УДК 517.925.6

Е.В. ГРИЦУК

ОБ АЛГЕБРОИДНЫХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследование поведения решения обыкновенного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки посвящено в последнее время большое количество работ. Обусловлено это гипотезой Абловица [1] о связи возможности применения к нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных метода обратной задачи рассеяния и наличием свойства Пенлеве [2] у всевозможных редукций этого уравнения к обыкновенному дифференциальному уравнению. Появились также и новые методы такого анализа. Так, в результате применения к обыкновенному дифференциальному уравнению метода резонансов [3] получались ряды лишь формально удовлетворяющие уравнению. Вопрос их сходимости в общем случае рассматривался в работах [4, 5]. Интерес представляют разложения решения в окрестности подвижной алгебраической особой точки (слабый тест) [6]. Сходимость рядов формально удовлетворяющих дифференциальному уравнению в окрестности алгебраической особой точки доказана лишь для случая дифференциального уравнения [7].

Рассмотрим систему n дифференциальных уравнений вида

$$x_i'Q_i(x_1,x_2,...,x_n,t)=P_i(x_1,x_2,...,x_n,t),\ i=1,2,...n, \tag{1}$$

где $Q_i(x_1,x_2,...,x_n,t)$ и $P_i(x_1,x_2,...,x_n,t)$ – полиномы переменных $x_1,x_2,...,x_n$ с аналитическими по t коэффициентами. В случае подвижной алгебраической особой точки ищем решение в виде

$$x_i=\sum_{j=0}^{\infty}c_{ij}t^{\frac{j-s_i}{p}}, \tag{2}$$

где $p\in\mathbf{N}\backslash\{1\}$, все s_i натуральны и взаимно просты с p. Доказана

Теорема. *Если система (1) проходит тест Пенлеве методом резонансов, то система (1) сводится в окрестности подвижной особой точки к системам Брио и Буке. Разложения вида (2) являются сходящимися в малой окрестности подвижной особой точки. Собственные значения систем Брио и Буке равны в р раз увеличенным соответствующим резонансам.*

◀ В системе (1) произведем замену $x_i=(c_{i0}+u_i(t))t^{-\frac{s_i}{p}}$, где формальные степенные ряды $u_i(t)$ обладают свойством $u_i(t)\to0$ при $t\to0$, а с нелинейной системой уравнений на c_{i0} можно ознакомиться в работе [5]. После умножения каждого уравнения системы (1) на нужную степень t приходим к системе вида

$$tu_i' = \tilde{A}_{i1}u_1 + \tilde{A}_{i2}u_2 + \ldots + \tilde{A}_{in}u_n + F_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, t). \qquad (4)$$

Внешне система (4) похожа на систему Брио и Буке, однако ряды $u_i(t)$ не являются степенными и, кроме того, функции F_i могут содержать переменную t в рациональной степени. Доказывается, что собственные значения системы (4) совпадают с резонансами. Далее в системе (4) произведем замену

$$t = \tau^p. \qquad (5)$$

После умножения каждого уравнения системы (4) на число p получим систему Брио и Буке

$$tU_i' = p\tilde{A}_{i1}U_1 + p\tilde{A}_{i2}U_2 + \ldots + p\tilde{A}_{in}U_n + \phi_i(U_1, U_2, \ldots, U_n, \tau), \qquad (6)$$

где степенные ряды $U_j(\tau) = u_j(\tau^p)$, $j = 1,2,\ldots,n$, и функции $\phi_i(U_1, U_2,\ldots, U_n, \tau) = pF_i(u_1, u_2,\ldots, u_n, \tau^p)$ – аналитические в окрестности точки $U_1 = U_2 = \ldots = U_n = \tau = 0$. Доказывается, что собственные значения системы (6) равны в p раз увеличенным собственным значениям системы (4). Далее пользуемся теоремой о сходимости формальных степенных рядов $U_j(\tau)$, удовлетворяющих системе Брио и Буке (6). Из сходимости рядов $U_j(\tau)$ следует сходимость рядов $u_j(t)$. Теорема доказана.

Следствие. Одно собственное значение полученных в теореме систем Брио и Буке равно $-p$.

◄ Как и в работе [5], можно доказать, что всегда существует один резонанс равный – 1. Так как собственные значения систем Брио и Буке равны в p раз увеличенным резонансам, то одно собственное значение равно $-p$. ►

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – М. : Мир, 1987.

2. Голубев, В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В.В Голубев. – М.-Л. : ГИТТЛ, 1950.

3. Ablowitz, M.J. / M.J. Ablowitz, A. Ramani, H.J. Segur // J. Math. Phys. – 1980. – Vol. 21. – P. 715.

4. Грицук, Е.В. / Е.В. Грицук, В.И. Громак // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46. – №10. – С. 1371.

5. Грицук, Е.В. / Грицук Е.В., Громак В.И.// Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. –2010. – № 3. – С. 25–30.

6. Conte,R. The Painleve' Handbook. / R. Conte, M. Musette. – Dordrecht, 2008.

7. Грицук Е.В. // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2012. – № 1. – С. 126–132.