УДК 519.2

И.Н. МЕЛЬНИКОВА, В.А. ГОРДИЕНКО
Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

ПРИЛОЖЕНИЯ ФОРМУЛЫ БЕРНУЛЛИ

Одним из проявлений увлеченности математикой является желание узнать, нет ли кроме изученных других подходов к решению задачи, доказательству теоремы, выводу формулы.

Так, например, хорошее понимание смысла и назначения формулы Бернулли о вероятности $P_n(m)$ иметь m успехов в n независимых испытаниях прокладывает прямую тропинку к доказательству справедливости формулы разложения бинома Ньютона $(a + b)^n$ для любых a, b и натурального n. Пусть в n независимых испытаниях «успех» имеет место m раз с вероятностью p в каждом испытании и «неудача» имеет место $n - m$ раз с вероятностью $q = 1 - p$ в каждом испытании. По формуле $P_n(m) = C^n_m p^m q^{n-m}$ можно вычислить

– $P_n(0)$ – вероятность события A_0 – 0 успехов в n испытаниях;
– $P_n(1)$ – вероятность события A_1 – 1 успехов в n испытаниях;
– $P_n(2)$ – вероятность события A_2 – 2 успехов в n испытаниях и т.д.;
– $P_n(n)$ – вероятность события A_n – n успехов в n испытаниях.

Ясно, что A_0, A_1, … , A_n – несовместные события и их объединение (сумма) образует достоверное событие, поэтому

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1. \tag{1}$$

Из $q = 1 - p \Rightarrow p + q = 1$ следует, что и

$$(p + q)^n = 1. \tag{2}$$

Сравнивая равенства (1) и (2), заключаем, что

$$(p + q)^n = \sum_{m=0}^{n} P_n(m) = \sum_{m=0}^{n} C^m_n p^m q^{n-m}. \tag{3}$$

А это и есть формула разложения бинома Ньютона для частного случая $a + b = 1$ при $0 \le a \le 1$ и $0 \le b \le 1$.

Обобщим формулу (3) сначала на случай произвольных положительных a и b. Сумму $a + b$ умножим и разделим на $c = a + b$, $c\cdot\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)^n$.

Тогда $(a + b)^n = c\cdot\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)^n$.

Законно положить $\frac{a}{c} = p$ и $\frac{b}{c} = q$, т.к. $\frac{a}{c} < 1$, $\frac{b}{c} < 1$ и $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1$

Тогда

$$(a + b)^n = c^n(p + q)^n = c^n\cdot\sum_{m=0}^{n} C^m_n p^m q^{n-m} =$$

$$= c^n\cdot\sum_{m=0}^{n} C^m_n \left(\frac{a}{c}\right)^m \left(\frac{b}{c}\right)^{n-m} = c^n\cdot\sum_{m=0}^{n} C^m_n \frac{a^m b^{n-m}}{c^n}.$$

После сокращения на c^n получаем:

$$(a + b)^n = \sum_{m=0}^{n} C^m n\, a^m b^{n-m},$$

что и требовалось доказать для случая, когда a и b положительны.

Пусть теперь $a < 0$ и $b < 0$. Это значит, что $c = a + b$ также отрицательно, но $p = \frac{a}{c}$ и $q = \frac{b}{c}$ оба положительны, следовательно, выведенная формула бинома Ньютона имеет место и в случае отрицательных a и b.

Пусть, наконец, a и b разных знаков. Достаточно ограничиться дополнительным соглашением $a + b > 0$, откуда $a > -b$. Положим для определенности, что $a > 0$ и выберем положительное c такое, что $-b < c < a$.

Тогда $a + b = (a - c) + (b + c)$.

Т.к. слагаемые в скобках оба положительные, то на основании доказанного $(a + b)^n = \sum_{m=0}^{n} C^m n(a - c)^m (b + c)^{n-m}$.

Левая часть этого равенства не зависит от c, поэтому и в правой части после раскрытия скобок и приведения подобных членов останется только сумма $\sum_{m=0}^{n} C^m n\, a^m b^{n-m}$.

Осталось разобрать случай, когда хотя бы одно из чисел, a или b, равно нулю. Пусть, например, $b = 0$. Тогда

$$\sum_{m=0}^{n} C^m n\, a^m b^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} C^m n\, a^m 0^{n-m} = C^n n\, a^n \cdot 0^0 =$$
$$= a^n = (a + 0)^n = (a + b)^n,$$

т.к. $0^0 = 1$. Следовательно, формула разложения бинома Ньютона верна и в этом случае. Так, формула бинома Ньютона окончательно обоснована для произвольных a, b и натурального n.