УДК 519.2

И.Н. МЕЛЬНИКОВА, Е.М. ХОМИЧ

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ

Для некоторой совокупности частиц рассмотрим процесс, который обладает следующим свойством: каждая из исходных частиц через время t независимо друг от друга и от обстоятельств, предшествующих исходному моменту, с одинаковой для всех частиц вероятностью $\mathrm{P}_k(t)$ порождает группу из k частиц. Через $\xi(t)$ обозначим число частиц, имеющихся к моменту времени t. Такая эволюция величины $\xi(t)$ представляет собой марковский случайный процесс. Процесс такого типа называется ветвящимся. Пусть в некоторый момент времени s, $(s = 0)$, имеется ровно k частиц. Обозначим $\xi_i(t)$ число частиц, порожденных i-той частицей (i=1,2,…,k) через время t. Тогда общее число частиц через время t будет $\xi(t)=\xi_1(t)+\ldots+\xi_k(t)$. Здесь случайные величины $\xi_i(t),\ldots,\xi_k(t)$ независимы между собой и имеют распределение вероятностей вида: $P(\xi_i(t) = n) = p_n(t)$, $n = 0,1,\ldots$ Введем производящие функции

$$F(t,z)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)z^n, \qquad F_k(t,z)=\sum_{n=0}^{\infty} p_{kn}(t)z^n,$$

где $p_{nk}(t)$ есть переходные вероятности марковского ветвящегося процесса $\xi(t)$ ($p_{kn}(t)$ есть вероятность того, что k частиц за время t порождают n частиц). Предположим, что отдельная частица за малый промежуток времени Δt с вероятностью $p_n(\Delta t) = \lambda_n\Delta t + \lambda(\Delta t)$, $n \neq 1$ превращается в n новых частиц, а с вероятностью $p_n(\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t - \lambda(\Delta t)$ остается неизменной. Пусть переходные вероятности $p_n(t) = p_{1n}(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям Колмогорова. Тогда дифференциальное уравнение для функции $F(t,z)$ имеет вид: $\dfrac{d}{dt}F_n(t,z)=\sum_k \lambda_k F_k(t,z)$.

Здесь $F(t,z)$ – функции, определенные ранее, являются производящими функциями случайной величины $\xi(t)$ для k исходных частиц, где k = 0,1,... Эта величина $\xi(t)$ есть сумма k независимых случайных величин, каждая из которых имеет распределение вероятностей с производящей функцией $F(t,z)$. Поэтому $F_k(t,z) = [F(t,z)]^k$, $k = 0,1$, ... Тогда дифференциальное уравнение для производящей функции $F\ (t,\ z)$ может быть переписано в более удобном для решения виде $\dfrac{d}{dt}F(t,z)=\sum_k \lambda_k F(t,z)^k$.