УДК 519.2

П.И. Бабнищев, И.Н. Мельникова
Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ

Закон Пуассона определяется единственным параметром λ. Нетрудно показать, что λ есть математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону Пуассона. Рассмотрим теперь еще более универсальный закон теории вероятностей – так называемое нормальное распределение. Этот закон распределяется двумя параметрами – математическим ожиданием и дисперсией. Нормальное распределение было открыто приблизительно в одно и то же время Гауссом и Лапласом, которые исходили из совершенно различных соображении. Гаусс обнаружил, что именно в случае нормального распределения ошибок наблюдений за оценку истинного значения измеряемой величины наиболее естественно брать среднее арифметическое отдельных измерений. Лаплас исходил из открытого им чрезвычайно сильного метода для вычисления распределения вероятностей суммы случайных величин. Идеи Гаусса важны для обработки результатов измерений, они получили дальнейшее развитие в математической статистике в виде так называемого «метода наибольшего правдоподобия». Идеи Лапласа относятся к свойствам арифметических операций над большим числом случайных величин и составляют, в сущности, основу современной теории вероятностей.

Центральная предельная теорема служит одним из оснований для того, чтобы думать, что результаты наблюдений обычно имеют нормальное распределение. Если мы не знаем параметров соответствующего закона, а знаем лишь сами наблюдения ξ_1, $\xi_2,...,\xi_n$, то существуют способы приближенно определить параметры. Именно в соответствии с законом больших чисел

$$a = M\xi_i \approx \frac{1}{n}(\xi_1 + ... + \xi_n) = \overline{\xi}.$$

Можно показать, что

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{n-1}\sum_{i-1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2 = s^2.$$

Разработана так называемая «теория ошибок», которая позволяет решить вопрос о точности найденных таким путем приближенных значений для а и σ^2.

В общем наблюдения $\xi_1,...,\xi_n$, обычно неплохо описываются найденным таким образом нормальным распределением. Иными словами, если через $F(x)$ мы обозначим вероятность $P\{\xi_1 < x\}$ каждому отдельному наблюдению быть меньше x, через $N\{x;\overline{\xi},s\}$ – соответствующую вероятность, найденную из нормального распределения, то $F(\mathrm{x}) \approx \mathrm{N}(x;\overline{\xi},\mathrm{s})$.

Но приближенное равенство иногда нарушается весьма чувствительным образом. Речь идет о значениях x, отвечающих значениям $F(x)$, близким к 0 или 1. Это так называемые «хвосты» функции распределения $F(x)$. Рассмотрим сначала, почему «хвосты» имеют особое практическое значение.

Предположим, что мы собираемся построить какое-нибудь сооружение (например, Останкинскую телевизионную башню), которому предстоит выдерживать значительные ветровые нагрузки (или, если угодно, водосбросное сооружение, которому предстоит пропускать паводковые воды, и т. д.). Мы стремимся рассчитать свое сооружение на такую большую скорость ветра, которая встречается достаточно редко, например раз в сто лет. Поэтому если $\xi(t)$ – скорость ветра в момент t, то требуется указать такое число x, что $P\left\{\max\limits_{0<t<1}\xi(\mathrm{t})\geq \mathrm{x}\right\}=0,01$, где время t измеряется в годах и $\max\limits_{0\leq t\leq 1}\xi(\mathrm{t})$ обозначает наибольшую скорость ветра в течение года. Допустим, что известны значения ξ_1, $\xi_2,...,\xi_n$ максимальной скорости ветра, достигнутой за первый, второй, n- й годы, в течение которых ведутся метеорологические наблюдения. Правда, на самом деле сплошные записи скорости ветра на метеостанциях не велись; скорость ветра измерялась несколько раз в день, так что максимальные значения скорости ветра за год, в сущности, не известны. Но пока отвлечемся от этого крайне существенного затруднения.

Итак, имеются наблюдения ξ_1, $\xi_2,...,\xi_n$ случайной величины ξ – максимальной скорости ветра за год, и мы хотим назначить такое x, чтобы $P\{\xi\geq x\}=0,01$. Если бы число n было очень велико, то x следовало бы выбрать таким образом, чтобы при мерно одна сотая часть из величин $\xi_1,...,\xi_n$ превосходила x. Беда в том, что число n, т. е. число лет, за которые имеются наблюдения, гораздо меньше 100. Таким образом, если x таково, что $P\{\xi\geq x\}=0,01$, т. е. для каждого i $P\{\xi\geq x\}=0,01$, то число величин $\xi_1,...,\xi_n$, превосходящих x, подчиняется закону Пуассона с параметром $\lambda=0,01n<1$. Отсюда вытекает, что, скорее всего, все наши наблюдения $\xi_1,...,\xi_n$ меньше x, поэтому единственное, что можно сказать, x должно быть больше всех $\xi_1,...,\xi_n$. У нас нет никакой оценки для x сверху. Поэтому возникает желание «сгладить» наши наблюдения $\xi_1,...,\xi_n$, каким-либо законом, например нормальным законом $N(\mathrm{x};\bar{\xi}\mathrm{s})$, определить x из уравнения $N(\mathrm{x};\bar{\xi},\mathrm{s})=1-0,01=0,99$.

Иначе говоря, предлагается считать «хвосты» неизвестной функции $F(x)$ совпадающими с «хвостами» нормального закона. Такие действия не заслуживают доверия. Для этого утверждения имеются как теоретические, так и опытно-статистические основания.

Теоретические основания заключаются в том, что центральная предельная теорема утверждает лишь, что разность между точной функцией распределения $P\left\{s^*_n<x\right\}$ и нормальным законом мала

$$P\left\{s^*_n<x\right\}-N(\mathrm{x})\to 0.$$

Таким образом, в области вероятностей, близких к 1 (а также в области вероятностей, близких к 0), использование нормального приближения может дать (и, как правило, действительно дает) большую относительную ошибку, в то время как в согласии с центральной предельной теоремой абсолютная ошибка будет мала.

Отношение $\left[1-P\left\{s^*_n<x\right\}\right]:\left[1-N(x)\right]$ исследуется в теории вероятностей с помощью так называемых «теорем о больших уклонениях». Но практическое значение таких теорем недостаточно ясно. Они, впрочем, показывают, что результат не улучшится, если вместо нормального распределения применять другие часто встречающиеся распределения.

Что касается имеющегося статистического опыта работы с «хвостами» распределений, то он показывает, что поведение хвостов нерегулярно. Возможно, что на «хвосты» оказывают особое влияние нарушения статистической однородности, повлиявшие на исход отдельных опытов. В тех случаях, когда это так, проблема описания «хвостов» распределения статистическими методами является безнадежной.

Проблема описания возможных «раз в сто лет значений скорости ветра» осложняется еще тем, что речь идет о значениях скорости ветра, максимальных за год. Если значение скорости ветра в данный момент естественно считать нормально распределенным, то максимальное значение за год естественно было бы рассматривать с помощью какого-то распределения для экстремальных значений. Но эти распределения выведены лишь для независимых величин, так что не могут учесть эффект постепенного нарастания скорости ветра в определенных метеорологических условиях. Кроме того, сама теория экстремальных значений часто прилагается к фактическим данным с большими натяжками.