УДК 517

И.Н. ГРИБЧУК, И.Н. МЕЛЬНИКОВА
Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему вида

$$\frac{dx_i}{dz}=\frac{p_i(z)x_1^{p_{i1}}x_2^{p_{i2}}x_3^{p_{i3}}+P_i^1(x_1,x_2,x_3,z)}{q_i(z)x_1^{q_{i1}}x_2^{q_{i2}}x_3^{q_{i3}}+Q_i^1(x_1,x_2,x_3,z)}=\frac{P_i(x_1,x_2,x_3,z)}{Q_i(x_1,x_2,x_3,z)} \qquad (1)$$

где x_1,x_2,x_3,z – комплексные переменные, $P_i,Q_i(i=1,2,3)$ – полиномы относительно x_1,x_2,x_3, коэффициенты которых являются аналитическими функциями относительно z. Через p_{ij} и q_{ij} $(i=1,2,3,\ j=1,2,3)$ обозначены степени многочленов P_i и $Q_i(i=1,2,3)$ по x_1,x_2,x_3, не содержащиеся в $P^1{}_i$ и $Q^1{}_i(i=1,2,3)$. Изучим для нее условия существования решений со свойством

$$f_1(z)\to\infty,\ f_2(z)\to\infty,\ f_3(z)\to\infty \text{ при } z\to z_0. \qquad (2)$$

Найдем условия, при выполнении которых система (1) имеет единственное решение с подвижными полярными особыми точками или вовсе не имеет решений с подвижной особой точкой, при приближении к которой хотя бы по некоторому пути все компоненты решения стремились бы к бесконечности.

С помощью замены $x_i=\dfrac{1}{u_i}$ $(i=1,2,3)$ сведем систему (1) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dz}&=-\frac{p_1(z)+(\ldots)}{q_1(z)+(\ldots)}u_1^{-r_{11}+2}u_2^{-r_{12}}u_3^{-r_{13}},\\ \frac{du_2}{dz}&=-\frac{p_2(z)+(\ldots)}{q_2(z)+(\ldots)}u_1^{-r_{21}}u_2^{-r_{22}+2}u_3^{-r_{23}},\\ \frac{du_3}{dz}&=-\frac{p_3(z)+(\ldots)}{q_3(z)+(\ldots)}u_1^{-r_{31}}u_2^{-r_{32}}u_3^{-r_{33}+2},\end{aligned} \qquad (3)$$

где $r_{ij}=p_{ij}-q_{ij}$ $(i=1,2,3,\ j=1,2,3)$.

Наряду с системой (3) будем рассматривать и системы (4)–(6):

Через $(\ldots)$ обозначены функции, которые обращаются в ноль при любом из $u_i=0(i=1,2,3)$. С помощью метода, основанного на голоморфности правых частей указанных систем дифференциальных уравнений, мы доказали следующие теоремы.

$$\frac{dz}{du_1} = -\frac{q_1(z)+(\ldots)}{p_1(z)+(\ldots)} u_1^{r_{11}-2} u_2^{r_{12}} u_3^{r_{13}},$$

$$\frac{du_2}{du_1} = -\frac{p_2(z)q_1(z)+(\ldots)}{q_2(z)p_1(z)+(\ldots)} u_1^{r_{11}-r_{21}-2} u_2^{r_{12}-r_{22}+2} u_3^{r_{13}-r_{23}}, \tag{4}$$

$$\frac{du_3}{du_1} = -\frac{p_3(z)q_1(z)+(\ldots)}{q_3(z)p_1(z)+(\ldots)} u_1^{r_{11}-r_{31}-2} u_2^{r_{12}-r_{32}} u_3^{r_{13}-r_{33}+2},$$

$$\frac{dz}{du_2} = -\frac{q_2(z)+(\ldots)}{p_2(z)+(\ldots)} u_1^{r_{21}} u_2^{r_{22}-2} u_3^{r_{23}},$$

$$\frac{du_1}{du_2} = -\frac{q_2(z)p_1(z)+(\ldots)}{p_2(z)q_1(z)+(\ldots)} u_1^{r_{21}-r_{11}+2} u_2^{r_{22}-r_{12}-2} u_3^{r_{23}-r_{13}}, \tag{5}$$

$$\frac{du_3}{du_2} = -\frac{p_3(z)q_2(z)+(\ldots)}{q_3(z)p_2(z)+(\ldots)} u_1^{r_{21}-r_{31}} u_2^{r_{22}-r_{32}-2} u_3^{r_{23}-r_{33}+2},$$

$$\frac{dz}{du_3} = -\frac{q_3(z)+(\ldots)}{p_3(z)+(\ldots)} u_1^{r_{31}} u_2^{r_{32}} u_3^{r_{33}-2},$$

$$\frac{du_1}{du_3} = -\frac{q_3(z)p_1(z)+(\ldots)}{p_3(z)q_1(z)+(\ldots)} u_1^{r_{31}-r_{11}+2} u_2^{r_{32}-r_{12}} u_3^{r_{33}-r_{13}-2}, \tag{6}$$

$$\frac{du_2}{du_3} = -\frac{p_2(z)q_3(z)+(\ldots)}{q_2(z)p_3(z)+(\ldots)} u_1^{r_{31}-r_{21}} u_2^{r_{32}-r_{22}+2} u_3^{r_{33}-r_{23}-2},$$

Теорема 1. *При выполнении условий*

$$r_{11}=2, r_{12}=0, r_{13}=2, r_{21}=0, r_{22}=2, r_{23}=0, r_{31}\le 0, r_{32}\le 0, r_{33}=2, \tag{7}$$

или

$$r_{11}=2, r_{12}=0, r_{13}=2, r_{21}\le 0, r_{22}=2, r_{23}\le 0, r_{31}=0, r_{32}=0, r_{33}=2, \tag{8}$$

или

$$r_{11}=2, r_{12}\le 0, r_{13}\le 0, r_{21}\le 0, r_{22}=2, r_{23}=0, r_{31}=0, r_{32}=0, r_{33}=2, \tag{9}$$

и любом конечном $z_0 \in D$, *для которого*

$$q_1(z_0)q_2(z_0)q_3(z_0) \ne 0, \tag{10}$$

система (3) *имеет единственное решение*

$$x_i = f_i(z), (i=1,2,3), \tag{11}$$

со свойством

$$f_1(z)\to\infty,\ f_2(z)\to\infty,\ f_3(z)\to\infty \text{ при } z\to z_0.$$

Это решение имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i(z-z_0)^{-m+i}\ (a_0\ne 0, m>0),\\ x_2 &= \sum_{i=0}^{\infty}\beta_i(z-z_0)^{-n+i}\ (b_0\ne 0, n>0),\\ x_3 &= \sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i(z-z_0)^{-l+i}\ (c_0\ne 0, l>0),\end{aligned} \tag{12}$$

Точка z_0 *для функции этого решения является полюсом.*

◀ При условии (7–10) правые части системы (3) представляют собой однозначные аналитическиефункции относительно u_1, u_2, u_3 и z в окрестности точки $(0,0,0,z_0)$. Тогда, по теореме Коши, эта система имеет единственное голоморфное решение в окрестности точки z_0 – решение $u_i(z) (i=1,2,3)$, удовлетворяющее начальным условиям $u_i(z)=0$. Это решение имеет вид

$$
\begin{gathered}
u_1 = \sum_{\sigma=0}^{\infty} a_\sigma (z-z_0)^{m+\sigma} \ (a_0 \neq 0, m>0), \\
u_2 = \sum_{\sigma=0}^{\infty} b_\sigma (z-z_0)^{n+\sigma} \ (b_0 \neq 0, n>0), \\
u_3 = \sum_{\sigma=0}^{\infty} c_\sigma (z-z_0)^{l+\sigma} \ (c_0 \neq 0, l>0),
\end{gathered} \tag{13}
$$

Возвращаясь от системы (3) к системе (1), получим для нее решение (11) со свойством (2). Существование у системы (1) решения (11) со свойством (2) доказано.

Покажем, что такое решение может быть только единственным. Пусть $x_i = \varphi_i(z) (i=1,2,3)$ – любое решение системы (1), обладающее свойством $\varphi_i(z) \to \infty \ (i=1,2,3)$ при $z \to z_0$. Тогда решение системы (3)

$$
x_i = \frac{1}{\varphi_i(z)} \equiv \Phi_i(z) \ (i=1,2,3) \tag{14}
$$

будет обладать свойством $\Phi_i(z) \to 0 \ (i=1,2,3)$ при $z \to z_0$. По теореме Пенлеве, это означает, что решение (14) системы (3) совпадает в окрестности точки z_0 с голоморфным решением (13), полученным по теореме Коши. Тогда решение $x_i = \varphi_i(z) \ (i=1,2,3)$ системы (1) совпадает с решением(12), что и доказывает единственность решения. ▶

Теорема 2. *При выполнении условий*

$$
r_{11} < 2, r_{12} \le 0, r_{13} \le 2, r_{21} \le 0, r_{22} \le 2, r_{23} \le 0, r_{31} \le 0, r_{32} \le 0, r_{33} \le 2, \tag{15}
$$

или

$$
r_{11} \le 2, r_{12} \le 0, r_{13} \le 0, r_{21} \le 0, r_{22} \le 2, r_{23} \le 0, r_{31} \le 0, r_{32} \le 0, r_{33} \le 2, \tag{16}
$$

или

$$
r_{11} \le 2, r_{12} \le 0, r_{13} \le 0, r_{21} \le 0, r_{22} \le 2, r_{23} \le 0, r_{31} \le 0, r_{32} \le 0, r_{33} < 2, \tag{17}
$$

или

$$
r_{11} = 2, r_{12} < 0, r_{13} < 0, r_{21} < 0, r_{22} = 2, r_{23} < 0, r_{31} < 0, r_{32} < 0, r_{33} = 2, \tag{18}
$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого имеет место (10), *система* (1) *не имеет решений, обладающих свойством* (2) *при $z \to z_0$ хотя бы по некоторому пути L.*

Теорема 3. *При выполнении условий*

$$
\begin{gathered}
r_{11} \ge \max\{2, r_{21}+2, r_{31}+2\}, \ r_{12} \ge \max\{0, r_{32}\}, \ r_{13} \ge \max\{0, r_{23}\}, \\
r_{22} = r_{12}+2, \ r_{33} = r_{13}+2,
\end{gathered} \tag{19}
$$

и любом конечном $z_0 \in D$, *для которого имеет место*

$$p_1(z_0)q_2(z_0)g_3(z_0) \neq 0, \tag{20}$$

система (1) *имеет единственное решение* (11) *со свойством* (2). *Это решение имеет вид*

$$x_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (z - z_0)^{(i-1)/m} \ (\alpha_0 \neq 0, m > 0),$$
$$x_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (z - z_0)^{(i-n)/m} \ (\beta_0 \neq 0, n > 0), \tag{21}$$
$$x_3 = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (z - z_0)^{(i-l)/m} \ (\gamma_0 \neq 0, l > 0),$$

для всех функций этого решения z_0 *является полюсом, как правило, критическим.*

Теорема 4. *При выполнении условий*

$$r_{11} \geq \max\{2, r_{21}+2, r_{31}+2\},\ r_{12} \geq \max\{0, r_{32}\},\ r_{13} \geq \max\{0, r_{23}\}, \tag{27}$$
$$r_{22} < r_{12}+2,\ r_{33} \leq r_{13}+2,$$

или

$$r_{11} \geq \max\{2, r_{21}+2, r_{31}+2\},\ r_{12} \geq \max\{0, r_{32}\},\ r_{13} \geq \max\{0, r_{23}\}, \tag{28}$$
$$r_{22} \leq r_{12}+2,\ r_{33} < r_{13}+2,$$

и любом конечном $z_0 \in D$, *для которого имеет место* (20), *система* (1) *не имеет решений, обладающих свойством* (2) *при* $z \to z_0$ *хотя бы по некоторому пути* L.

◄ Точки $z_0 \in D$, в которых 1) $g_1(z_0)g_2(z_0)g_3(z_0)=0$, 2) $g_1(z_0)g_2(z_0)g_3(z_0)=0$, 3) $p_2(z_0)g_1(z_0)g_3(z_0)=0$ отнесем к подвижным точкам системы (1). Тогда из ранее изложенного следует, что при выполнении любого из условий (7–9), (19), (29), (39), (42) система (1) имеет единственное решение, для всех функций которого точки z_0 является подвижным полюсом. А при выполнении любого из условий (13–16), (25), (26), (31), (32), (36), (37) система (2) вовсе не имеет решений с подвижной особой точкой, при приближении к которой хотя бы по некоторому пути все функции решений стремились бы к бесконечности.

Таким образом, полученные условия выделяют классы систем вида (1), не имеющих решений (11) со свойством (2) при $z \to z_0$. Проведенные исследования позволяют дать более полную характеристику аналитических свойств решений системы трех дифференциальных уравнений первого порядка с рациональными правыми частями вида

$$\frac{dx_i}{dz} = \frac{P_i(x_1, x_2, x_3, z)}{Q_i(x_1, x_2, x_3, z)},\ i = (1,2,3). \ ►$$