АПРИОРНЫЙ ВЫБОР ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ В ЯВНОМ МЕТОДЕ С ПОПЕРЕМЕННО ЧЕРЕДУЮЩИМСЯ ШАГОМ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Дерачиц Н.А. (БрГУ имени А.С. Пушкина, Брест),
Матысик О.В. (БрГУ имени А.С. Пушкина, Брест)

Для решения линейного операторного уравнения первого рода

$$Ax = y \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве H с положительным самосопряженным ограниченным оператором A предлагается явный итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y), \quad x_0 = 0,$$

$$\alpha_{2n+1} = \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Здесь $0 \in SpA$, но не является его собственным значением. Поэтому задача отыскания решения уравнения является некорректной. Предполагается существование единственного решения x при точной правой части операторного уравнения (1).

В случае приближённой правой части уравнения (1) y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ метод итераций (2) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}(Ax_{n,\delta} - y_\delta), \quad x_{0,\delta} = 0.$$

$$\alpha_{2n+1} = \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения (1) при достаточно малых δ и $n\delta$ и достаточно больших n. Иными словами, метод (3) является сходящимся, если

$$\lim_{\delta \to 0} \left(\inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0 .$$

Считаем $\|A\| = 1$. Тогда, воспользовавшись интегральным представлением самосопряжённого оператора, получим

$$x - x_n = \int_0^1 \lambda^{-1}(1 - \alpha_1\lambda)(1 - \alpha_2\lambda)\ldots(1 - \alpha_n\lambda)dE_\lambda y = \int_0^1 \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^l (1 - \beta\lambda)^m dE_\lambda y.$$

Здесь l, m – натуральные показатели, $l + m = n$, $l = m = \left[\frac{n}{2}\right]$ или $l = m + 1$. Потребуем, чтобы здесь и всюду ниже для α, удовлетворяющих условию $0 < \alpha < 2$, и для $\beta > 0$ при любом $\lambda \in (0,1]$ было

$$|(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)| < 1. \tag{4}$$

Справедливы

Теорема 1. *Итерационный процесс* (2) *при условиях* $0<\alpha<2$, $\beta>0$ *и* (4) *сходится в исходной норме гильбертова пространства.*

Теорема 2. *При условиях* $0<\alpha<2$, $\beta>0$ *и* (4) *итерационный метод* (3) *сходится, если выбирать число итераций* n *из условия* $n\delta\to 0$, $n\to\infty$, $\delta\to 0$.

Для оценки скорости сходимости метода предполагается истокообразная представимость точного решения, т. е. что $x=A^s z$, $s>0$. Тогда поскольку $\|x-x_{n,\delta}\|\le\|x-x_n\|+\|x_n-x_{n,\delta}\|\le\|x-x_n\|+\frac{n}{2}(\alpha+\beta)\delta$ и справедливо записать $x-x_n=\int_0^1\lambda^s(1-\alpha\lambda)^l(1-\beta\lambda)^m\,dE_\lambda z$, получим оценку погрешности

$$\|x-x_{n,\delta}\|\le s^s\left[n(\alpha+\beta)\right]^{-s}\|z\|+\frac{n}{2}(\alpha+\beta)\delta. \qquad (5)$$

Для нахождения оптимальной по n оценки погрешности производную по n от правой части выражения (5) приравняем к нулю. Тогда оптимальная по n оценка погрешности имеет вид $\|x-x_{n,\delta}\|_{\text{опт}}\le(1+s)2^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}$ и получается при $n_{\text{опт}}=s\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{-1}2^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{1}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}$.

Таким образом, оптимальная оценка метода (3) при неточности в правой части уравнения (1) оказывается такой же, как и оценка для хорошо известного в научной литературе метода простых итераций [1–2]. Более того, метод (3) дает выигрыш в следующем. В методе простых итераций требуется условие $0<\alpha\le 1{,}25$, а в методе же (3) $0<\frac{\alpha+\beta}{2}<4$ (следует из $0<\alpha<2$, $\beta>0$ и (4)). Следовательно, нетрудно показать, что выбирая α и β соответствующим образом, можно сделать $n_{\text{опт}}$ в методе (3) примерно втрое меньшим, чем для метода простых итераций.

Список литературы

1 Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178с.

2 Константинова, Я.В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I-го рода / Я.В. Константинова, О.А. Лисковец // Вестник Белорус. ун-та. Сер. I. – 1973. – № 1. – С. 9–15.