ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА, СОДЕРЖАЩЕМ ДРОБНУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ПО АДАМАРУ

Дацык В.Т. (БрГТУ, Брест), Максимук С.Б. (БрГТУ, Брест)

Пусть $\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}f$ и $D^{\alpha}_{a+}g$ - дробные интегралы и производные Адамара порядка $\alpha>0$ на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси:

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{u}\right)^{\alpha-1}f(u)\frac{du}{u}, \tag{1}$$

$$\left(D^{\alpha}_{a+}g\right)(x)=\delta^n\left(\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a+}g\right)(x),\ \delta=x\frac{d}{dx},\ n=[\alpha]+1. \tag{2}$$

Исследуем проблему существования и единственности решения задачи типа Коши для нелинейного дифференциального уравнения порядка $\alpha>0$:

$$\left(D^{\alpha}_{a+}y\right)(x)=f[x,y(x)]\quad (n-1<\alpha\le n) \tag{4}$$

с начальными условиями

$$\left(D^{\alpha-k}_{a+}y\right)(a+)=b_k,\quad b_k\in R\quad (k=1,2,...,n=[\alpha]). \tag{5}$$

Здесь $\left(D^{\alpha-k}_{a+}y\right)(a+)$ означает предел в правосторонней окрестности $(a,a+\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ точки a:

$$\left(D^{\alpha}_{a+}y\right)(a+)=\lim_{x\to a+0}\left(D^{\alpha-k}_{a+}y\right)(x)\quad (1\le k\le n), \tag{6}$$

$$\left(D^{\alpha}_{a+}y\right)(a+)=\lim_{x\to a+0}\left(\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a+}y\right)(x)\quad (\alpha\ne n),\quad \left(D^{0}_{a+}y\right)(a+)=y(a)\ (\alpha=n). \tag{7}$$

Для $n\in N=\{1,2,...\}$ обозначим через $AC^n_\delta[a,b]$ пространство функций $g(x)$, имеющих $\delta=xD$ $\quad (D=\frac{d}{dx})$ производные до порядка $n-1$ на $[a,b]$, причём $\delta^{n-1}[g(x)]$ абсолютно непрерывны на $[a,b]$:

$$AC^n_\delta[a,b]=\left\{g:[a,b]\to C:\delta^{n-1}[g(x)]\in AC[a,b],\ \delta=x\frac{d}{dx}\right\}, \tag{8}$$

где

$$AC[a,b]=\left\{h(x):\quad h(x)=C+\int_a^x\psi(t)dt,\quad \psi(t)\in L(a,b)\right\}. \tag{10}$$

Справедлива теорема:

Теорема 1. Пространство $AC_\delta^n[a,b]$ состоит из тех и только тех функций *g(x)*, которые могут быть представлены в виде:

$$g(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{n-1} \varphi(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \left(\ln\frac{x}{a}\right)^k, \tag{10}$$

где

$$\varphi(t) \in L(a,b), \varphi(t) = g_{n-1}^{1}(t), g_k(x) = \delta^k[g(x)], C_k = \frac{g_k(a)}{k!} (k = 0,1,...,n-1).$$

Рассмотрим класс $X_c^p(a,b)$ $c \in R, 1 \le p \le \infty$, состоящий из комплексно-значных суммируемых по Лебегу функций f на *[a,b]*, для которых $\|f\|_{X_c^p} < \infty$, где

$$\|f\|_{X_c^p} = \left(\int_a^b \left|t^c f(t)\right|^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \le p < \infty, c \in R).$$

Теорема 2. *Пусть α>0, n=[α]+1,* $y(x) \in X_0^1(a,b)$ *и пусть f[x,y(x)] – заданная на [a,b] функция, такая, что выполняются условия*

$$f[x,y(x)] \in X_0^1(a,b) \text{ и } \left\|f[x,y(x)]_{X_0^1}\right\| = M < \infty. \tag{11}$$

$$\|f[x,y(x) - f[x,Y(x)]\|_{X_0^1} \le A\|y(x) - Y(X)\|_{X_0^1} \quad (A > 0), \tag{12}$$

$$A\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\ln\frac{b}{a}\right)^\alpha < 1. \tag{13}$$

Тогда существует единственное решение $y(x) \in X_0^1(a,b)$ *задачи типа Коши (4) – (5) в области* G_n*. Где*

$$G_n = \left\{(x,y) \in R^2 : a \le x \le b, \left\|y(x) - \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha - j}\right\|_{X_0^1} \le d\right\}, \tag{14}$$

$$d \ge M\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^\alpha, \tag{15}$$

а постоянные b_j $(j = 1,...,n)$ и M даются (5) и (11).