О НЕЯВНЫХ S-СТАДИЙНЫХ МЕТОДАХ ГАУССА

А. А. Крощенко, В. М. Мадорский (БрГУ имени А. С. Пушкина, Брест)

Одношаговые методы Рунге-Кутты описываются формулой вида $y_{n+1} = y_n + \tau\sum_{i=1}^{s} b_i k_i$, где $k_i = f\left(t_n + c_i\tau,\ y_n + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{ij}k_j\right)$ $(1 \le i \le s)$.

Вещественные параметры b_i, c_i и a_{ij} определяют метод и могут быть получены из предположений вида [3]:

$$B(p):\ \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{q-1} = \frac{1}{q},\quad q = 1,\ldots,p; \qquad C(\eta):\ \sum_{j=1}^{s} a_{ij}c_j^{q-1} = \frac{c_i^q}{q},\quad i = 1,\ldots,s,\ q = 1,\ldots,\eta;$$

$$D(\zeta):\quad \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{q-1} a_{ij} = \frac{b_j}{q}(1 - c_j^q),\quad j = 1,\ldots,s,\ q = 1,\ldots,\zeta.$$

Условие *B(p)* определяет порядок метода.

Для методов Гаусса-Лежандра c_i, $i = 1,\ldots,s$ - корни смещенного полинома Лежандра s-той степени $\frac{d^s}{dx^s}(x^s(x-1)^s)$, *p=2s*.

Для конструирования методов Гаусса-Лежандра необходимо определить параметры b_i, c_i и a_{ij}. Для этого можно воспользоваться представленным ниже подходом.

1. Представляем смещенный полином Лежандра степени s в виде $\chi_s(x) = g_s x^s + g_{s-1}x^{s-1} + \ldots + g_1 x + g_0$, воспользовавшись рекуррентной формулой $\chi_{s+1} = (2s+1)(2x-1)\chi_s - s^2\chi_{s-1}$, или получаем сразу коэффициенты

$$g_s = \frac{\prod_{i=1}^{s}(s+i)}{i!},\qquad g_{k-1} = -\frac{g_k k^2}{2\sum_{l=k}^{s} l},\quad k = \overline{s,1}.$$

2. Находим приближенные значения корней полинома Лежандра степени s, например, как собственные значения соответствующей сопутствующей матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{g_{s-1}}{g_s} & -\frac{g_{s-2}}{g_s} & \cdots & -\frac{g_1}{g_s} & -\frac{g_0}{g_s} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а затем уточняем их с помощью какого-либо итерационного процесса (например, гибридного полюсно-бесполюсного квазиньютоновского процесса, локально сходящегося с кубической скоростью [1,3]).

3. Параметры b_i, a_{ij} получаем с помощью следующих формул:

$$b_i = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{s} \frac{(-1)^{s+j}}{j} \sum_{l=1}^{\binom{s-j}{s-1}} \prod_{n \in \binom{s-j}{s-1}_l} c_n}{\displaystyle\prod_{k=1}^{s} (c_i - c_k)}, \quad k \neq i, \quad i = \overline{1,s}, \tag{1}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} c_i + \dfrac{\displaystyle\sum_{k=2}^{s} \frac{(-1)^{s+k-1}(k-1)c_i^k}{k} \sum_{l=1}^{\binom{s-k}{s-1}} \prod_{n \in \binom{s-k}{s-1}_l} c_n}{\displaystyle\prod_{m=1}^{s} (c_j - c_m)}, & i = j \\ \dfrac{\displaystyle\sum_{k=2}^{s} \frac{(-1)^{s+k-1}(k-1)c_i^k}{k} \sum_{l=1}^{\binom{s-k}{s-1}} \prod_{n \in \binom{s-k}{s-1}_l} c_n}{\displaystyle\prod_{m=1}^{s} (c_j - c_m)}, & i \neq j \end{cases}, \qquad m \neq j, \quad 1 \le i, j \le s, \tag{2}$$

где $\binom{i2}{i1}$ - число сочетаний из *i1* элементов по *i2*, $\binom{i2}{i1}_l$ - *l*-тое сочетание, $c_i, \quad i = 1,\dots,s$ - корни полинома Лежандра.

Формулы (1) и (2) были получены путем последовательного исключения неизвестных из условий $B(2s)$ и $C(s)$.

Предложенный подход позволяет получать процессы до 28 порядка точности.

Литература

1. Вержбицкий, В. М. Численные методы. в 2 т. Т. 1. Линейная алгебра и нелинейные уравнения / В. М. Вержбицкий. – М. : ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2005.

2. Мадорский, В. М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений: монография / В. М. Мадорский; Брест. гос. ун-т. – Брест : Изд-во БрГУ, 2005.

3. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер. – М. : Мир, 1999.