УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. МАТЫСИК, С.В. СИДАК
Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

НЕЯВНАЯ ИТЕРАЦИОННАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В «ОСЛАБЛЕННОЙ» НОРМЕ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

В действительном гильбертовом пространстве H исследуется операторное уравнение первого рода

$$Ax = y_\delta, \tag{1}$$

где $\|y - y_\delta\| \le \delta$, A – положительный ограниченный и самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением, однако принадлежит спектру оператора A, и, следовательно, задача некорректна.

Пусть $y \in R(A)$, т.е. при точной правой части y уравнение (1) имеет единственное решение x. Для отыскания этого решения применяется неявная итерационная процедура

$$\left(E + \alpha A^2\right)x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A^2\right)x_{n,\delta} + 2\alpha A y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{2}$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (2) понимается утверждение о том, что приближения (2) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения при достаточно малых δ и $n\delta$ и достаточно больших n.

Сходимость процесса (2) в исходной норме пространства H была рассмотрена в статье [1]. В ней показано, что предложенный неявный метод (2) сходится при условии $\alpha > 0$, если число итераций n выбирать в зависимости от уровня погрешности δ так, чтобы $n^{1/2}\delta \to 0$ при $n \to \infty, \delta \to 0$. В предположении, что точное решение уравнения (1) истокообразно представимо ($x = A^s z,\ s > 0$), получены априорные оценки погрешности и априорный момент останова. В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, затруднительно получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова. Тем не менее метод (2) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться «ослабленной» (энергетической) нормой гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$ [2]. Покажем сходимость метода (2) в энергетической норме и получим для него априорные оценки погрешности в энергетической норме. Рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \tag{3}$$

Запишем первое слагаемое в виде $x - x_n = (E + \alpha A^2)^{-n}(E + \alpha A^2)^n x$.

Как было показано в [1], $x - x_n$ бесконечно мало в исходной норме гильбертова пространства H при $n \to \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки делалось предположение об истокообразной представимости точного решения. При использовании энергетической нормы нам это дополнительное предположение не понадобится. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора $A = \int\limits_0^M \lambda dE_\lambda$, где $M = \|A\|$ и E_λ – соответствующая спектральная функция оператора A, имеем $\|x - x_n\|_A^2 = \int\limits_0^M \lambda \left(\frac{1 - \alpha\lambda^2}{1 + \alpha\lambda^2}\right)^{2n} d(E_\lambda x, x)$.

Для оценки интересующей нас нормы найдем максимум подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda\left(\frac{1 - \alpha\lambda^2}{1 + \alpha\lambda^2}\right)^{2n}$ при $\lambda \in [0, M]$. Функция $f(\lambda)$ – частный случай при $s = 1$ функций, оцененных в [1]. Там показано, что при условии $\alpha > 0$ $\max\limits_{\lambda \in [0,M]} |f(\lambda)| \le (4n\alpha e)^{-1/2}$. Следовательно, справедлива оценка $\|x - x_n\|_A \le (4n\alpha e)^{-1/4}\|x\|$. Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокообразной представимости порядка $s = 1/2$ для точного решения.

Оценим второе слагаемое в (3). Как показано в [1], справедливо равенство $x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E-(E+\alpha A^2)^{-n}(E-\alpha A^2)^n\right](y-y_\delta)$. Далее при $\alpha > 0$ нетрудно получить, что $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le 2^{3/2}(n\alpha)^{1/4}\delta, n \ge 1$. Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\|_A \le \|x - x_n\|_A + 2^{3/2}(n\alpha)^{1/4}\delta$ и $\|x - x_n\|_A \to 0,\ n \to \infty$, то для сходимости $\|x - x_{n,\delta}\|_A \to 0,\ n \to \infty$ достаточно, чтобы $n^{1/4}\delta \to 0,\ \ n \to \infty,\ \delta \to 0$.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (2) в энергетической норме

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le (4n\alpha e)^{-1/4}\|x\| + 2^{3/2}(n\alpha)^{1/4}\delta, n \ge 1. \tag{4}$$

Оптимизируем оценку (4) по n. Для этого при заданном δ найдем такое значение числа итераций n, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв к нулю производную по n от правой части неравенства (4), получим $n_{\text{опт}} = 2^{-1}\alpha^{-1}e^{-1/2}\delta^{-2}\|x\|^2$. Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (4), найдем ее оптимальное значение $\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \le 2^{3/2}e^{-1/8}\delta^{1/2}\|x\|^{1/2}$.

Метод (2) может быть использован при решении прикладных некорректных задач, которые часто встречаются в математической экономике, медицине, геофизике и спектроскопии.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Сходимость в гильбертовом пространстве неявной итерационной процедуры решения линейных уравнений / О. В. Матысик, С. В. Сидак // Вестн. Брест. ун-та. Сер. 4. – 2016. – № 2. – С. 15–21.

2. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.