУ имени А. С. Пушкина, Брест)*

В теории суммирования рядов и интегралов Фурье одной из важных задач является нахождение главного члена уклонения функций определенного класса от ее линейных средних (операторов приближения) с равномерной оценкой остатка относительно всего класса указанных функций. Впервые такая задача была решена в 1932 году Е.В. Вороновской, а именно: для функций класса $C^2[0,1]$ с помощью полиномов Бернштейна была доказана следующая асимптотическая формула

$$f(x)-B_n(f;x)=-\frac{1}{2}\frac{x(1-x)}{n}f''(x)+o(\frac{1}{n}) \tag{1}$$

**Теорема.** Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и ограничена на числовой прямой, то справедлива следующая асимптотическая формула

$$F_\sigma(f;x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_\lambda^\infty\frac{f(x-\frac{t}{\sigma})-2f(x)+f(x+\frac{t}{\sigma})}{t^2}dt+O(\omega_2(\frac{1}{\sigma};f)), \tag{2}$$

где

$$F_\sigma(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\sigma(1-\frac{u}{\sigma})du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos u(x-t)dt \tag{3}$$

есть $(C,1)$ – средние интеграла Фурье функции $f(t)$;
$\omega_2(\frac{1}{\sigma};f)=\sup\limits_{|t|\le\frac{1}{\sigma}}\max\limits_{x\in R}|f(x-t)-2f(x)+f(x+t)|$ - модули гладкости второго порядка функции $f$; $\lambda>0$ - произвольная действительная постоянная.

**Следствие.** Если дополнительно к условиям теоремы $f(x)$ есть ещё и функция класса Гёльдера порядка $0<\alpha\le1$, то из определения модуля гладкости $\omega_2(\frac{1}{\sigma};f)$ следует, что:

$$F_\sigma(f;x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_\lambda^\infty\frac{f(x-\frac{t}{\sigma})-2f(x)+f(x+\frac{t}{\sigma})}{t^2}dt+O(\frac{1}{\sigma^\alpha}) \tag{4}$$

причём, если $0<\alpha<1$, то и интеграл правой части (4) также имеет порядок $O(\frac{1}{\sigma^{\alpha}})$.

Вводится класс $W^{(2\rho+1)}(D)$ (ρ - фиксированное целое неотрицательное число) – обсалютно интегрируемые на числовой прямой функций f вместе со своими существующими $(2\rho+1)$ - первыми производными, такими что $\left|f^{(2\rho+1)}(t)\right| \le D<\infty$. Видно, что все производные до порядка $2\rho$ включительно, а также сама функция $f(t)$ принадлежат классу Липшица порядка α=1.

**Теорема.** Если f∈ $W^{(2\rho+1)}D$, то

$$\overline{U}_{\sigma}(f;x)=\sum_{\upsilon=0}^{\rho}(-1)^{\upsilon}f^{(2\upsilon)}(x)\frac{a_{2\upsilon}(\sigma)}{\sigma^{2\upsilon}}+\sum_{\upsilon=1}^{\rho+1}(-1)^{\upsilon+1}f^{(2\upsilon-1)}(x)\frac{a_{2\upsilon-1}(\sigma)}{\sigma^{2\upsilon-1}}+$$

$$+\frac{(-1)^{\rho}}{\sigma^{2\rho+1}}J_{\sigma,\rho}(x)\sum_{m=0}^{\infty}a_m(\sigma)+\frac{1}{\sigma^{2\rho+1}}\left(O(\omega_2(\frac{1}{\sigma};f^{(2\rho+1)}))+B_{\sigma,\rho}\right)A_{\sigma} \qquad (5)$$

где $B_{\sigma,\rho}=O(1)$;

$$J_{\sigma,\rho}(x):=\frac{1}{\pi}\int_{o}^{\infty}\Phi_x^{(2\rho+1)}(t)\frac{\sin\sigma t}{t}dt,$$

$$\Phi_x^{(2\rho+1)}(t):=f^{(2\rho+1)}(x+t)-2f^{(2\rho+1)}(x)+f^{(2\rho+1)}(x-t)$$

Для данного класса функций получены асимптотические представления типа Вороновской обобщенных средних интегралов Фурье и рассмотрены их приложения.

**Литература**

1.Натансон, И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон – М. : Наука, 1974.

2.Самко, С. Г., Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987.