УДК 519.2

П. А. КОТЫШ, И. Н. МЕЛЬНИКОВА
Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

КАРТИНА ДВИЖЕНИЯ МОЛЕКУЛ В ГАЗЕ, НАХОДЯЩЕМСЯ В ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОМ РАВНОВЕСИИ

Пусть масса газа m находится в тепловом равновесии. Газ занимает объем V и характеризуется температурой T и давлением p.

Каждая молекула газа движется с постоянной по модулю и направлению скоростью, пока не столкнется с какой-либо другой молекулой или не налетит на стенку. В целом картина движения молекул представляется хаотичной: молекулы движутся в разных направлениях с разными скоростями, проходят беспорядочные столкновения, приводящие к изменениям направления движения и значения скорости молекул. Сделаем мысленную «фотографию» положений молекул в некоторый момент времени. Точки молекулы достаточно равномерно заполняют объем сосуда. Пусть N – полное число молекул в сосуде: $N = N_A m / M$, где N_A – постоянная Авогадро. В любом месте внутри сосуда в любой момент времени число молекул в единице объема будет в среднем одним и тем же: N / V. Та или иная молекула с одинаковой вероятностью может быть обнаружена в любом месте внутри сосуда.

Обозначим через $G(x, y, z)\,\Delta x \Delta y \Delta z$ вероятность обнаружить молекулу внутри объема $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ у точки с координатами x, y, z. Точнее говоря, это есть вероятность того, что x-координата молекулы окажется в интервале значений от x до $x + \Delta x$, y-координата от y до $y + \Delta y$, z-координата от z до $z + \Delta z$. При достаточно малых $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ функция $G(x, y, z)$ может рассматриваться как плотность вероятности обнаружить молекулу в точке (x, y, z). Плотность вероятности в данном случае не зависит от координат: $G = const$. Учитывая, что вероятность обнаружить молекулу где-нибудь внутри сосуда равна единице, запишем: $\int\limits_V G dV = 1$, или $G \int\limits_V dV = GV = 1$.

Таким образом, $G = 1 / V$.

Итак, где бы внутри сосуда ни был выбран единичный объем, вероятность того, что некоторая молекула окажется внутри этого объема, равна $1 / V$, т. е. равна отношению единичного объема к объему сосуда. Обобщая этот вывод, можем утверждать, что вероятность обнаружить некоторую молекулу внутри объема V_0 равна V_0 / V.

Изучим скорости молекул в газе: число молекул должно уменьшаться как в области очень малых, так и в области очень высоких скоростей. Рассматривая скорости молекул, удобно использовать пространство скоростей, в котором по осям координат откладываются значения проекций скорости молекулы $(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$. Абсцисса точки есть x-проекция скорости молекулы, а ордината – y-проекция, аппликата – z-проекция.

Пусть $F(\upsilon_x)\Delta\upsilon_x$ – вероятность того, что некоторая молекула (в некоторый момент времени) имеет x-проекцию скорости в интервале значений от υ_x до $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$. При этом остальные две проекции скорости молекулы могут быть какими угодно. При малых $\Delta\upsilon_x$ функция $F(\upsilon_x)$ есть плотность вероятности обнаружить молекулу, имеющую проекцию скорости υ_x.

Великий английский физик Джеймс Клерк Максвелл (1831–1879) показал, что плотность вероятности $F(\upsilon_x)$ соответствует закону Гаусса:

$$F(\upsilon_x) = Ae^{-\alpha\upsilon_x^2}, \tag{1}$$

где α – некоторый параметр $(\alpha > 0)$. Постоянная A определяется из равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\upsilon_x)d\upsilon_x = 1, \tag{2}$$

выражающего тот факт, что вероятность молекуле иметь какую-нибудь x-проекцию скорости равна единице. Подставляя в (2), получаем $A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\upsilon_x^2}d\upsilon_x = 1$.

Интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\upsilon_x}d\upsilon_x$ известен в математике как интеграл Пуассона, он равен $\sqrt{\pi / \alpha}$. $A = \sqrt{\alpha / \pi}$.

В итоге перепишем соотношение (1) в виде: $F(\upsilon_x) = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha\upsilon_x^2}$.

Такими же функциями F описываются плотности вероятности для y-проекции и z-проекции скорости молекулы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель, А. Д. Курс теории случайных процессов / А. Д. Вентцель. – М. : Наука, 1975. – 319 с.

2. Пытьев, И. П. Курс теории вероятностей и математической статистики для физиков / И. П. Пытьев, И. А. Шишмарев. – М. : МГУ, 1983. – 252 с.