УДК 517.911

Н.П СЕМЕНЧУК, В.Т. ДАЦЫК

АППРОКСИМАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

В [1] найдены условия существования m единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения дробного порядка

$$y^{(\alpha)} = f(x,y), \tag{1}$$

где $0<\alpha<1$, а функция f удовлетворяет определённым условиям. В [1] также получена оценка приближения решения указанного уравнения решением специально потраченного с помощью линейных методов суммирования интегралов Фурье операторного уравнения типа Абеля-Томмерсштейна.

В своей работе обобщаем указанные результаты. Рассматриваются нелинейные дифференциальное уравнение с дробной старшей производной.

$$y^{(\alpha)} = f\left(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}\right), \tag{2}$$

где $n-1<\alpha<n, n\in N$.

Пусть функция f абсолютно интегрируема на параллелепипеде

$$\Pi_{ehj} := \left\{ \left(x,y,y'\dots,y^{n-1}\right)\in R^{n+1} \begin{array}{l} 0\le x\le l, \qquad l\in R, \\ \int y_0^{(j)}-h_j\le y^{(j)}+h_j, y^{(j)}{}_0\in R \\ h_j\in R+, \qquad j=0,n-1 \end{array} \right\}$$

Решение уравнения (2) будем искать в классе дифференцируемых до порядка $(n-1), n\in N$, функций $y=y(x)$ на отрезке $[o,e]$ с абсолютно непрерывной на этом отрезке производной $y=y(x)$ функция $\mu(x)=f\left(x,y(x),y'(x),\dots,y^{(n-1)}(x)\right)$. Должна также быть абсолютно непрерывной на отрезке $[o,e]$. Норма для функций $y=y(x)$ вводится по формуле

$$\|y(x)\| = \sum_{j=0}^{n-1}\int_0^l \left|y^{(j)}(x)\right|dx \tag{3}$$

Введенный класс функций $y=y(x)$ обозначим через $L^{(j)}(o,e)$. Доказаны теоремы.

Теорема 1. Если для уравнения (2) функция f абсолютно интегрируема на параллелепипеде Π_{ehj} и для любых точек

$M_1\left(x, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(n-1)}\right)$ и $M_2\left(x, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n-1)}\right)$ из Π_{ehj} справедлива оценка

$$\left|f(\mu_1)-f(\mu_2)\right| \le A\sum_{j=0}^{n-1}\left|y_1^{(j)}-y_2^{(j)}\right|, \tag{4}$$

где A – некоторая положительная константа, то уравнение (1) при выполнении неравенства

$$\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{e^{\alpha}}{\alpha}+\sum_{j=0}^{n-1}(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(j-1))e^{\alpha-j}\right)<1 \tag{5}$$

имеет в классе $L^{(j)}(o,e)$ функций $y=y(x)$ единственное решение $y=y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\Delta^{-(1-\alpha)}y(0)=y_0^{n-1}=\Delta^{-(2-\alpha)}y(0)=y_0=0, \tag{6}$$

где $\Delta^{-(j-\alpha)}y(x)$ – дробный интеграл порядка $(j-\alpha)$ функции $y(x)$.

Теорема 2. Если выполнено условия теоремы 1, то справедлива оценка

$$\left\|y(x)-y_\lambda(x)\right\|_{L^{(j)}(o,e)} \le \frac{B\left\|y(x)-U_\lambda(y;x)\right\|L^{(j)}(o,e)}{1-ALE\left(U_x, \mathrm{H}_{k_\alpha}{}^{\omega}L(j)\right)} \qquad 7$$

где U_x – линейный регулярный метод суммированию интегралов, $y_\lambda(x)$ – решение операторного уравнения $K_\alpha(x,t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{Bmatrix}(x-t)^{\alpha-1}, t\le x\\ 0, \quad t>0\end{Bmatrix}$,

$\mathrm{H}_{k_\alpha}{}^{\omega}L(j)$ – класс всех измеримых функций $\varphi(x)\in L^{(j)}(o,e)$ и таких, что для любых $x', x', \in[a,e]$, справедлива оценка через усреднённые модули непрерывности функции K_α $\left\|\varphi\left(x''\right)-\varphi\left(x'\right)\right\|_{L^{(j)}(a,e)} \le \omega_L\left(K_\alpha; \left|x''-x'\right|\right)$;

$$E\left(U_\lambda, \mathrm{H}_{k_\alpha}{}^{\omega_L(j)}\right)=\sup\left\|\varphi(x)-U_\lambda(\varphi(\xi);x)\right\|_{L^{(j)}(o,e)\lambda\to\infty}^{\to 0}, \varphi\in \mathrm{H}_{k\alpha}{}^{\omega_L(j)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Семенчук, Н.П. Об одном классе дифференциальных уравнений нецелого порядка / Н.П. Семенчук // Дифференциальные уравнения. – Минск. – 1982. – Т.18, №10. – С. 1831–1832.