УДК 517.925

Е.В. ГРИЦУК, А.Н. МАРТИНОВИЧ
Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЕРАРХИИ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ НА СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ

1. Введение. Задача определения условий наличия свойства Пенлеве [1, 2] у обыкновенных дифференциальных уравнений порядка выше двух является актуальной в связи с гипотезой о возможности применения к задачам с уравнениями в частных производных метода обратной задачи рассеяния (МОЗР), в случае их редукции к уравнениям Пенлеве типа [3]. При возрастании порядка дифференцирования самый универсальный метод –

метод малого параметра – приводит к многочисленным случаям уравнений, требующих дальнейших исследований. Поэтому возник способ построения дифференциальных уравнений высших порядков посредством воздействия специальных операторов на уравнения Пенлеве типа в надежде получить уравнения того же свойства. Получаемые уравнения хотя и сохраняют некоторые свойства стартовых уравнений, из-за специфики применяемых операторов требуют исследований на свойство Пенлеве. Одной из таких последовательностей уравнений является иерархия уравнения Риккати.

2. Структура уравнений иерархии Риккати.

Иерархия уравнений Риккати может быть записана в виде

$$D_R^n w = 0, n = 1,2,3,..., \tag{1}$$

где оператор D_R имеет вид

$$D_R = \frac{d}{dz} + w. \tag{2}$$

Получаем:

при $n = 1$

$$w' + w^2 = 0, \tag{3}$$

при $n = 2$

$$w'' + w^3 + 3ww' = 0, \tag{4}$$

при $n = 3$

$$w''' + w^4 + 6w^2w' + 4ww'' + 3(w')^2 = 0, \tag{5}$$

при $n = 4$

$$w^{(4)} + w^5 + 10w^3w' + 10w^2w'' + 15w(w')^2 + 5ww''' + 10w'w'' = 0. \tag{6}$$

Относительно вида уравнения (1) можно доказать теорему.

Теорема. *Уравнение* (1), *при* $n \geq 2$, *имеет вид*

$$w^{(n)} + w^{n+1} + P_n(w, w', ..., w^{(n-1)}) = 0, \tag{7}$$

где P_n *– полином от* $w, w', ..., w^{(n-1)}$ *степени n, вида*

$$P_n(w, w', ..., w^{(n-1)}) = \sum_{\substack{k_0 \leq n-1 \\ \langle k \rangle = n+1}} a_{k_0 k_1 ... k_{n-1}} w^{k_0} (w')^{k_1} ... (w^{(n-1)})^{k_{n-1}}, \tag{8}$$

$a_{k_0 k_1 ... k_{n-1}}$ *– константы, через* k *обозначен мультииндекс* $k = (k_0, k_1, ..., k_{n-1})$ *с нормой*

$$\langle k \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} (p+1) k_p. \tag{9}$$

◄ Осуществим доказательство теоремы методом математической индукции по n – порядку дифференциального уравнения (1). Для случая $n = 2$

первые два слагаемые в уравнении (4) совпадают с первыми двумя слагаемыми в формуле (7), а третье слагаемое уравнения (4) представляет собой полином $P_2 = 3ww'$. В силу формулы (9) норма мультииндекса k монома, входящего в P_2, равна $1\cdot 1 + 2\cdot 1 = 2 + 1 = 3$, то есть $n + 1$. Значит, первый пункт метода математической индукции выполняется. Предположим, что формула (7) верна при $n = m$, докажем её истинность при $n = m + 1$. При $n = m + 1$, из формул (1) и (7), получим

$$D_R^{m+1}w = \left(\frac{d}{dz} + w\right)\left(w^{(m)} + w^{m+1} + P_m\left(w, w', \ldots, w^{(m-1)}\right)\right) =$$

$$= w^{(m+1)} + w^{m+2} + ww^{(m)} + (m+1)w^m w' + wP_m + P'_m. \qquad (10)$$

Первые два слагаемые из (10) соответствуют первым двум слагаемым формулы (7) для $n = m + 1$. Остаётся показать, что оставшиеся слагаемые удовлетворяют заявленным ограничениям (8) на полином P_{m+1}. Так, норма мультииндекса третьего слагаемого, согласно формуле (9), равна $1\cdot 1 + (m + 1)\cdot 1 = m + 2 = (m + 1) + 1$, то есть третье слагаемое удовлетворяет ограничениям на мономы, входящие в полином P_{m+1}. Четвёртое слагаемое имеет норму $1\cdot m + (1 + 1)\cdot 1 = m + 2 = (m + 1) + 1$, а значит, также подходит. Слагаемое wP_m имеет мономы с нормой мультииндекса, равной

$$1\cdot(k_0 + 1) + 2\cdot k_1 + \ldots + m\, k_m = 1 + 1\cdot k_0 + 2\cdot k_1 + \ldots + m\, k_m = 1 + \langle k\rangle = 1 + (m + 1),$$

то есть удовлетворяет требованию индукции. Докажем, что слагаемые полинома P'_m также удовлетворяют требованию индукции. Среди мономов полинома P'_m присутствуют два различных типа:

$$k_j a_{k_0 k_1 \ldots k_{m-1}} w^{k_0}\left(w'\right)^{k_1} \ldots \left(w^{(j)}\right)^{k_j - 1}\left(w^{(j+1)}\right)^{k_{j+1}+1} \ldots \left(w^{(m-1)}\right)^{k_{m-1}},\ j = 0, 1, \ldots, m - 2, \qquad (11)$$

$$k_{m-1} a_{k_0 k_1 \ldots k_{m-1}} w^{k_0}\left(w'\right)^{k_1} \ldots \left(w^{(m-1)}\right)^{k_{m-1}-1} w^{(m)}. \qquad (12)$$

Вычислим норму мультииндекса монома из формулы (11), она равна

$$1\cdot k_0 + 2\cdot k_1 + \ldots + (j + 1)\cdot(k_j - 1) + (j + 2)\cdot(k_{j+1} + 1) + \ldots + m\cdot k_{m-1} =$$
$$= 1\cdot k_0 + 2\cdot k_1 + \ldots + (j + 1)\cdot k_j + (j + 2)\cdot k_{j+1} + \ldots + m\cdot k_{m-1} + 1 = \langle k\rangle + 1 = (m + 1) + 1.$$

Остаётся найти норму мультииндекса монома из (12), она равна

$$1\cdot k_0 + 2\cdot k_1 + \ldots + m\cdot(k_{m-1} - 1) + (m + 1)\cdot 1 = 1\cdot k_0 + 2\cdot k_1 + \ldots + m\cdot k_{m-1} + 1 =$$
$$= \langle k\rangle + 1 = (m + 1) + 1.$$

Таким образом, структура полинома P_{m+1} подтверждается. Для завершения доказательства требуется установить ограничение на k_0. Теперь обозначается через k мультииндекс из полинома P_{m+1}. Из условия $\langle k\rangle = m + 2$, получаем $k_0 = m + 2 - 2\cdot k_1 - \ldots - (m + 1)\cdot k_m$, так как целые $k_j \geq 0$, то отсюда следует, что максимально возможное значение $k_0 = m + 2$. Но моном с мультииндексом $k = (m + 2, 0, \ldots, 0)$ представляет собой второе слагаемое формулы (10), то есть в полином P_{m+1} не входит. Значение $k_0 = m + 1$ в принципе невозможно, так как не существует мультииндекса k, удовлетворяющего условию $\langle k\rangle = m + 2$. Таким образом, максимальное значение $k_0 = m = (m + 1) - 1$. Теорема доказана. ▶

Лемма. *Если решение уравнения* (1) *имеет подвижный полюс, то только первого порядка.*

◀ Для определения порядка q подвижного полюса в уравнении (7) произведём замену $w \sim c_0 (z - z_0)^{-q}$. Ведущими членами уравнения (7) являются $w^{(n)}$, слагаемые полинома (8) и, возможно, слагаемое w^{n+1}. В первом случае имеем

$$q + n = qk_0 + (q + 1)k_1 + ...+ + (q + n - 1)k_{n-1}$$

или

$$q + n = (q - 1)(k_0 + k_1 + ...+ k_{2n-2}) + \langle k \rangle.$$

Так как $\langle k \rangle = n + 1$, то имеем $(q - 1)(k_0 + k_1 + ...+ k_{2n-2} - 1) = 0$. Условие $k_0 + k_1 + ...+ k_{2n-2} = 1$ вступает в противоречие с ограничением $\langle k \rangle = n + 1$. Значит, $q = 1$. Во втором случае получаем условие $q + n = q\,(n + 1)$. Откуда находим $q = 1$. Лемма доказана. ▶

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс. – Харьков : ГНТИУ, 1939. – 719 с.

2. Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. – 436 с.

3. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – М. : Мир, 1987. – 478 с.