

УДК 519.2

И.Н. МЕЛЬНИКОВА, И.О. ДЕШКО**НЕКОТОРЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ**

При рассмотрении марковских цепей будем условно говорить о некоторой физической системе, с течением времени t меняющей своё фазовое состояние. Будем считать, что имеется лишь конечное или счётное число различных фазовых состояний $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$. Обозначим $\varepsilon(t)$ состояние системы в момент времени t . Процесс эволюции рассматриваемой системы описывается функцией $\varepsilon(t)$.

Будем предполагать, что течение этого процесса $\varepsilon(t)$ зависит от вмешательства случая, причём соблюдается следующая закономерность: если в какой-либо момент времени s система находится в состоянии ε_i , то, независимо от своего поведения до этого момента s , она через время t с вероятностью $p_{ij}(t)$ переходит в состояние ε_j :

$$p_{ij}(t) = p\left\{\varepsilon(s+t) = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon(s)} = \varepsilon_j\right\}, i, j = 1, 2, \dots$$

Описанная модель называется однородным марковским случайным процессом, а вероятности p_{ij} называются переходными вероятностями этого процесса. Кроме них, ещё задаётся начальное распределение вероятностей:

$$p_j^0 = p\{\varepsilon(0) = \varepsilon_j\}, j = 1, 2, \dots$$

Обозначим $p_j(t)$ вероятность того, что через время t система будет находиться в состоянии ε_j :

$$p_j = p\{\varepsilon(t) = \varepsilon_j\}, j = 1, 2, \dots$$

Легко установить, что:

$$p_j(t) = \sum_i p_i^0 p_{ij}(t),$$

$$p_j(s+t) = \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t), i, j = 1, 2, \dots$$

При любых s и t , где

$$p_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

Предположим, что в некоторый момент времени $t=t_0$ марковский процесс $\varepsilon(t)$ находится в определённом состоянии ε . Через некоторое случайное время τ процесс переходит в некоторое другое состояние.

Процесс радиоактивного распада. Описанная ранее вероятностная модель радиоактивного распада – превращения радия Ra в радон Rn – такова, что переход $Ra \rightarrow Rn$ представляет собой однородный марковский процесс с двумя состояниями для каждого атома (Ra или Rn) и единственно возможным переходом $Ra \rightarrow Rn$. Вероятность того, что атом Ra за время t перейдёт в атом Rn , ранее была обозначена $p(t)$. Было показано, что если в исходный момент времени $t = 0$ количество атомов Ra равно n_0 , то число $\varepsilon(t)$ испускаемых за время t α -частиц имеет распределение Пуассона с параметром $\alpha = n_0 p(t)$:

$$p\{\varepsilon(t) = k\} = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь $p(t)$ – вероятность того, что состояние Ra изменится за время t , согласно общей формуле имеет вид:

$$p(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

где λ – соответствующая плотность перехода $Ra \rightarrow Rn$ для отдельного атома, т.е. такая постоянная, что вероятность перехода $Ra \rightarrow Rn$ за малый промежуток времени Δt есть $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$.

Рассмотрим количество радия через время t . Если число α -частиц равно $\varepsilon(t)$, то число оставшихся атомов Ra равно $n_0 - \varepsilon(t)$. Среднее количество радия через время t есть:

$$n(t) = M[n_0 - \varepsilon(t)] = n_0 - n_0 p(t) = n_0 e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Экспоненциальный характер функции $n(t)$ говорит, в частности, о том, что время T , за которое в среднем распадается половина исходного количества радия $n(T) = \frac{1}{2} n_0$, есть некоторая абсолютная постоянная. Это и есть так называемая постоянная полураспада. Видно, что она связана с плотностью перехода $Ra \rightarrow Rn$ равенством $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$.