

УДК 621.37

Н.Н.ВОРСИН**СПЕКТР ШИМ-СИГНАЛА ПРИ
ГАРМОНИЧЕСКОЙ МОДУЛЯЦИИ**

Сигналы широко-импульсной модуляции (ШИМ-сигналы) приобрели заметную популярность. Сигнал представляет собой периодическую последовательность импульсов, в которой информационным параметром является их скважность – отношение периода к длительности импульса. Главные области использования - цифро-аналоговое, аналого-цифровое преобразования, усиление аналоговых сигналов в классе D. На Рис.1 показана форма ШИМ-сигнала при гармонической модуляции в течение одного периода модуляции.

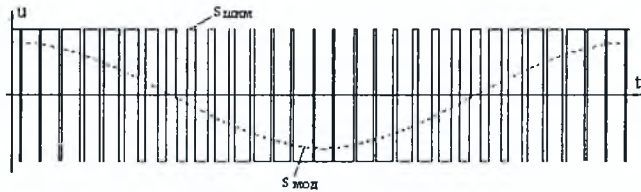


Рисунок 1 Оциллограммы ШИМ-сигнала ($S_{\text{ШИМ}}$) и соответствующего сигнала модуляции ($S_{\text{мод}}$)

Несмотря на легкость и общедоступность компьютерного спектрального анализа, аналитические методы по-прежнему актуальны. Они, в случае реализуемости, обеспечивают общность результатов, недоступную для численных методов. ШИМ сигнал, будучи широкополосным и относительно сложным, все же допускает аналитическое вычисление спектра, которое приведено ниже.

На первой стадии анализа предполагается, что модуляция осуществляется гармоническим сигналом с круговой частотой Ω , которая значительно меньше несущей частоты ω . Если спектр при гармонической модуляции вычислен, его определение при произвольной модуляции осуществляется путем наложения спектров от гармонических составляющих сложного сигнала модуляции.

Обозначим частоту следования импульсов через ω , а длительность импульсов – через τ . Пусть сигнал представляет собой последовательность двухполярных импульсов, показанных на рис.1. Спектральные коэффициенты такого сигнала приводятся во многих пособиях по теории сигналов [1]:

$$a_0 = U_m \left(\frac{2\tau}{T} - 1 \right) \quad a_k = \frac{4U_m \sin\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right)}{k\pi}. \quad (1)$$

При вычислении данных коэффициентов полагалось, τ – const. Запишем выражение для импульсного сигнала в виде ряда Фурье:

$$u(t) = U_m \left(\frac{2\tau}{T} - 1 \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4U_m \sin\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right)}{k\pi} \cos(k\omega t). \quad (2)$$

Теперь полагаем длительность импульса медленной гармонической функцией времени: $\tau = \frac{T}{2}[1 + m \cos(\Omega t)]$, где $m < 1$ – коэффициент модуляции длительности импульса. После подстановки получим:

$$u(t) = U_m m \cos(\Omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4U_m \sin\left[k \frac{\pi}{2} (1 + m \cos \Omega t)\right]}{k\pi} \cos(k\omega t). \quad (3)$$

С помощью тригонометрической формулы преобразуем \sin суммы:

$$u(t) = U_m m \cos(\Omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4U_m \left[\sin k \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{k\pi m \cos \Omega t}{2}\right) + \cos \frac{k\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{k\pi m \cos \Omega t}{2}\right) \right]}{k\pi} \cos(k\omega t). \quad (4)$$

В случае четных гармоник (k – четное) первое слагаемое в квадратных скобках обращается в ноль, для нечетных гармоник (k – нечетное) второе. Таким образом, наличие модуляции ($m > 0$) приводит к тому, что ШИМ сигнал содержит спектральные компоненты, как при четных, так и при нечетных гармониках несущей частоты ω . Для определения этих компонент необходимо разложить по гармоническим составляющим функции $\cos\left(\frac{k\pi m}{2} \cos \Omega t\right)$ и $\sin\left(\frac{k\pi m}{2} \cos \Omega t\right)$. Коэффициентами этих разложений являются функции Бесселя первого рода с целыми индексами [2]

$$\cos\left(\frac{k\pi m}{2} \cos \Omega t\right) = J_0\left(\frac{k\pi m}{2}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}\left(\frac{k\pi m}{2}\right) \cos(2n\Omega t), \quad (5)$$

$$\sin\left(\frac{k\pi m}{2} \cos \Omega t\right) = +2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}\left(\frac{k\pi m}{2}\right) \cos((2n+1)\Omega t). \quad (6)$$

Если подставить данные формулы в выражение для $u(t)$, получится его разложение на гармонические составляющие. Ввиду громоздкости этого разложения представим его в виде 4 слагаемых, каждое из которых имеет очевидный физический смысл:

$$u(t) = u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + u_3(t), \quad \text{где } u_0(t) = mU_m \cos(\Omega t). \quad (7)$$

Это сигнал модуляции, который может быть выделен фильтром и использован.

$$u_1(t) = 4U_m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k J_0\left(\frac{(2k+1)\pi m}{2}\right)}{(2k+1)\pi} \cos((2k+1)\omega t). \quad (8)$$

Это ряд нечетных гармоник несущей частоты. При отсутствии модуляции ($m = 0$) данное слагаемое является обычным гармоническим рядом

разложения последовательности импульсов с длительностью, равной полупериоду последовательности. При максимальном коэффициенте модуляции ($m=1$) амплитуда первой гармоники уменьшается вместе с J_0 примерно до 0.7 от амплитуды ее в отсутствии модуляции. Амплитуды более высоких гармоник уменьшаются в большей степени.

$$u_{\pm}(t) = 4U_m \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{k+n} \frac{J_{2n}\left(\frac{2k+1}{2} \pi m\right)}{(2k+1)\pi} \cdot \{\cos[(2k+1)\omega + 2n\Omega]t + \cos[(2k+1)\omega - 2n\Omega]t\}. \quad (9)$$

Эта компонента представляет боковые колебания вблизи нечетных гармоник несущей частоты. В отсутствие модуляции ($m=0$) амплитуды боковых колебаний равны нулю, поскольку $J_{2n}(0)=0$. С увеличением коэффициента модуляции вблизи нечетных гармоник несущей частоты появляются боковые колебания, отстоящие от гармоник несущей на расстояние $\pm 2\Omega$, $\pm 4\Omega$, $\pm 6\Omega$ и т.д. Однако заметную амплитуду будут иметь только боковые колебания, отстоящие на $\pm 2\Omega$. Это обусловлено тем, что функции Бесселя с высокими индексами J_4 , J_6 , и т.д. при аргументе, меньшем 2, практически, равны нулю. В нашем случае даже при полной модуляции ($m=1$) величина аргумента равна $\pi/2=1.57$. С увеличением номера гармоники несущей частоты возрастает и величина аргумента в функциях Бесселя и их значения, однако при этом увеличивается знаменатель в формулах коэффициентов, так что амплитуды соответствующих гармоник остаются весьма малыми.

Последняя составляющая гармонических сумм $u_3(t)$ представляется следующей формулой:

$$u_3(t) = 4U_m \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{k+n} \frac{J_{2n+1}(k\pi m)}{2k\pi} \cdot \{\cos[2k\omega + (2n+1)\Omega]t + \cos[2k\omega - (2n+1)\Omega]t\}. \quad (10)$$

Согласно этой формуле четные гармоники несущей частоты в рассматриваемом ШИМ сигнале отсутствуют. Однако вблизи четных гармоник имеются боковые колебания, из которых основные соответствуют минимальным номерам $k=1$, $n=0$. Амплитудный коэффициент этих боковых колебаний при $m=1$ составляет 0.18, что сравнимо с коэффициентом боковых колебаний в окрестности первой гармоники несущей частоты.

Подведем итог анализа спектрального состава ШИМ сигнала.

Спектр состоит из гармоники частоты модуляции – Ω и множества нечетных гармоник несущей частоты.

Вблизи каждой из гармоник несущей частоты присутствуют боковые гармоники, количество которых теоретически бесконечно. Однако сколько-нибудь заметные амплитуды имеют только боковые гармоники с малыми номерами $n=1, 2$. Амплитуды остальных гармоник пренебрежимо малы, что обусловлено быстрым уменьшением модуля бесселевых функций малого аргумента с увеличением порядка функций.

Вблизи нечетных гармоник несущей частоты имеются только четные боковые гармоники. Вблизи четных гармоник несущей частоты присутствуют только нечетные боковые гармоники.

Для наглядности на рис.2 приведена спектрограмма рассмотренного ШИМ сигнала при 80% модуляции длительности импульса ($m=0.81$).

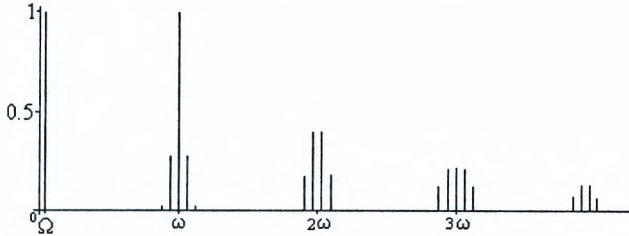


Рисунок. 2 Вид начального участка спектрограммы ШИМ сигнала при $m=0.81$

Рассмотрим кратко результаты спектрального анализа ШИМ-сигнала применительно к выбору несущей частоты НЧ усилителя D класса. Во-первых, очевидно, что усиливаемый сигнал не должен содержать лишних высокочастотных компонент, которые в результате ШИ модуляции могут трансформироваться в диапазон частот усиливаемого сигнала. Следовательно, ШИ модулятору должен обязательно предшествовать ФНЧ с частотой среза Ω_{max} .

Наиболее близкими к спектральному диапазону модулирующего колебания оказываются боковые гармоники с частотами $\omega - 4\Omega_{max}$ и $\omega - 2\Omega_{max}$. Относительные амплитуды этих гармоник при 100% модуляции составляет соответственно 0.04 и 0.32. Если предположить, что на выходе D-усилителя установлен ФНЧ второго порядка, то для ослабления им бокового колебания с частотой $\omega - 2\Omega_{max}$ в 100 раз необходимо выполнение следующего условия: $\omega \geq 7.7\Omega_{max}$.

Выбирать несущую частоту существенно (в 5-10 раз) больше нижней допустимой границы нецелесообразно, поскольку при этом необоснованно ухудшается КПД усилителя и усложняется подавление создаваемых им радиопомех.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самойло, К.А. Радитехнические цепи и сигналы / К.А. Самойло. – М. : Радио и связь, 1982. – 47 с.
2. Романовский, П.И. Ряды Фурье; Теория поля; Аналитические и специальные функции; Преобразование Лапласа / П.И. Романовский. – М. : Физматгиз, 1961. – 233 с.