УДК 519.2

И.Н. МЕЛЬНИКОВА, В.А. ГОРДИЕНКО
Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КОМБИНАТОРИКИ

В компании с друзьями, дома или в школе, проведите игру, интерес которой в выборе «оптимальной стратегии».

Заложите в барабанчик и перемешайте три одинаковые шашки. Основания шашек предварительно обработайте так, чтобы у одной были оба основания черные, у другой – одно основание черное, второе – белое, у третьей – оба основания белые. Ведущий вынимает одну шашку наугад и, не разглядывая ее (т.е. также наугад), одно из оснований показывает играющим.

Предлагается играющим угадать цвет противоположного основания, обращенного к ведущему (белое оно или черное?).

Сеанс состоит из 10 игр. Ответы регистрируются. Выигрывает игру тот, кто угадал более пяти раз.

Чтобы быть в этой игре победителем чаще своих друзей, вам следует заранее подготовиться: вскрыть вероятностные основы игры и наметить для себя, когда вы будете не ведущим, а играющим, определенную, обоснованную систему угадывания (стратегию игры).

Может быть, лучше всего не придерживаться никакой системы угадывания – называть цвет скрытого основания наугад, не думая.

Кстати говоря, математики и «бессистемность» возвели в ранг системы – разработали новое сильное направление исследований случайного, названное *рандомизацией*, от английского at random – наугад.

Кроме системы угадывания at random, можно придумать много других, как с использованием, так и без использования полученной информации о цвете основания, показанного играющим.

Например, возможны такие стратегии:

Назвать показанный цвет, а затем чередовать, например, так:

(A) (черный, белый, черный, …), не глядя на показанный цвет, всякий раз называть

(B) (черный, черный, …), (C) (белый, белый, …), (D) называть черный до первого угадывания; после этого говорить белый опять до первого угадывания и т.д., (E) называть всякий раз показанный цвет, (F) называть всякий раз не тот цвет, который показан. Придумайте другие стратегии и докажите, что нет более надежной, чем стратегия (E), а самая плохая – стратегия (F).

◀ В любой попытке угадать скрытый цвет вероятность успеха (p) не больше, чем $\frac{2}{3}$ и не меньше, чем $\frac{1}{3}$.

Если назовем увиденный цвет, то скрытый цвет угадаем с вероятностью $\frac{2}{3}$, так как у двух шашек из трех противоположные основания одноцветны.

Если назовем не тот цвет, который показан, то вероятность успеха – $\frac{1}{3}$ (у одной шашки из трех основания разноцветны).

Если же назовем скрытый цвет наугад (не глядя на показанный), то вероятность успеха равна $\frac{1}{2}$ (скрытым основанием шашки может оказаться любое из трех черных и любое из трех белых).

Рассуждая иначе, скажем так: условия игры позволяют образовать пространство из шести элементарных событий. Действительно, есть три возможности выбрать одну шашку из трех и два способа показать игрокам одно из ее оснований – всего 6 событий, появлению каждого из которых можно сопоставить вероятность, равную $\frac{1}{6}$. Из них 4 обеспечивают угадывание, если называть показанный цвет (стратегия E), что дает вероятность успеха $p = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ и неуспеха $q = \frac{1}{3}$ в каждой игре. Наибольшая, чем $\frac{2}{3}$, вероятность успеха в отдельной игре невозможна, следовательно, стратегия (E) оптимальна.

Аналогично выясняется, что стратегия (F) наихудшая: вероятность успеха в каждой игре минимальна $\left(\frac{1}{3}\right)$, следовательно, минимальна и вероятность победы в серии игр.

Стратегии (B) и (C) обеспечивают каждую игру также постоянной вероятностью успеха, равной $\frac{1}{2}$. Но $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, следовательно, стратегии (B) и (C) хуже, чем (E), но лучше чем (F). Такова же и стратегия (D).

Стратегия (A) начинается, как (E), а продолжается, как (B) или (C), следовательно, вероятность успеха в первой игре равна $\frac{2}{3}$, а в остальных играх той же серии $\frac{1}{2}$. Как распределяются вероятности между количествами всех возможных удач от наименьшего их числа (0) до наибольшего (10) для стратегии (E) с $p=\frac{2}{3}, q=\frac{1}{3}$ и стратегий с $p=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{2}$, показано в таблице:

Таблица – Распределения вероятности

Число удач / Для стратегий	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(E)	0,00	0,00	0,00	0,02	0,06	0,14	0,23	0,26	0,20	0,09	0,02
имеющей $p=q=0,5$ для каждой игры	0,00	0,01	0,04	0,12	0,21	0,24	0,21	0,12	0,04	0,01	0,00

Числовые значения вероятностей, заполняющие таблицу, являются согласно формуле Бернулли, соответствующими членами разложения биномов

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^{10} \text{ и } \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Результаты вычислений округлены до второго десятичного знака.

Например, вероятность угадать 7 раз из 10 при применении стратегии (E) равна: $P_{10}(7)=C_{10}^{7}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\approx 0,26$. Из таблицы видно, что игрок, применивший стратегию (E), может надеяться выиграть 8 раз из 10, так как $0,23+0,26+0,20+0,09+0,02\approx 0,8$, и проиграть однажды, так как $0,02+0,06=0,08\approx 0,1$. Для применившего стратегию (F) – все наоборот. В случае применения любой из остальных стратегий удачного угадывания можно ожидать (конечно, в среднем) не более чем в четырех играх из десяти. ►