# ПРИМЕНЕНИЕ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ К НАХОЖДЕНИЮ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

*А. Ю. Хоронжевская (БрГТУ, Брест)*

Для любой квадратной невырожденной матрицы существует, причём единственная, обратная матрица. Если же матрица $A$ является прямоугольной или квадратной, но вырожденной, то обратная матрица не существует и символ $A^{-1}$ не имеет смысла. Однако для произвольной прямоугольной матрицы $A$ существует так называемая «псевдообратная» матрица $A^{+}$ [2], обладающая некоторыми свойствами обратной матрицы.

**Определение.** Пусть $A$ – матрица размерности $m \times n$. Матрица $A^{+}$ размерности $n \times m$ называется псевдообратной для матрицы $A$, если существуют матрицы $U$ и $V$, при которых $AA^{+}A = A$, $A^{+} = UA^{T} = A^{T}V$.

Представляя прямоугольную матрицу $A$ в виде $A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$, где $P$ – невырожденная квадратная матрица, ранг которой совпадает с рангом матрицы $A$, можно получить псевдообратную матрицу по формуле:

$$A^{+} = \begin{bmatrix} P^{T} \\ Q^{T} \end{bmatrix} \left(PP^{T} + QQ^{T}\right)^{-1} P \left(P^{T}P + Q^{T}Q\right)^{-1} \begin{bmatrix} P^{T} & R^{T} \end{bmatrix}.$$

**Пример**. Если $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, то $A^{+} = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0{,}04 & 0{,}03 \\ 0{,}02 & -0{,}14 & -0{,}04 \\ 0{,}03 & 0{,}05 & 0{,}06 \\ 0{,}05 & -0{,}05 & 0{,}05 \end{bmatrix}$.

Псевдообратные матрицы имеют важное применение при решении СЛАУ. Если система $AX = Y$ несовместна, то столбец $X^{0} = A^{+}Y$ является наилучшим приближением системы в том смысле, что при $X = X^{0}$ квадратичное отклонение $\|Y - AX\|^{2} = \sum_{i=1}^{m} \left| y_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right|^{2}$ достигает минимума [1].

Алгоритмы нахождения псевдообратной матрицы и наилучшего приближенного решения СЛАУ реализованы в виде макросов в среде VBA.

## Литература

1. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Физматлит, 2004.

2. Стренг, Г. Линейная алгебра и её применения / Г. Стренг – М. : Мир, 1980.