УДК 519.2

И.Н. МЕЛЬНИКОВА

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Под диффузионным процессом обычно понимают не случайный процесс, а некоторое марковское семейство случайных процессов. Иными словами, диффузионные процессы представляют собой строго марковские семейства, траектории которых непрерывны. Примером диффузионного процесса может служить семейство винеровских процессов, выходящих из всевозможных начальных точек.

Как известно, для семейства винеровских процессов в $R^r(r>1)$ инфинитезимальный оператор в точности не совпадает с $\frac{1}{2}\Delta$ (Δ – оператор Лапласа), так что соотношение инфинитезимального оператора и дифференциального оператора нужно уточнить. Уточнять также можно по-разному – ослаблять, усиливать требование непрерывности траекторий. Кроме того, в уточнении нуждается и то, требуем ли мы в определении чего-то одного – свойств инфинитезимального оператора или непрерывности траекторий, или требуем и того и другого. Эти свойства близки друг к другу, но все же не совпадают. Поэтому мы можем, варьируя их сочетания, получать близкие друг к другу, но все же разные определения.

Уточнения определения диффузионного процесса могут производиться в разных направлениях, поэтому нет единого стандартного определения диффузионного процесса, а есть различные рабочие определения, или, можно сказать, имеются определения разных классов диффузионных процессов.

Рассмотрим диффузионный процесс во всем пространстве R^r.

Марковское семейство (ξ_t, P_x) на фазовом пространстве (R^r, B^r), где B^r – σ-алгебра мы будем называть диффузионным процессом в R^r, если

а) его инфинитезимальный оператор определен на всех финитных дважды непрерывно дифференцируемых функциях и существуют непрерывные векторная функция $(b^i(x))$ и матричная $(a^{ij}(x))$ (матрица $(a^{ij}(x))$ при любом x симметрична и неотрицательно определена) такие, что для $f \in C^{(2)}_{фин}$

$$Af(x) = Lf(x) \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{r} b^i(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}\ ;$$

б) все его траектории непрерывны.

Дифференциальный оператор L будем называть производящим оператором диффузионного процесса.

Возможность удовлетворить условию б) почти всегда следует из условия а). Действительно, если к R^r добавить одну точку ∞, то получим марковское семейство, траектории которого могут быть выбраны непрерывными. Но непрерывность траекторий в компакте $R^r \bigcup \{\infty\}$ не означает непрерывности траекторий первоначального процесса в R^r; траектория может уйти в бесконечность и прийти из бесконечности. Таким образом, сущность строгого требования непрерывности б) состоит в запрещении ухода на бесконечность – выхода на границу области, в которой задан процесс.

Пусть на R^r заданы непрерывные функции $a^{ij}(x)$, $b^i(x)$, $i,j=1,...,r$: пусть L – соответствующий им дифференциальный оператор:

$$Lf=\frac{1}{2}\sum_{i,j}a^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}+\sum_i b^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Тогда справедлива теорема:

Пусть (ξ_t, P_x) – марковское семейство на (R^r, B^r) такое, что при любом $\varepsilon>0$ равномерно по x выполняются следующие соотношения:

$$P(t,x,V_\varepsilon(x))=0(t) \tag{1}$$

$$\int\limits_{U_\varepsilon(x)}(y^i-x^i)P(t,x,dy)=b^i(x)\cdot t+0(t), \tag{2}$$

$$\int\limits_{U_\varepsilon(x)}(y^i-x^i)(y^j-x^j)P(t,x,dy)=a^{ij}(x)\cdot t+0(t), \tag{3}$$

при $t\to 0$ ($U_\varepsilon(x)$) – ε-окрестность точки x, $V_\varepsilon(x)$ – ее дополнение). Тогда инфинитезимальный оператор этого марковского семейства определен на всех функциях f из $C^{(r)}_{равн.}$ (то есть ограниченных и равномерно непрерывных вместе со своими частными производными первого и второго порядка) и на них он равен Lf.

Условие (1) – это достаточное условие для существования марковского семейства с данными переходными вероятностями, с непрерывными траекториями. Выражения в левых частях (2), (3) – не что иное, как математическое ожидания и ковариации $M_x(\xi_t^i - x^i)$, $M_x(\xi_t^i - x^i)(\xi_t^j - x^j)$. Условия (2), (3) означают, что эти величины имеют первый порядок относительно t при малых t.