ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Дацык В.Т. (БрГТУ, Брест), Фомина Н.А. (БрГТУ, Брест)

Найдены условия существования и единственности задачи Коши и получена оценка приближения решения для дифференциального уравнения нецелого порядка.

$$y^{(\alpha)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{1}$$

где $n - 1 < \alpha < n,\ n \in \mathbf{N}$.

Пусть функция f абсолютно интегрируема на параллелепипеде

$$\Pi_{(h)} := \left\{ (x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \in \mathbf{R}^{n+1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} a \le x \le l, & l \in \mathbf{R}, \\ y_0^{(j)} - h_j \le y^{(j)} < y_0^{(j)} + h_j, & y_0^{(j)} \in \mathbf{R}, \\ h_j \in \mathbf{R} & j = \overline{0, n-1} \end{array} \right\}$$

Решение уравнения (1) будем искать в классе дифференцируемых до порядка $(n - 1)$, $n \in \mathbf{N}$, функций $y = y(x)$ на отрезке $[a, l]$ с абсолютно непрерывной на этом отрезке производной $y^{(n-1)}(x)$. Причем, для любых указанных функций $y = y(x)$ функция $\mu(x) := f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$ должна быть также абсолютно непрерывной на отрезке $[a, l]$ (условие (*)).

Теорема 1. *Если для уравнения (1) функция f абсолютно интегрируема на параллелепипеде $\Pi_{(h)}$ и для любых точек $M_1(x, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(n-1)})$ и $M_2(x, y_2, y'_2, \ldots, y_2^{(n-1)})$ из $\Pi_{(h)}$ будет*

$$|f(M_1) - f(M_2)| \le A \sum_{j=0}^{n-1} |y_1^{(j)} - y_2^{(j)}|, \tag{3}$$

где A – некоторая положительная константа, а также выполняется условие (*), то уравнение (1) при выполнении неравенства

$$\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{l^{\alpha}}{\alpha} + \sum_{j=1}^{n-1}(\alpha - 1)(\alpha - 2)\ldots(\alpha - (j - 1))\, l^{\alpha - j}\right) < 1 \tag{4}$$

имеет в классе $L^{(j)}(a, l)$ единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$D_a^{-(1-\alpha)} y(a) = y_0^{(n-1)}, \quad D_a^{-(2-\alpha)} y(a) = y_0^{(n-2)}, \quad \ldots, \quad D_a^{-(n-\alpha)} y(a) = y_0 = b, \tag{5}$$

где Γ – гамма-функция, $D_a^{-\beta}$ – дробный интеграл порядка $\beta > 0$, D_a^{β} - дробная производная порядка $\beta > 0$.