НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Дацык В.Т. (БрГТУ, Брест), Царук А.А. (БрГТУ, Брест)

Одной из основных задач теории суммирования рядов и интегралов, является нахождение главного члена уклонения функций определенного класса от ее линейных средних (операторов приближения) с равномерной оценкой остатка относительно всего класса указанных функций. Впервые такая задача была решена Е.В. Вороновской, а именно:

$$f(x)-B_n(f;x)=-\frac{1}{2}\frac{x(1-x)}{n}f(x)+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{1}$$

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и ограничена на числовой прямой, то справедлива следующая асимптотическая формула*

$$F_\sigma(f;x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_\lambda^\infty \frac{f\left(x-\frac{t}{\sigma}\right)-2f(x)+f\left(x+\frac{t}{\sigma}\right)}{t^2}dt+O(\omega_2(\sigma^{-1};f)), \tag{2}$$

где

$$F_\sigma(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\sigma\left(1-\frac{u}{\sigma}\right)du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos u(x-t)dt \tag{3}$$

есть $(C,1)$ *– средние (средние Фейера) интеграла Фурье функции* $f(t)$*;*

$\omega_2(\sigma^{-1};f)=\sup\limits_{|t|\le\sigma^{-1}}\max\limits_{x\in R}|f(x-t)-2f(x)+f(x+t)|$ *– модули гладкости второго порядка функции* f*;* $\lambda>0$ *– произвольная действительная постоянная.*

Следствие 1. *Если дополнительно к условиям теоремы* $f(x)$ *есть ещё и функция класса Гёльдера порядка* $0<\alpha\le1$*, то из определения модуля гладкости* $\omega_2(\frac{1}{\sigma};f)$ *следует, что:*

$$F_\sigma(f;x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_\lambda^\infty \frac{f\left(x-\frac{t}{\sigma}\right)-2f(x)+f\left(x+\frac{t}{\sigma}\right)}{t^2}dt+O(\sigma^{-\alpha}), \tag{4}$$

причём, если $0<\alpha<1$, *то и интеграл правой части (4) также имеет порядок* $O(\sigma^{-\alpha})$.

Обозначим через $W^{(2\rho+1)}(D)$ (ρ -фиксированное целое неотрицательное число) класс абсолютно интегрируемых на числовой прямой функций f вместе со своими существующими $(2\rho+1)$-первыми производными, причём $\left|f^{(2\rho+1)}(t)\right|\le D<\infty$.

Видно, что все производные до порядка 2ρ включительно, а также сама функция $f(t)$ принадлежат классу Липшица порядка $\alpha=1$. Тогда для функций введенного класса $W^{(2\rho+1)}(D)$ справедливы представления.

$$f^{(m)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{o}^{\infty}u^m du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\left(u(x-t)+\frac{m\pi}{2}\right)dt, \qquad (5)$$

$$\overline{f^{(m)}}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{o}^{\infty}u^m du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\left(u(x-t)+\frac{m+1}{2}\pi\right)dt, \qquad (6)$$

$m=\overline{1,2\rho}$

Введём обобщённые средние сопряжённого интеграла Фурье.

$$\overline{U_{\sigma}}(f;x):=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\sigma}K(\sigma,u)du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin u(x-t)dt, \qquad (7)$$

где

$$K(\sigma,u):=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(\sigma)\left(\frac{u}{\sigma}\right)^m \qquad (8)$$

есть сумма или абсолютно сходящийся ряд по степеням $\frac{u}{\sigma}$, $0\le u\le\sigma$, $\sigma>0$. Причём, коэффициенты $a_m(\sigma)$ такие, что ряд

$$A_{\sigma}:=a_0(\sigma)+\sum_{m=1}^{\infty}m\left|a_m(\sigma)\right| \qquad (9)$$

сходится.

Справедлива теорема:

Теорема 2. *Если* $f \in W^{(2\rho+1)}(D)$, *то*

$$\overline{U}_\sigma(f;x)=\sum_{\upsilon=0}^{\rho}(-1)^\upsilon \bar{f}^{(2\upsilon)}(x)\frac{a_{2\upsilon}(\sigma)}{\sigma^{2\upsilon}}+\sum_{\upsilon=1}^{\rho+1}(-1)^{\upsilon+1}f^{(2\upsilon-1)}(x)\frac{a_{2\upsilon-1}(\sigma)}{\sigma^{2\upsilon-1}}+$$
$$+\frac{(-1)^\rho}{\sigma^{2\rho+1}}J_{\sigma,\rho}(x)\sum_{m=0}^{\infty}a_m(\sigma)+\frac{1}{\sigma^{2\rho+1}}\Big(O(\omega_2(\sigma^{-1};f^{(2\rho+1)}))+B_{\sigma,\rho}\Big)A_\sigma \quad (10)$$

где $B_{\sigma,\rho}=\mu(1)$;

$$J_{\sigma,\rho}(x):=\frac{1}{\pi}\int_o^\infty \Phi_x{}^{(2\rho+1)}(t)\frac{\sin\sigma t}{t}dt,$$

$$\Phi_x^{(2\rho+1)}(t):=f^{(2\rho+1)}(x+t)-2f^{(2\rho+1)}(x)+f^{(2\rho+1)}(x-t)$$

Следствие 2. *Если* $f \in W^{(2\rho+1)}(D)$ *и удовлетворяет условию Гельдера порядка* α, $0<\alpha<1$, *то в формуле (10) будет* $e_{\sigma,\rho}=\left(\frac{1}{\sigma^\alpha}\right)$ *и*

$$\mu(\omega_2(\sigma^{-1};f^{(2\rho+1)}))=O\left(\frac{1}{\sigma^\alpha}\right).$$

Следствие 3. *Для методов суммирования, у которых* $\sum_m^\infty 0^{\alpha_m}(\sigma)=0$, *например: средних Зигмунда с* $\mathrm{K}_{(\sigma,u)}=1-\left(\frac{u}{\sigma}\right)^8$, *слагаемое с множителем* $J_{\sigma,\rho}(x)$ *в формуле* (10) *будет отсутствовать . И в этом случае, например, при выполнении условий следствия 1, будем иметь (если* $s>2\rho+1$*)*

$$\overline{U}\sigma(f;x)=\overline{f(x)}+O\left(\frac{1}{\sigma^{2\rho+1+\alpha}}\right)$$