НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ БИОЛОГИЧЕСКУЮ МОДЕЛЬ ХЕМОСТАТА МИХАЭЛИСА–МЕНТЕНА

Швычкина Е.Н. (БрГУ имени А.С. Пушкина, Брест)
Научный руководитель – Чичурин А.В., д-р физ.-мат. наук (Украина), доцент

В простейших моделях хемостата [1] рассматривается конкуренция нескольких видов микроорганизмов, которые питаются одним ограниченным питательным веществом, называемым субстратом. Система дифференциальных уравнений, описывающая в хемостате процесс культивирования этого микробного сообщества при наличии одного субстрата, записывается в виде:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = 1 - S(t) - \dfrac{m_1 x_1(t) S(t)}{a_1 + S(t)} - \dfrac{m_2 x_2(t) S(t)}{a_2 + S(t)}, \\ \dot{x}_1(t) = \left(\dfrac{m_1 x_1(t) S(t)}{a_1 + S(t)} - 1 \right) x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = \left(\dfrac{m_2 x_2(t) S(t)}{a_2 + S(t)} - 1 \right) x_2(t); \end{cases} \qquad (1)$$

где $S(t)$ обозначает плотность питательного субстрата, $x_1(t)$, $x_2(t)$ – плотности микроорганизмов в момент времени t, остальные параметры m_1, a_1, m_2, a_2 модели (1) являются заданными положительными числами. Данная модель хемостата предложена немецкими учёными Л. Михаэлисом (L. Michaelis) и М. Ментеном в 1913 [2].

В системе (1) числа m_i $(i=1,\ 2)$ [моль/л/сек] определяют максимальную скорость роста i-й популяции, а числа a_i $(i=1,\ 2)$ [моль/л] – константы Михаэлиса–Ментена) обозначают плотность субстрата, при которой удельная скорость роста – $\dfrac{m_i S}{a_i + S}$ для i-й популяции равна половине максимального значения m_i.

Рассмотрим решения системы (1) на бесконечном интервале времени $0 < t < +\infty$. Непосредственно из уравнений (1) следует, что если начальные концентрации неотрицательны

$$S(0) = S_0 \geq 0,\ x_1(0) = x_1^0 \geq 0,\ x_2(0) = x_2^0 \geq 0. \qquad (2)$$

то решение задачи Коши (1), (2) содержит лишь неотрицательные функции времени $S(t) \geq 0,\ x_1(t) \geq 0,\ x_2(t) \geq 0,\quad t \in [0, +\infty)$. Только такие решения задачи (1), (2) имеют физический смысл и рассматриваются в дальнейшем.

Сформулированная задача (1) – (2), рассматривалась в [3] – [4], где предлагается замена вида

$$S = \frac{1}{u^{\alpha}},\ x_1 = \frac{V_1}{u^{\mu_1}},\ x_2 = \frac{V_2}{u^{\mu_2}},$$

где α, μ_1, μ_2 – целые числа.

Используя возможности системы *Mathematica*, построен программный модуль, позволяющий находить решение в явном виде системы вида (1) при различных значениях параметров m_1, a_1, m_2, a_2. Визуализация найденных решений осуществляется на комплексной плоскости с использованием процедуры манипулирования относительно параметров.

Список литературы

1. Smith, H.L. The theory of chemostat: dynamics of microbial competition / H.L. Smith, P. Waltman. – Cambridge University Press, 1995. – 313 p.

2. Hsu, S. B. A mathematical theory for single-nutrient competition in continuous cultures of microorganisms / S. B. Hsu, S. Hubbell, P. Waltman, SIAM J. Appl. Math. 32, 1977. pp. 366-383.

3. Shvychkina, A.N. Building the third order differential system with *Mathematica* / A.N. Shvichkina // In: Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Differential Equations, Dynamical Systems and Celestial Mechanics, Eds.: L. Gadomski [and others]. Siedlce, Wydawnictwo Collegium Mazovia. – 2011. – P. 136–140.

4. Chichurin, A. Finding the solutions with the infinite limite properties for the third order normal system of differential equations using the *Mathematica* system/ A. Chichurin, A. Shvichkina // (Siedlece, 24-28 October 2011) 7^{th} Interntional Symposium on Classical and Celestial Mechanics (CCMECH'2011) Book of the Abstracts, Wydawnictwo Collegium Mazovia, Siedlce, 2011. pp. 23-24.

5. Wolfram Web Resources [Electronic resource] / ed. S. Wolfram. – Champaign, 2010. – Mode of access: www.wolfram.com. – Date of access: 1.09.2010.