ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ НЕЯВНЫМ ИТЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Деречиц Н.А.(БрГТУ, Брест),
Научный руководитель – Матысик О.В., канд. физ.-мат. наук, доцент

На протяжении многих лет в математике считалось, что только корректные задачи имеют право на существование, что только они правильно отражают реальный мир. О некорректных задачах сложилось мнение, что они не имеют физической реальности, поэтому их решение бессмысленно. В результате долгое время некорректные задачи не изучались. Однако на практике все чаще и настойчивее стала возникать необходимость решать некорректные задачи. К таким задачам относятся задача Коши для уравнения Лапласа, обратная задача гравиметрии, обратная задача теории потенциала, задача спектроскопии, задача проектирования оптимальных систем, конструкций, задача создания систем автоматической обработки результатов физического эксперимента и т.д. Поэтому разработка эффективных методов решения таких задач является актуальной.

В статье рассматривается некорректная задача отыскания решения x операторного уравнения I рода в гильбертовом пространстве H

$$Ax = y_\delta \tag{1}$$

с положительным самосопряженным ограниченным оператором A. Для ее решения предлагается неявный итерационный процесс

$$(E+\alpha A^3)x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha A^2 y_\delta,\ \ x_{0,\delta} = 0. \tag{2}$$

Здесь y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ и $0 \in SpA$, но 0 не является его собственным значением. Поэтому задача отыскания решения уравнения является некорректной. Предполагается существование единственного решения x при точной правой части y уравнения (1).

Метод (2) сходится при $\alpha > 0$, если число итераций n выбирается из условия $n^{1/3}\delta \to 0,\quad n \to \infty,\quad \delta \to 0$. Если $\alpha > 0$ и точное решение уравнения истокопредставимо ($x = A^s z,\ s > 0$), получена оценка погрешности метода $\|x - x_{n,\delta}\| \le s^{s/3}(6n\alpha)^{-s/3}\|z\| + 3(n\alpha)^{1/3}\delta, n \ge 1.$

Для минимизации полученной оценки погрешности вычислим правую часть оценки в точке, в которой производная от неё равна нулю; в результате получим априорный момент останова

$$n_{опт} = 2^{-s/(s+1)} \left(\frac{s}{3}\right)^{(s+3)/(s+1)} \alpha^{-1} \|z\|^{3/(s+1)} \delta^{-3/(s+1)}. \qquad (3)$$

Подставив $n_{опт}$ в оценку погрешности, имеем

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{опт} \le (1+s) \cdot 2^{-s/(3(s+1))} \left(\frac{s}{3}\right)^{(-2s)/(3(s+1))} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}. \qquad (4)$$

Неявный метод обладает следующим важным достоинством. В явных методах на параметр α накладывается ограничение сверху, что может привести к необходимости большого числа итераций. В неявном методе никаких ограничений сверху на $\alpha > 0$ нет. Это позволяет брать его произвольно большим (независимо от $\|A\|$). В связи с чем оптимальную оценку погрешности для метода (2) можно получить уже на первых итерациях.

Показано, что метод (2) при точной правой части уравнения (1) пригоден и тогда, когда $\lambda = 0$ является собственным значением оператора A (случай неединственного решения уравнения (1)).

В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, затруднительно получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова. И, тем не менее, метод (2) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться энергетической нормой гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$. Доказана

Теорема 1. *При условии $\alpha > 0$ итерационный метод (2) сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать из условия $n^{1/6}\delta \to 0$ при $n \to \infty, \delta \to 0$. Общая оценка погрешности для метода итераций (2) в энергетической норме имеет вид $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A \le (12n\alpha)^{-1/6}\|x\| + 6^{1/2}(n\alpha)^{1/6}\delta,\ n \ge 1$. Априорный момент останова в методе (2) равен $n_{опт} = 2^{-5/2}3^{-2}\alpha^{-1}\delta^{-3}\|x\|^3$.*

В работе также обосновывается возможность использования правил останова по невязке и по соседним приближениям в итеративном методе (2) решения уравнения (1). Результаты, полученные здесь, являются развитием и продолжением работ И.В. Емелина и М.А. Красносельского, Г.М. Вайникко, в которых впервые предложены подобные правила останова для иных методов итераций.

В случае ограниченного самосопряженного положительного оператора доказывается сходимость метода (6) и получена оценка погрешности, если для выбора момента останова используется правило останова по невязке. Имеют место

Теорема 2. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе (2) выбирается по правилу останова по невязке. Тогда метод (2) сходится.*

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и пусть* $x = A^s z$, $s > 0$, *тогда справедливы оценки* $m(\delta) \leq 1 + \dfrac{s+1}{6\alpha}\left[\dfrac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{3}{s+1}}$,

$$\|x_{m(\delta),\delta} - x\| \leq [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} + 3\alpha^{1/3}\left\{1 + \frac{s+1}{6\alpha}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{3}{s+1}}\right\}^{1/3} \delta .$$

Используемое в формулировке теоремы 3 знание истокопредставимости точного решения на практике не потребуется, так как при останове по невязке автоматически делается число итераций, нужное для получения оптимального по порядку приближенного решения.

В статье применяется правило останова по соседним приближениям для решения уравнения (1) с ограниченным несамосопряженным оператором A методом (2), который в этом случае запишется в виде

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha\left(A^* A\right)^3\right)^{-1}\left[z_n + \alpha\left(A^* A\right)^2 A^* y_\delta\right] + \left(E + \alpha\left(A^* A\right)^3\right)^{-1} u_n,\ z_0 = 0 .$$

Здесь u_n – ошибки вычисления итераций, $\|u_n\| \leq \beta$. Обозначим $C = \left(E + \alpha\left(A^* A\right)^3\right)^{-1}$, $B = \left(E + \alpha\left(A^* A\right)^3\right)^{-1} \alpha\left(A^* A\right)^2 A^*$. Доказана сходимость метода (2) с правилом останова по соседним приближениям и получена оценка для момента останова. Имеет место

Теорема 4. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta,\beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) если $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определён при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\|, \|u_n\| \leq \beta$*;*

б) если $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка*

$$m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta)(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0,\ \delta,\beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta,\beta) \geq d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1$, $p \in (0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0} \|z_m - x\| = 0$.

Предложенный метод можно успешно использовать при решении различных прикладных некорректных задач, встречающихся в системах полной автоматической обработки экспериментов, математической экономике, геологоразведке, сейсмике, космических исследованиях (спектроскопии), медицине.