УДК 517.925:519.61:531.5:681.3

А.В. ЧИЧУРИН

НЕКОТОРЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ИХ ИССЛЕДОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Рассматриваются следующие математические модели: космодинамическая трехкольцевая ограниченная модель четырнадцати тел, популяционные двухвидовые модели типа Лотке-Вольтерра и модель Лоренца. С помощью численного интегрирования, реализуемого посредством систем компьютерной математики, исследуется влияние параметров на характер решений систем дифференциальных уравнений, входящих в рассматриваемые модели. Средства графической визуализации демонстрируют характер и топологию положений равновесия. Анимационные составляющие позволяют проследить поведение решений (поведение описываемых объектов) в режиме реального времени.

1. Космодинамическая модель.

Рассмотрим ограниченную трехкольцевую задачу четырнадцати тел с неполной симметрией [1], существование которой было доказано в работах [2–4]. Опишем соответствующую математическую модель неограниченной задачи тринадцати тел, порождающую ограниченную задачу для четырнадцати тел [1]. Имеется тринадцать взаимно гравитирующих $P_0, P_1, P_2, ..., P_{12}$ тел с массами m_0, $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = m_1$, $M_5 = M_6 = M_7 = M_8 = m_2$ $M_9 = M_{10} = M_{11} = M_{12} = m_3$. Более того, тела $P_1, P_2, ..., P_{12}$ образуют три правильных квадрата (положим, что $P_0P_1 = 1$, $P_0P_5 = \alpha$, $P_0P_9 = \beta$) с общим центром (Рисунок 1).

Рисунок 1 –. Модель 13-ти тел с неполной симметрией (вариант расположения, $\alpha<\beta<1$)

Массы в вершинах каждого квадрата (Рисунок 1) взаимно равны, первый квадрат ориентирован относительно второго квадрата на угол $\pi/4$ [5]. Второй и третий квадраты гомотетичны.

Математическая модель ограниченной задачи 14 тел с неполной симметрией (три кольца) описывается во вращающейся системе координат P_0xyz системой дифференциальных уравнений [1]

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2\omega\frac{dy}{dt}+\omega^2x+\frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{d^2y}{dt^2}=-2\omega\frac{dx}{dt}+\omega^2y+\frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z}, \qquad (1)$$

где $U(x,y,z)=f\left(\frac{m_0}{\Delta_0}+m_1\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{\Delta_i}+m_2\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{\Delta_j}+m_3\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{\Delta_k}\right)$,

$$\Delta_0=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \Delta_i=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2},$$

$$x_i=\cos\frac{\pi(i-1)}{2},\ \ y_i=\sin\frac{\pi(i-1)}{2},\ \ z_i=0\ \ (i=\overline{1,4}), \qquad (2)$$

$$\Delta_j=\sqrt{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2+(z-z_j)^2},\ x_j=\alpha\ \cos\left(\frac{\pi(j-1)}{2}+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$y_j=\alpha\ \sin\left(\frac{\pi(j-1)}{2}+\frac{\pi}{4}\right),\ \ z_j=0\ \ (j=\overline{1,4}),$$

$$\Delta_k=\sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2+(z-z_k)^2},$$

$$x_k=\beta\ \cos\frac{\pi(k-1)}{2},\ \ y_k=\beta\ \sin\frac{\pi(k-1)}{2},\ \ z_k=0\ \ (k=\overline{1,4}),$$

а квадрат угловой скорости вращения ω^2 определяется соотношениями

$$\omega^2=\omega_1^{\ 2}=\omega_2^{\ 2}=\omega_3^{\ 2},$$

$$\omega_l^{\ 2}x_{lk}=\frac{m_0x_{lk}}{(x_{lk}^{\ 2}+y_{lk}^{\ 2})^{3/2}}+\sum_{\substack{1\le r\le 3\\ r\ne l}}m_r\sum_{j=1}^{4}\frac{x_{lk}-x_{rj}}{\left((x_{lk}-x_{rj})^2+(y_{lk}-y_{rj})^2\right)^{3/2}}+$$

$$+m_l\sum_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{4}\frac{x_{lk}-x_{lj}}{\left((x_{lk}-x_{lj})^2+(y_{lk}-y_{lj})^2\right)^{3/2}}, \qquad (3)$$

$$\omega_l^{\ 2}y_{lk}=\frac{m_0y_{lk}}{(x_{lk}^{\ 2}+y_{lk}^{\ 2})^{3/2}}+\sum_{\substack{1\le r\le 3\\ r\ne l}}m_r\sum_{j=1}^{4}\frac{y_{lk}-y_{rj}}{\left((x_{lk}-x_{rj})^2+(y_{lk}-y_{rj})^2\right)^{3/2}}+$$

$$+m_l\sum_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{4}\frac{y_{lk}-y_{lj}}{\left((x_{lk}-x_{lj})^2+(y_{lk}-y_{lj})^2\right)^{3/2}},$$

здесь l – означает номер окружности ($l=1,2,3$), k – номер вершины на заданной окружности (k=1,2,3,4), q_{lk} – любую координату точки $P_{l,k}$:

$$
\begin{gathered}
P_1 : x_{11} = 1,\ y_{11} = 0, \quad P_2 : x_{12} = 0,\ y_{12} = 1, \\
P_3 : x_{13} = -1,\ y_{13} = 0, \quad P_4 : x_{14} = 0,\ y_{14} = -1, \\
P_5 : x_{21} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}},\ y_{21} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \quad P_6 : x_{22} = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}},\ y_{22} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \\
P_7 : x_{23} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha,\ y_{23} = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \quad P_8 : x_{24} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}},\ y_{24} = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \\
P_9 : x_{31} = \beta,\ y_{31} = 0, \quad P_{10} : x_{32} = 0, y_{32} = \beta, \\
P_{11} : x_{33} = -\beta,\ y_{33} = 0, \quad P_{12} : x_{34} = 0,\ y_{26} = -\beta.
\end{gathered} \tag{4}
$$

Замечание 1. Условия (3) вытекают из теоремы Банка-Эльмабсута [5, 6] и являются условиями существования точных гомографических решений в задаче взаимно притягивающихся 13 тел.

Способ нахождения положений равновесия рассматриваемой задачи, ее визуализация, а также координаты положений равновесия, приведены в [1]. Согласно теореме Банка-Эльмабсута [5, 6] из соотношений (3) находим квадрат угловой скорости вращения всех трех квадратов вокруг центра P_0 в следующем виде:

$$
\omega^2 = m_0 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) m_1 + \left(\frac{2-\sqrt{2}\,\alpha}{(\alpha^2 - \sqrt{2}\,\alpha + 1)^{3/2}} + \frac{2+\sqrt{2}\,\alpha}{(\alpha^2 + \sqrt{2}\alpha + 1)^{3/2}}\right) m_2 +
$$

$$
+\left(\frac{2}{(\beta^2+1)^{3/2}} - \frac{1}{(\beta-1)|\beta-1|} + \frac{1}{(\beta+1)^2}\right) m_3. \tag{5}
$$

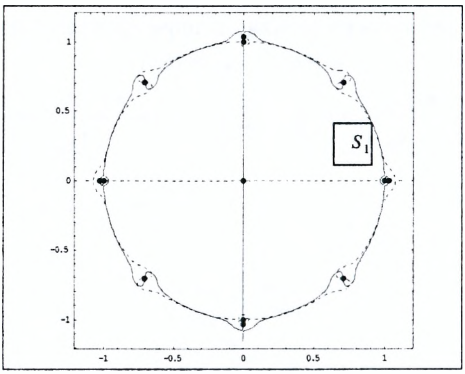

Рисунок 2 – Положения равновесия – точки пересечения обеих кривых. Жирными точками обозначены гравитирующие точки, находящиеся в вершинах трех квадратов

Численные исследования положений равновесия.

Используя алгоритмы и методы ССВ *Mathematica*, решим уравнения (1) численными методами, приведенными в работах [8-10].

Согласно классификации, приведенной в работах [11, 12] точка S_1 и симметричные ей точки являются нерадиальными положениями равновесия. В работах [6, 9] было доказано, что в случае одно и двух кольцевых задач они являются устойчивыми по Ляпунову положениями равновесия.

Будем рассматривать точку S_1 с координатами

$$x_1 = 0.97502446651498823853, y_1 = 0.97502446651498823853. \qquad (6)$$

Решим систему дифференциальных уравнений (1), (2), (5), (6) с начальными условиями

$$x(0) = x_1, y(0) = y_1, x'(0) = 0, y'(0) = 0, \qquad (7)$$

например, для $0 < t < 10000$, используя возможности системы *Mathematica* [6-9]:

$$\rho_1 = NDSolve[\{x''[t] - 2\omega y'[t] = g, x[0] = x_1, x'[0] = 0,$$
$$y''[t] + 2\omega x'[t] = h, y[0] = y_1, y'[0] = 0\}, \{x, y\}, \{t, 0, 10000\}];$$

где функции g и h определяются из формул (3) и (4), здесь ω – угловая скорость с которой вращаются квадраты (определяется из формулы (5).

Результат получен в виде интерполяционных функций. Построим графики этих интерполяционных функций для различных значений t [6, 9, 10] на временных промежутках (0,100), (0,10000) (Рисунок 3, 4; оси координат проходят через рассматриваемую точку S_1).

Для $0 < t < 100$ имеем

$$ParametricPlot[Evaluate[\{x[t], y[t]\}/.\rho_1], \{t, 0, 100\}, AxesLabel \to \{"x[t]", "y[t]"\},$$
$$AxesOrigin \to \{x_1, y_1\}, AspectRatio \to 1, PlotRange \to All, PlotPo\text{int}\, s -> 50000]$$

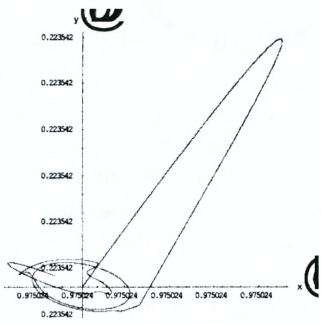

Рисунок 3 – График решения задачи Коши (1), (2), (5), (6), (7) для $0 < t < 100$

Для $0 < t < 10000$ имеем

$$ParametricPlot[Evaluate[\{x[t], y[t]\}/.\rho_1], \{t, 0, 10000\}, AxesLabel \to \{"x[t]", "y[t]"\},$$
$$AxesOrigin \to \{x_1, y_1\}, AspectRatio \to 1, PlotRange \to All, PlotPoints -> 50000]$$

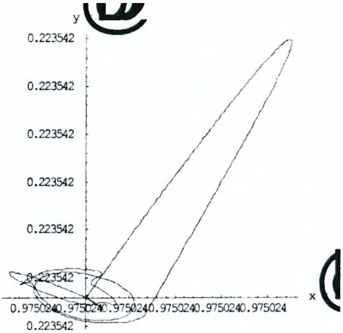

Рисунок 4 – График решения задачи Коши (1), (2), (5), (6), (7) для $0 < t < 10000$

Решим теперь задачу Коши (1), (2), (5), (6), (7), где координаты точки S_1 возьмем с большей точностью

$x_1 = 0.97502446651498823852534561910219785005565725289880701525514914061205444 7882$

$y_1 = 0.22354170959048311512861558235665769941310932242660566011927595958522069 3950.$ (8).

Изменим теперь начальные условия и возмущая немного начальные координаты

$$x(0) = x_1 + 0.0001,\ y(0) = y_1 + 0.0001,\ x'(0) = 0,\ y'(0) = 0, \qquad (9)$$

в результате численного интегрирования, получим:

а) для $0 < t < 200$ визуализацию решения (Рисунок 5)

Вывод 1. *При рассмотренных изменениях начальных условий траектория не отдаляется от положения равновесия S_1. На основании приведенных вычислительных экспериментов (Рисунок 3-6) можно предположить, что движение устойчиво, или точнее не противоречит свойству устойчивости.*

Изменим далее начальные условия, придавая большие возмущения начальным координатам, не изменяя начальные скорости.

$$x(0) = x_1 + 0.0023,\ y(0) = y_1 + 0.0023,\ x'(0) = 0,\ y'(0) = 0. \qquad (10)$$

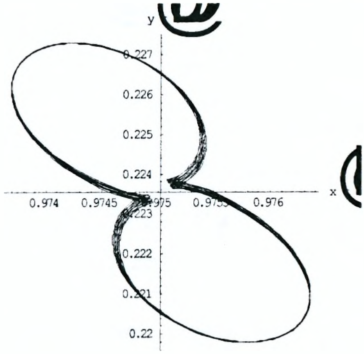

Рисунок 5 – График решения задачи Коши (1), (2),(5), (8), (9) для $0 < t < 200$

б) для $0 < t < 1000$ визуализацию решения (Рисунок 6)

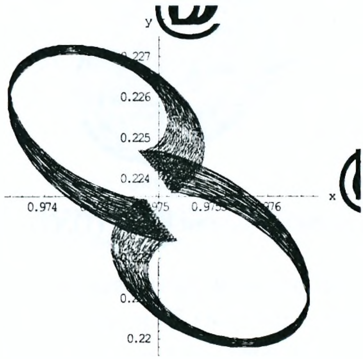

Рисунок 6 – График решения задачи Коши (1), (2),(5), (8), (9) для $0 < t < 1000$.

Тогда результаты численного интегрирования выглядят следующим образом:

а) для $0 < t < 200$

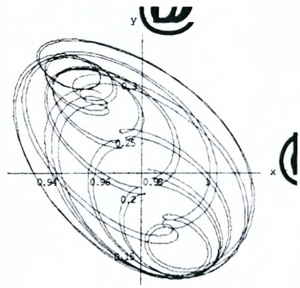

Рисунок 7 – График решения задачи Коши (1), (4), (8), (10) для $0 < t < 200$

б) для $0 < t < 600$

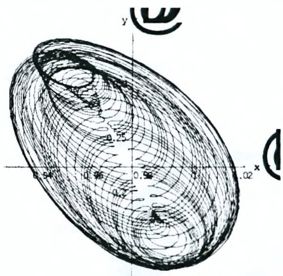

Рисунок 8 – График решения задачи Коши (1), (4), (8), (10) для $0 < t < 600$

Покажем поведение функции $\Delta\rho(t)$ локального расстояния точки на траектории от стационарной точки (S_1) в момент t (Рисунок 9).

Вывод 2. *Вычисления показывают, что существуют достаточно большие промежутки времени на которых траектория существенно не удаляется от положения равновесия.*

Замечание 2. При проведении исследований мы брали значения $m_1 = 0.0001$, $\alpha = 0.99999$. Другие значения величин m_1, α можно взять из интервалов, приведенных в работе [13], в которых точки равновесия обладают свойством линейной устойчивости.

Замечание 3. При проведении численного интегрирования для радиальных положений равновесия (то есть для точек, принадлежащим прямым, проходящим через центральное тело и одно из тел квадратов) убеждаемся, что для достаточно малых времен (t<100) траектории существенно удаляются от положения равновесия, что противоречит свойству устойчивости.

$$Plot[\Delta\rho(t),\{t,0,1000\},AxesLabel\to\{"t","\Delta\rho(t)"\}]$$

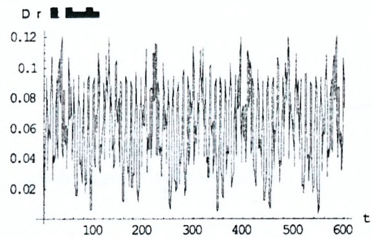

Рисунок 9 – График локального расстояния точки на траектории от стационарной точки (S_1) в момент t ($0<t<600$) для начальных условий (8), (9)

2.Модели Лотке-Вольтерра.

Рассматриваются классические модели Лотке-Вольтерра «хищник-жертва»

$$\frac{dx}{dt}=ax-bxy\,,\ \frac{dy}{dt}=-cy+dxy\,, \tag{11}$$

$$\frac{dx}{dt}=x(a-px-ry),\ \frac{dy}{dt}=y(b-qx-sy)\,, \tag{12}$$

где a, b, c, d ,p, r, q, s - положительные постоянные. Используя методы исследования работы [13], нарисуем портрет фазовых траекторий системы (1) (Рисунок 10) и зависимости численности хищников и жертв от времени (Рисунок 11).

Рисунок 10 – Фазовый портрет системы (11) для $a=2, b=1, c=3, d=1$

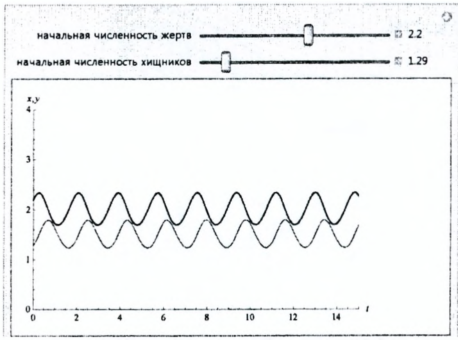

Рисунок 11 – Зависимости численности хищников и жертв от времени

3. Модель Лоренца. Рассмотрим простой примет хаотической системы, известной как аттрактор Лоренца и возникающий при исследовании атмосферных явлений [14]. В кодах системы *Mathematica* удобно записать решение в следующем виде

$$sys = \left\{ \frac{dx}{dt} = -2.8(x-y), \frac{dy}{dt} = -1.2xz + 25.5x - y, \frac{dz}{dt} = xy - z, x[0] = z[0] = 0, y[0] = 1 \right\};$$

$$sol = DSolve[sys, \{x, y, z\}, \{t, 0, 190\}, MaxSteps \to Infinity];$$

В результате получим три интерполяционные функции, визуализация которых в трехмерном пространстве Oxyz с помощью команды ParametricPlot3D (Рисунок 12).

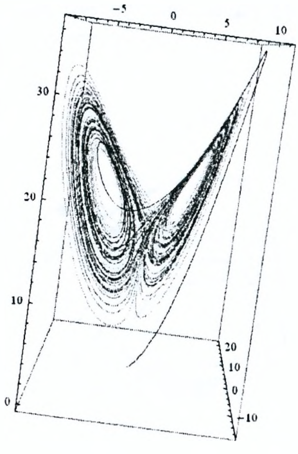

Рисунок 12 – График кривой с «эффектом бабочки»

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гадомский, Л. Построение математических моделей для задач космической динамики в системе компьютерной алгебры Mathematica / Л. Гадомский, И.Р. Ковальчук, А.В. Чичурин. – М.: МАКС Пресс, 2007. – 112 с.

2. Elmabsout, B. Sur l'existence de certaines configurations d'equillibre relatif dans le probleme des n corps / B. Elmabsout // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. Vol. 41, 1988. - P. 131–151.

3. Grebenicov, E. New exact solutions in the planar, symmetrical (n+1)-body problem / E. Grebenicov // Rom. Astron. J., 1998. Vol. 7, № 2, – P. 151–156.

4. Grebenicov, E. Two New Dynamical Models in Celestial Mechanics / E. Grebenicov // Rom. Astron. J., 1998. Vol. 8, № 1, – P. 13–19.

5. Bank, D. Configurations polygonales en equilibre relative/ D. Bank, B. Elmabsout - Paris: C.R. Acad. Sci., 2001. Vol. 329, Serie II b. – P. 243–248.

6. Ихсанов, Е. В. Компьютерные методы нормализации гамильтонианов ограниченных задач небесной механики / Е.В. Ихсанов – М.: Изд-во РУДН, 2004. – 132 с.

7. Wolfram Web Resources [Electronic resource] / ed. S. Wolfram. – Champaign, 2012. – Mode of access: www.wolfram.com. – Date of access: 1.03.2012.

8. Прокопеня, А. Н. Применение системы Mathematica к решению обыкновенных дифференциальных уравнений / А.Н. Прокопеня, А.В. Чичурин. – Минск: БГУ, 1999. – 256 с.

9. Козак-Сковородкин, Д. Применение компьютерной системы Mathematica в качественных исследованиях ньютоновой проблемы многих тел / Д. Козак-Сковородкин – М.: РУДН, 2005. – 146 с.

10. Чичурин, А.В. Численные исследования ограниченной ньютоновой задачи четырнадцати тел с неполной симметрией / А.В. Чичурин // Труды ИСА РАН, Том. 32 (3), 2008. – С. 210–230.

11. Гребеников, Е.А. Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел / Е.А. Гребеников, Д. Козак, М. Якубяк – М.: Изд-во РУДН, 2002. – 209 с.

12. Чичурин, А.В. Резонансы частот линейной устойчивости ограниченной трехкольцевой задачи четырнадцати тел с неполной симметрией / А.В. Чичурин // Тезисы второй международной математической конференции «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения» (24-28 августа 2009 г., Минск, БГУ) - Минск, ИМ НАН Беларуси, 2009. – Ч.1. – С. 92–93.

13. Abell, M.L. Differential Equations with *Mathematica* / M.L Abell, J.P. Braselton – Elsevier Academic Press, 2004. – P. 876.

14. Электронный ресурс. – Режим доступа : http://demonstrations.-wolfram.com/LorenzAttractor.