# ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ШАЗИ С ШЕСТЬЮ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

*Швычкина Е. Н. (БрГТУ, Брест)*
*Научный руководитель – Чичурин А. В., доктор физ.-мат. наук (Украина), доцент*

Уравнения третьего порядка с шестью различными полюсами относительно искомой функции рассматривал Шази [4]. Результаты его исследований сводятся к следующему.

1) Если решения таких уравнений не имеют подвижных критических особых точек, то последние по необходимости должны иметь вид

$$w'''=\sum_{k=1}^{6}\frac{(w'-a_k')(w''-a_k'')+A_k(w'-a_k')^3+B_k(w'-a_k')^2}{w-a_k}+$$
$$+\sum_{k=1}^{6}\frac{C_k(w'-a_k')}{w-a_k}+Dw''+E\,w'+\prod_{i=1}^{6}(w-a_i)\sum_{k=1}^{6}\frac{F_k}{w-a_k}, \tag{1}$$

которые, очевидно, содержит 32 функции по $z$: $A_k, B_k, C_k, F_k$ $(k=\overline{1,6})$, $D$ и $E$.

2) Если, кроме того, эти функции удовлетворяют специальной системе (S), состоящей из 31 алгебраического и дифференциального уравнения, то эти условия будут и достаточными. Система (S) содержит 31 уравнение с 32 функциями.

Однако Шази не завершил интегрирование системы (S) и не определил класс неприводимых уравнений, которому принадлежало бы уравнение (1). Вместе с тем он показал, что некоторые случаи вырождения уравнения (1) являются неприводимыми уравнениями Пенлеве. С этой точки зрения уравнение (1) можно рассматривать как новое, трансцендентные решения которого не имеют подвижных критических особых точек [1].

При исследовании характера особых точек во многих случаях удобнее рассматривать вместо уравнения (1) эквивалентную ему систему.

В данной работе для случая, когда коэффициенты уравнения (1) являются постоянными и $B_k=0$ $(k=\overline{1,6})$ составлена система вида

$$\begin{cases} w''=-f_1(z,w)w'^2+f_2(z,w)v+f_3(z,w), \\ v'=-2f_1(z,w)w'v+f_4(z,w), \end{cases} \tag{2}$$

где $f_i$ $(i=\overline{1,4})$ — функции по $z$ и $w$ подлежащие определению. Продифференцируем первое уравнение системы (2) по $z$ и, подставляя (2) в уравнение Шази (1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях

$w$, получим систему дифференциальных уравнений для отыскания функции $f_i$ $(i=\overline{1,4})$. Эта система имеет следующий вид

$$f_2\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{w-a_k}-\frac{\partial f_2}{\partial w}=0, \qquad D\cdot f_2-\frac{\partial f_2}{\partial z}=0, \qquad D\cdot f_1-\frac{\partial f_1}{\partial z}=0,$$

$$-2f_1^2+f_1\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{w-a_k}+\sum_{k=1}^{6}\frac{A_k}{w-a_k}-\frac{\partial f_1}{\partial w}=0, \tag{3}$$

$$E-2f_3f_1+f_3\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{w-a_k}+\sum_{k=1}^{6}\frac{C_k}{w-a_k}+\frac{\partial f_3}{\partial w}=0,$$

$$f_4f_2-\prod_{k=1}^{6}(w-a_k)\sum_{k=1}^{6}\frac{F_k}{w-a_k}+\frac{\partial f_3}{\partial z}=0.$$

Из первых двух уравнений системы (3) находим функцию

$$f_2\,(z,w)=e^{Dz}\prod_{k=1}^{6}(w-a_k)\cdot C_1,$$

где $C_1$ – произвольная постоянная.

Чтобы решить систему (3) применим метод, который рассматривается в работе [3] для решения линейного уравнения второго порядка класса Фукса с шестью особыми точками. Рассмотрим подробнее процедуру нахождения функции $f_1(z,w)$. Из третьего уравнения системы (3) найдем

$$f_1(z,w)=e^{Dz}\cdot T(w).$$

Таким образом, четвертое уравнение системы (3) является уравнением Риккати относительно неизвестной функции $T(w)$. Решение будем искать в виде:

$$T(w)=\frac{b_0w^5+b_1w^4+b_2w^3+b_3w^2+b_4w+b_5}{w^6-w^5\sigma_1+w^4\sigma_2-w^3\sigma_3+w^2\sigma_4-w\sigma_5+\sigma_6}, \tag{4}$$

где $\sigma_i$ $(i=\overline{1,6})$ – элементарные симметрические многочлены, составленные из элементов $a_i$ $(i=\overline{1,6})$. Преобразуем следующее выражение к виду:

$$\sum_{k=1}^{6}\frac{A_k}{w-a_k}=\frac{6w^4-3w^2\alpha-3(w-1)\beta_2+4w^2\sigma_1^2-9w^2\sigma_2}{w^6-w^5\sigma_1+w^4\sigma_2-w^3\sigma_3+w^2\sigma_4-w\sigma_5+\sigma_6}+$$

$$+\frac{2\sigma_1(2w^3-\sigma_3+\sigma_1\sigma_3)+5\sigma_4-6\sigma_2\sigma_4}{w^6-w^5\sigma_1+w^4\sigma_2-w^3\sigma_3+w^2\sigma_4-w\sigma_5+\sigma_6}, \tag{5}$$

где $\sigma_i$ $(i=\overline{1,6})$ связаны с величинами $\alpha$, $\beta_2$, $\beta_3$ следующими соотношениями:

$$\beta_2 = \frac{(3\alpha_2 - \sigma_2)(2\alpha_2\sigma_1 - 3\sigma_3) - 2\sigma_1\sigma_4 + 6\sigma_5}{18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2},$$

$$\beta_3 = \frac{2\sigma_1\sigma_5 - (3\alpha_2 - \sigma_2)(12\alpha_2^2 - 4\alpha_2\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4) - 2\sigma_1\sigma_4 + 6\sigma_5}{2(18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2)},$$

а число $\alpha$ удовлетворяет уравнению 5-й степени [3]. Выражение (5) получено также с учетом выполнения соотношений между функциями $A_i$ и $a_i$ системы (S).

Подставляя (4) в четвертое уравнение системы (3), получим уравнение десятой степени относительно $w$. Приравнивая коэффициенты этого уравнения нулю, получим систему из одиннадцати алгебраических уравнений, где неизвестными являются коэффициенты $b_k$ $(k=\overline{0,5})$ и $\sigma_i$ $(i=\overline{1,6})$.

Построение систем (2) и (3), нахождение их решений требует громоздких вычислений, которые были реализованы в системе *Mathematica* [2]. В данной работе не приводится явный вид всех функций $f_i$ $(i=\overline{1,4})$ по причине их большого объема.

## Список литературы

1 Добровольский, В.А. Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений/ В.А. Добровольский. – Киев. Вища школа, 1974. – 456 с.

2 Прокопеня, А.Н. Применение системы *Mathematica* к решению обыкновенных дифференциальных уравнений / А.Н Прокопеня., А.В. Чичурин. – Мн., БГУ, 1999. – 265 с.

3 Чичурин, А.В. Уравнение Шази и линейные уравнения класса Фукса: Монография/ А.В. Чичурин. – М.: Изд-во РУДН, 2003. – 143 с.

4 Chazy, J. Sur les equations differentielles du troisieme order et d'ordre superieur, don't l'integrale generale a ses points critiques fixes./J. Chazy. –Acta Math. – 1911. – № 34. – P. 317 – 385.