

АНАЛОГ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

*Опицук А. (БрГУ имени А.С. Пушкина, Брест),
Дацык В.Т. (БрГУ имени А.С. Пушкина, Брест)*

В работе [1] указаны условия существования и единственности решения аналога задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y^{(\alpha)} = f(x, y), \quad (1)$$

где $0 < \alpha < 1$, найдена оценка приближения решения уравнения (1) решением специально построенного, с помощью линейных методов суммирования интегралов Фурье, операторного уравнения типа Абеля-Гаммерштейна.

Пусть Π параллелепипед в \mathbf{R}^4 вида:

$$\Pi := \{ (x, y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}) \in \mathbf{R}^4 \mid 0 \leq x \leq l, y_0^{(j)} - h_j \leq y^{(j)} \leq y_0^{(j)} + h_j, j = \overline{0,3} \},$$

где $l, h_j \in \mathbf{R}_+$ ($j = \overline{0,3}$), $f: \Pi \rightarrow \mathbf{R}$ заданная, абсолютно интегрируемая по параллелепипеду Π функция.

Через $L_f^{(2)}(0; l)$ обозначим класс дважды дифференцируемых на отрезке $[0; l]$ функций $y = y(x)$ с абсолютно непрерывной производной y'' , и таких, что функция $f(x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x))$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0, l]$.

Рассмотрим задачу нахождения функции $y = y(x)$ класса $L_f^{(2)}(0; l)$, удовлетворяющей нелинейному дифференциальному уравнению, с дробной старшей производной

$$y^{(\alpha)} = f(x, y, y', y'', y'''), \quad 2 < \alpha < 3, \quad (2)$$

и начальным условиям

$$y^{(\alpha-1)}(0) = 0, y^{(\alpha-2)}(0) = 0, y^{(\alpha-2)}(0) = 0. \quad (3)$$

Теорема. Пусть функция $f: \Pi \rightarrow \mathbf{R}$ абсолютно интегрируема на параллелепипеде Π и существует $A > 0$, что для любых двух точек $M_1(x, y_1^{(0)}, y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, y_1^{(3)})$ и $M_2(x, y_2^{(0)}, y_2^{(1)}, y_2^{(2)}, y_2^{(3)})$ из Π выполняется неравенство $|f(M_1) - f(M_2)| \leq A \sum_{j=0}^3 |y_1^{(j)} - y_2^{(j)}|$.

Если $A(l^\alpha / \alpha + \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)l^{\alpha-2}(1 + (\alpha - 3)l^{\alpha-3}) + \alpha(\alpha - 1)l^{\alpha-1}) / \Gamma(\alpha) < 1$, то задача (2), (3) имеет в классе $L_f^{(2)}(0; l)$ единственное решение.

Список литературы

1 Семенчук Н.П. // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 10. С. 1831-1833.