О ПОСТРОЕНИИ И ВИЗУАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЮЩИХ МОДЕЛИ ХЕМОСТАТА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОДАЧЕЙ ВЕЩЕСТВА

А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина (Брест, Белурусь)
achichurin@gmail.com, shvichkina@tut.by

Система дифференциальных уравнений, описывающих процесс культивирования микробного сообщества в хемостате при наличии одного субстрата, записывается в виде

$$S'(t) = f(t) - S(t) - \frac{m_1 x_1(t) S(t)}{a_1 + S(t)} - \frac{m_2 x_2(t) S(t)}{a_2 + S(t)},$$

$$x_1'(t) = \left(\frac{m_1 S(t)}{a_1 + S(t)} - 1\right) x_1(t), \quad x_2'(t) = \left(\frac{m_2 S(t)}{a_2 + S(t)} - 1\right) x_2(t), \tag{1}$$

где $S(t), x_1(t), x_2(t)$ обозначают плотности питательного субстрата и микроорганизмов в момент времени t, $f(t)$ — управляющая функция, определяющая скорость подачи питательного субстрата. Из практических соображений ищем решения системы (1), удовлетворяющие неотрицательным начальным условиям

$$S(0) = S_0 \geqslant 0, \quad x_1(0) = x_1^0 \geqslant 0, \quad x_2(0) = x_2^0 \geqslant 0. \tag{2}$$

Задача Коши (1), (2) рассматривалась в работе [2], где предложен метод решения, основанный на использовании теоремы Коши, теории обобщенных степенных рядов, теории систем Брио и Буке.

В данной работе рассматривается задача Коши (1), (2), где $f(t) = a\sin(\omega t) + b$; a, ω, b — заданные действительные числа, отличные от нуля. В процессе построения решения возникает уравнение Абеля второго рода, которое интегрируется в явном виде.

Теорема. *Система* (1) *имеет решение вида*

$$S(t) = u(t), \quad x_1(t) = \frac{\beta_1 u^2(t)(a_2 m_1 (a\sin(\omega t) + b) - a_1 m_2 \beta_2)}{2a_1 a_2 (a\sin(\omega t) + b)^2} - \frac{\beta_1 u(t)}{(a\sin(\omega t) + b)} + \beta_1,$$

$$x_2(t) = \frac{\beta_2 u^2(t)(a_1 m_2 (a\sin(\omega t) + b) - a_2 m_1 \beta_1)}{2a_1 a_2 (a\sin(\omega t) + b)^2} - \frac{\beta_2 u(t)}{(a\sin(\omega t) + b)} + \beta_2, \tag{3}$$

где $u(t)$ *— решение уравнения Абеля второго рода,* β_1, β_2 *— произвольные постоянные.*

Приводится двумерная и трехмерная визуализация решений вида (3).

Литература

1. Smith H. *Competitive Coexistence in an Oscillating Chemostat* // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1981. Vol. 40, no. 3. P. 498–522.

2. Chichurin A., Shvychkina H. *Finding the solutions with the infinite limite properties for the third order normal system of differential equations using the Mathematica system.* In: Classical and Celestial Mechanics (Selected papers) Siedlce, Wydawnictwo Collegium Mazovia, 2012. P. 20–28.