УДК 539.3

Тур В.В., д-р техн. наук, проф.;
Тарасевич А.Н., канд. техн. наук, доц.
(БрГТУ, г. Брест)

БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ ПЛИТ

Рассматривается расчет тонких плит при больших прогибах. Приведены дифференциальные уравнения изгиба тонких плит. Приведено решение задачи по определению прогибов плиты опертой по углам.

Введение

В курсах строительных конструкций излагается линейная теория плит с малыми прогибами. В таких плитах перемещения, нормальные к срединной поверхности, столь малы, что не влияют на деформации элементов, лежащих в плоскости плиты.

Между тем во многих областях находят применение гибкие плиты и гибкие пластинки, в которых кроме поперечных нагрузок, в условиях задачи имеются силы, действующие в срединной плоскости плиты, эти силы могут оказать значительное влияние на её изгиб [1]. Влияние этих сил возникает, если опорные закрепления препятствуют свободному смещению краев пластинки в плоскости контура, а также когда по краям пластинки приложены внешние силы.

При обычном применении классической теории изгиба упругих тонких плит применяют гипотезы, предложенные немецким физиком Киргофом. Для тонких плит гипотеза о недеформируемости срединной плоскости оказывается несправедливой, так как в ней появляются деформации растяжения, сдвига, а усилия в срединной плоскости зависят от ее прогибов.

Уравнения изгиба срединной плоскости при больших прогибах

Рассмотрим перемещения линейного элемента AB, лежащего на пересечении плоскости xOz и срединной плоскости пластинки. Из рисунка 1 видно, что точка B, заняв положение B', получает за счет изгиба элемента AB дополнительное смещение Δ, величина которого ввиду малости углов может быть вычислена так:

$$\Delta = \frac{\partial w}{\partial x} dx \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx,$$

тогда $\varepsilon_x = \left[u + \dfrac{\partial u}{\partial x} - u + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \right] \Big/ dx$, что позволяет получить первую из формул (1).

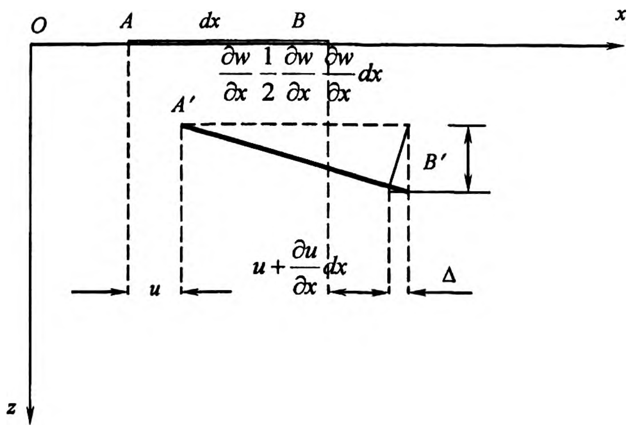

Рис. 1. Перемещения линейного элемента AB

Рассматривая деформацию срединной плоскости в направлении оси y, а также деформацию сдвига, можно получить два других уравнения в (1).

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}. \qquad (1)$$

Взяв вторые производные от (1), сложив первые два соотношения и вычтя третье, получим уравнение совместности деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \qquad (2)$$

Подставив (1) в (2) можно получить уравнение, которое установит связь между усилиями в срединной плоскости и прогибами пластинки. Это уравнение вместе с двумя уравнениями равновесия, при условии, что известны прогибы, позволяют разыскать N_x, N_y, N_{xy}. Однако эти три уравнения можно свести к одному, введя функцию напряжений $F = F(x, y)$.

Очевидно, уравнения равновесия малого элемента в усилиях будут тождественно удовлетворены, если принять следующие зависимости:

$$N_x = h\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = h\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = h\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad . \tag{3}$$

Если (3) подставить в физические уравнения получим:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right),$$
$$\gamma_{xy} = -\frac{2(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \tag{4}$$

И, наконец, подставив (4) в уравнение совместности (2) придем к следующему уравнению, связывающему функцию напряжений F и функцию прогибов w.

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]. \tag{5}$$

Второе уравнение, необходимое для определения F и w, получим путем подстановки (3) в уравнение изгиба срединной плоскости пластины

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{h}{D}\left(\frac{q}{h} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right). \tag{6}$$

Уравнения (5) и (6) совместно с граничными условиями позволяют разыскать две функции: напряжений F и прогибов w. Эти уравнения в другом виде получены Карманом [2].

Граничные условия зависят от условий закрепления пластинок на контуре.

Например, если края пластинки закреплены таким образом, что взаимное смещение их точек вдоль осей X и Y невозможно, то

$$U_{x=a} = U_{x=0} = 0;$$
$$V_{y=b} = V_{y=0} = 0. \tag{7}$$

граничные условия будут иметь следующие выражения:

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\mu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-E\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]dx=0;$$
$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-E\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right]dy=0. \qquad (8)$$

Зная функцию напряжений, по (3) нетрудно определить усилия в срединной плоскости пластинки; зная функцию прогибов, можно получить усилия, связанные с изгибом, пользуясь теми же формулами, что и в случае пластинки с малым прогибом. Таким образом, исследование больших прогибов пластинки сводится к решению системы из двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Решение этих уравнений в общем случае не получено [3].

Для решения задачи применен метод конечных разностей и прикладной пакет «Математика». Этим методом выполнен расчет прямоугольной плиты, загруженной равномерно распределенной нагрузкой опертой по углам. На рисунке 2 показаны прогибы плиты.

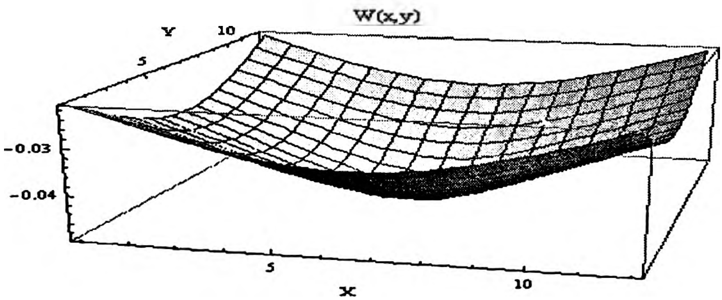

Рис. 2. Прогибы плиты опертой по углам

Литература

1. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности: учеб. пособие для студентов вузов / В.И. Самуль – М.: Высш. шк., 1982. – 264 с.
2. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки / А.С. Вольмир. – М.: Гос. изд., 1956. – 419 с.
3. Кончковский З. Плиты. Статические расчеты / З. Кончковский. – М.: Стройиздат, 1984. – 481 с.