УДК 519.2

И.Н. МЕЛЬНИКОВА, К.А. ШАРОЙКО

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим процесс радиоактивного распада. В этой модели каждый из имеющихся в текущий момент атомов вещества распадается через время τ^0, распределённое по показательному закону $P\{\tau^0 > t\} = e^{-\lambda t}, t > 0$, где параметр $\lambda > 0$ связан с известной постоянной полураспада T_0 и среднем временем распада

$$M_{\tau^0} = \int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t} dt$$

соотношением

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{T_0}{\ln 2} = M\tau^0.$$

Рассмотрим число α-частиц $\xi(t)$, излучаемых за промежуток времени t, и процесс изменения величины $\xi(t)$ с течением времени $t \geq 0$. Выбрав начало отсчёта t=0 мы будем иметь дело с числом α-частиц, излучённых к моменту t. Пусть в начальный момент времени число атомов *Ra* равно n и τ_k^0 означает время распада имеющегося в наличии *k*-го атома *Ra*, 1,…,*n*. Мы знаем, что величина τ_k^0 имеют показательные распределения вероятностей с одним и тем же параметром λ. Допустим, что каждый атом *Ra* распределяется независимо от состояния других атомов, тогда заключим, что время $\Delta_0 = \min(\tau_1^0, ..., \tau_n^0)$до появления первой α-частицы должно быть распределено по показательному закону с параметром $\lambda_0 = \lambda n$. Условимся называть $\xi(t)$ состоянием рассматриваемого процесса в момент t. Тогда начальное состояние – это есть $\xi(t)$=0, в нём процесс находится случайное время Δ_0, распределённое по показательному закону с параметром $\lambda_0 = \lambda n$, а в момент $\tau_1 = \Delta_0$ происходит переход в новое состояние $\xi(t_1) = 1$.

В момент τ_1 остаётся *n*-1 атомов *Ra* и процесс находится в состоянии $\xi(t_1) = 1$ случайное время Δ_1. распределённое по показательному закону с параметром $\lambda_1 = (h-1)\lambda$. Заметим, что Δ_1 имеет такое же показательное распределение, как если бы момент τ_1 был начальным (т.е. τ_1=0). Очевидно, распределение величины Δ_1 не зависит от того, какой именно атом *Ra* распался в момент $\tau_1 = \Delta_0$ и считая, что это был атом с номером n (т.е. $\Delta_0 = \tau_n^0$), легко получим, что

$$P\left\{\Delta_1 > t \middle| \Delta_0 = \tau_n^0\right\} = P\left\{\tau_1^0 - \tau_n^0 > t,\dots,\tau_{n-1}^0 - \tau_n^0 > t \middle| \tau_1^0 - \tau_n^0,\dots,\tau_{n-1}^0 - \tau_n^0\right\} = e^{-(n-1)\alpha t},$$

$t \ge 0$, исходные $\tau_1^0 - \tau_n^0$ являются независимыми.

Из состояния $\xi(t_1) = 1$ через время Δ_1 в момент $\tau_2 = \tau_1 + \Delta_1$ совершается переход в состояние $\xi(\tau_2) = 2$ и, вообще, при попадании в момент τ_i в состояние $\xi(\tau_i) = i$ процесс находится в состоянии i случайное время Δ_i распределённое по показательному закону с параметром $\lambda_i = (n-i)\lambda$, затем совершается переход в новое состояние i+1 и т.д.

У данного процесса есть одна замечательная закономерность: общая картина поведения нашего процесса после момента τ попадания в то или иное состояние $\xi(\tau) = i$ не зависит от поведения процесса до этого момента τ. при исходном состоянии $i = \xi(\tau)$ независимо от «прошлого» процесс находится в состоянии i случайное время Δ, распределённое по показательному закону с параметром λ_i, затем состояние $j \ne i$ и т.д. Указанная закономерность имеет место и в отношении поведения процесса после любого фиксированного момента s при известном состоянии $\xi(s) = i$ в «текущий» момент s: поведение $\xi(t), t \ge s$ в «будущем» не зависит от «прошлого» $\xi(t), t \le s$. В этом проявляется та называемое марковское свойство рассматриваемого процесса.

Дальнейшее исследование такого однороднг марковского случайного процесса со счётным числом состояний и непрерывным временем приводит к рассмотрению простейшей системы вероятности состояний, которое определяется уравнениями Колмогорова с постоянными коэффициентами

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} P_j(t)\lambda_{ij}(t) - P_i(t)\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(t), i = (1,2,..,n).$$

Для решения этих уравнений широко применяется преобразование Лапласа от функции, ($f(t)$ $t \ge 0$ при $t < 0$ $f(t) = 0$), которое имеет вид

$$F(x) = \int_0^\infty f(t)dt.$$

В результате вместо системы однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для вероятностей состояний можно получить систему однородных алгебраических уравнений.