УДК 51-74

**Н.А. ОСТРЕЙКО, В.А. КОФАНОВ**
Брест, БрГТУ

## РЕШЕНИЕ В MATHCAD СИСТЕМЫ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛО- И ВЛАГОПЕРЕНОСА ПО НЕЯВНОЙ СХЕМЕ

Многие нестационарные физические процессы описываются уравнениями параболического типа. К таким уравнениям относятся и нестационарные уравнения тепловлагопереноса, которые получаются на основании закона Фурье и имеют для одномерных задач следующий вид [1]

$$\begin{cases} \dfrac{dH}{dt}\cdot\dfrac{\partial t}{\partial \tau} = \nabla(\lambda\cdot\nabla t) + h_v\cdot\nabla\left(\dfrac{\delta}{\mu_R}\cdot\nabla(\varphi\cdot p_{sat})\right) \\ \dfrac{dw}{d\varphi}\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \nabla\left(D_\varphi\cdot\nabla\varphi + \dfrac{\delta}{\mu_R}\cdot\nabla(\varphi\cdot p_{sat})\right) \end{cases} \tag{1}$$

где $H$ – энтальпия влажного материала, Дж·м$^{-3}$;
$t$ – температура, °С;
$\tau$ – время, с;
$\lambda$ – коэффициент теплопроводности, Вт·м$^{-1}$·К$^{-1}$;
$h_v$ – удельная теплота парообразования, Дж·кг$^{-1}$;
$\delta$ – коэффициент диффузии пара в воздухе, кг·м·с$^{-1}$·Па$^{-1}$;
$\mu_R$ – коэффициент сопротивления;
$\varphi$ – относительная влажность воздуха;
$p_{sat}$ – давление пара, Па;
$w$ – влагосодержание, кг·м$^{-3}$;
$D_\varphi$ – коэффициент диффузионной проводимости, кг·м·с$^{-1}$.

К сожалению, аналитическое решение уравнений математической физики возможно лишь для весьма ограниченного круга задач. В большинстве случаев решение дифференциальных уравнений (1) в частных производных возможно только с использованием численных итерационных методов.

Суть данных методов состоит в дискретизации дифференциальных уравнений, то есть представлении всех или части производных в виде приближенных выражений (конечных разностей), что позволяет преобразовать дифференциальные уравнения в системы алгебраических уравнений. Для этого рассматриваемая область покрывается координатной сеткой, а все переменные заменяются сеточными функциями. Причем при решении нестационарных задач помимо координатной сетки вводится сетка времени.

$$\begin{cases} c \cdot \rho \cdot \dfrac{\Delta t}{\Delta \tau} = \dfrac{\lambda \cdot \Delta t}{\Delta h} + h_v \cdot \dfrac{\delta}{\mu_R} \cdot \dfrac{\Delta(\phi \cdot p_{sat})}{\Delta h}, \\ w'(\phi) \cdot \dfrac{\Delta \phi}{\Delta \tau} = D_w \cdot w'(\phi) \cdot \dfrac{\Delta \phi}{\Delta h} + \dfrac{\delta}{\mu_R} \cdot \dfrac{\Delta(\phi \cdot p_{sat})}{\Delta h}, \end{cases} \tag{2}$$

где $c$ – теплоемкость материала, Дж·кг$^{-1}$·К$^{-1}$;
$\rho$ – плотность материала, кг·м$^{-3}$;
$h$ – шаг сетки, м;
$w'(\varphi)$ – относительная пароемкость материала, кг·м$^{-3}$;
$D_w$ – коэффициент переноса жидкой влаги, м$^2$·с$^{-1}$.

Дискретизация по времени может быть выполнена по явной или неявной схеме. В случае явной схемы, переменные в новой точке во времени определяются исключительно из значений, уже известных в данный момент времени. Однако устойчивость такого способа зависит от определенных условий, которые в случае малого шага сетки приводят к очень малому шагу по времени. В общем случае, вычислительные усилия, направленные на решение задачи с малым промежутком времени, намного превышают усилия, направленные на более сложные вычислительные процедуры по неявной схеме. Использование неявной схемы сводит задачу к матричному уравнению, так как все переменные должны быть определены одновременно в новый момент времени. Число алгебраических уравнений в полученной системе определяется произведением числа точек координатной сетки на количество независимых переменных в исходных дифференциальных уравнениях. Тем не менее, этот способ устойчив в течение всего промежутка времени.

Для решения конечно-разностных уравнений по неявной схеме можно использовать систему компьютерной математики Mathcad. Преимущество данной системы в сравнении со средами, использующими языки программирования, заключается в том, что часть сложных процедур уже реализовано. Такими процедурами, например, являются интерполяция кубическими сплайнами, определение производной функции, решение систем уравнений с помощью обратной матрицы, операции с массивами данных и т.п. Также Mathcad позволяет сократить время на разработку и кодирование интерфейса будущей программы.

Опираясь на возможности Mathcad, алгоритм создания вычислительного документа будет следующим. Вначале определяем все переменные, функции и их производные из уравнений (2). Далее создаем программный модуль, представленный на рисунке 1, в котором текст заменяем на операции по формированию матрицы и вектора, состоящих из коэффициентов при неизвестных ($t$ и $\varphi$) и свободных членов системы уравнений, записанных для каждой точки координатной сетки.

```
tab := | V ← TΦ
       | VV ← V
       | for j ∈ 1..10
       |   | for k ∈ 1..10
       |   |   | "коэффициенты для первых двух уравнений"
       |   |   | for z ∈ 1..n − 1
       |   |   |   | "коэф-ты для уравнений"
       |   |   |   | "средних точек"
       |   |   | "коэф-ты для последних двух уравнений"
       |   |   | V ← M^(−1)·B
       |   | VV ← augment(VV, V)
       |   | TΦ ← V
       | VV
```

Рисунок 1 – Программный модуль в Mathcad для решения конечно-разностных уравнений по неявной схеме

Полученный в результате работы программного модуля массив содержит значения температуры $t$ и относительной влажности $\varphi$ в каждый момент времени. Это позволяет построить график изменения влагосодержания $w$ по толщине материала (рисунок 2) в любой расчетный момент времени, а также используя встроенный инструмент «анимация» увидеть изменения этого графика во времени.

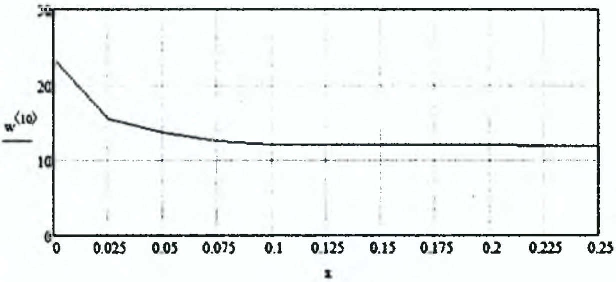


Рисунок 2 – График влагосодержания по толщине материала

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kunzel, H. M. Calculation of heat and moisture transfer in exposed building components / H. M. Kunzel, K. Kiessl // Heat mass transfer. – 1997. – Vol. 4, № 1. – P. 159–167.