УДК 519.2

И.В. КАПИЦА, И.Н. МЕЛЬНИКОВА
Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КОМБИНАТОРИКИ

Одним из проявлений увлеченности математикой является желание узнать, нет ли, кроме изученных, других подходов к решению задачи, доказательству теоремы, выводу формулы.

Так, например, хорошее понимание смысла и назначение формулы Бернулли о вероятности $P_n(m)$ иметь m успехов в n независимых испытаниях прокладывает прямую тропинку к доказательству справедливости формулы разложения бинома Ньютона $(a+b)^n$ для любых a,b и натурального n.

Пусть в n независимых испытаниях успех имеет место m раз с вероятностью p в каждом испытании и неудача имеет место $n-m$ раз с вероятностью $q=1-p$ в каждом испытании. По формуле $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$ можно вычислить

$P_n(0)$ – вероятность события A_0 – 0 успехов в n испытаниях,

$P_n(1)$ – вероятность события A_1 – 1 успехов в n испытаниях,

$P_n(2)$ – вероятность события A_2 – 2 успехов в n испытаниях и т.д. и, наконец,

$P_n(n)$ – вероятность события A_n – n успехов в n испытаниях.

Ясно, что $A_0, A_1, \dots, A_n$ – несовместные события и их объединение (сумма) образует достоверное событие, поэтому

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1 \qquad (1)$$

Из $q=1-p \Rightarrow p+q=1$, откуда следует, что и

$$(p+q)^n = 1 \qquad (2)$$

Сравнивая равенства (1) и (2), заключаем, что

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} P_n(m) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (3)$$

Это формула разложения бинома Ньютона для частного случая $a+b=1$ при $0 \le a \le 1$ и $0 \le b \le 1$.

Обобщим формулу (3) сначала на случай произвольных положительных a и b.

Сумму $a+b$ умножим и разделим на $c=a+b$, $c\cdot\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)^n$.

Тогда $(a+b)^n=c^n\cdot\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)^n$.

Законно положить $\frac{a}{c}=p$ и $\frac{b}{c}=q$, так как $\frac{a}{c}<1$, $\frac{b}{c}<1$ и $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=1$.

Тогда

$$(a+b)^n=c^n\cdot(p+q)^n=c^n\cdot\sum_{m=0}^{n}C_n^m p^m q^{n-m}=c^n\cdot\sum_{m=0}^{n}C_n^m\left(\frac{a}{c}\right)^m\left(\frac{b}{c}\right)^{n-m}=c^n\cdot\sum_{m=0}^{n}C_n^m\frac{a^m b^{n-m}}{c^n}.$$

После сокращения на c^n получаем: $(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^m b^{n-m}$, что и требовалось доказать для случая, когда a и b положительны.

Пусть теперь $a<0$ и $b<0$. Это значит , что $c=a+b$ также отрицательно, но $\frac{a}{c}=p$ и $\frac{b}{c}=q$ оба положительны, следовательно, выведенная формула бинома Ньютона имеет место и в случае отрицательных a и b.

Пусть, наконец, a и b разных знаков. Достаточно ограничиться дополнительным соглашением: $a+b>0$, откуда $a>-b$. Положим для определенности, что $a>0$, и выберем положительное c такое, что $-b<c<a$. Тогда $a+b=(a-c)+(b+c)$.

Так как слагаемые в скобках оба положительны, то на основании доказанного $(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m(a-c)^m(b+c)^{n-m}$.

Левая часть этого равенства не зависит от c, поэтому и в правой части после раскрытия скобок и приведения подобных членов останется только сумма $\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^m b^{n-m}$.

Осталось разобрать случай, когда хотя бы одно из чисел a или b равно нулю. Пусть, например, $b=0$. Тогда

$$\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^m b^{n-m}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^m\cdot 0^{n-m}=C_n^n a^n\cdot 0^0=a^n=(a+0)^n=(a+b)^n,$$

так как $0^0=1$. Следовательно, формула разложения бинома Ньютона верна и в этом случае.

Так формула бинома Ньютона окончательно обоснована для произвольных a,b и натурального n.