$$+\frac{n-1}{2}\partial_{x_0}^{n-2} f(0,x_1)+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-2}(-a)^i\partial_{y_0}^i\partial_{y_1}^{n-2-i} f(y_0=0,y_1=x_1),\quad x_1\in[0,\infty),\quad 2\leqslant n\leqslant k,$$

и является частным решением уравнения (1).

Список литературы

1. Корзюк В.И., Козловская И.С., Соколович В.Ю. *Классическое решение в четверти плоскости смешанной задачи для волнового уравнения со смешанными условиями* // Докл. НАН Беларуси. 2018. Т. 62. № 6. С. 647–651.

2. Корзюк В.И., Козловская И.С. *Классические решения задач для гиперболических уравнений. В десяти частях. Ч. 1.* Минск: БГУ, 2017.

3. Корзюк В.И., Козловская И.С. *Классические решения задач для гиперболических уравнений. В десяти частях. Ч. 2.* Минск: БГУ, 2017.

В. И. Корзюк, С. Н. Наумовец, В. А. Севастюк

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

На замыкании $\bar{Q}=[0,\infty)\times[0,l]$ области $Q=(0,\infty)\times(0,l)$ двух независимых переменных $\boldsymbol{x}=(x_0,x_1)\in\bar{Q}\subset\mathbb{R}^2$ рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$(\partial_{x_0}^2 u - a^2\partial_{x_1}^2 u)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\bar{Q}, \tag{1}$$

где a^2, l – положительные действительные числа, $\partial_{x_0}^2=\partial^2/\partial x_0^2$, $\partial_{x_1}^2=\partial^2/\partial x_1^2$. К уравнению (1) на нижней части границы области присоединяются условия типа Коши

$$u(0,x_1)=\varphi(x_1),\quad (\partial_{x_0}^2+b^{(1)}(x_1)\partial_{x_0}+b^{(0)}(x_1))u(0,x_1)=\psi(x_1), \tag{2}$$
$$b^{(1)}(x_1)\neq 0,\quad x_1\in[0,l],$$

и граничные условия

$$\partial_{x_1}^2 u(x_0,0)=\mu^{(1)}(x_0),\quad \partial_{x_1}^2 u(x_0,l)=\mu^{(2)}(x_0),\quad x_0\in[0,\infty). \tag{3}$$

Здесь $f:\bar{Q}\ni x\to f(x)$ – заданная функция на $\bar{Q}$, $\varphi:[0,l]\ni x_1\to\varphi(x_1)\in\mathbb{R}$, $\psi:[0,l]\ni x_1\to\psi(x_1)\in\mathbb{R}$, $b:[0,l]\ni x_1\to b(x_1)\in\mathbb{R}$ – функции на $[0,l]$, $\mu^{(j)}:[0,\infty)\ni$ $\ni x_0\to\mu^{(j)}(x_0)\in\mathbb{R}$, $j=1,2,$ – заданные функции на $[0,\infty)$.

Функции f, φ, ψ, и $\mu^{(j)}$, $j=1,2$, удовлетворяют следующим однородным условиям согласования:

$$\mu^{(1)}(0)-d^2\varphi(0)+\frac{1}{a^2}f(0,0)=0, \tag{4}$$

$$\mu^{(2)}(0)-d^2\varphi(0)+\frac{1}{a^2}f(0,l)=0. \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть правая часть уравнения (1) $f\in C^1(\overline{Q})$. Тогда функция v_p, записанная формулами*

$$v_p(\boldsymbol{x})=v_p^{(m)}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in Q^{(m)}=((m-1)l/a, ml/a),\quad m=1,2,3,\ldots, \tag{6}$$

$$v_p(\boldsymbol{x}) = f^{(1,m)}(x_1 - ax_0) + f^{(2,m)}(x_1 + ax_0) - \frac{1}{4a^2} \int\limits_{l-ml}^{x_1-ax_0} dy \int\limits_{ml}^{x_1+ax_0} f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{a}\right) dz, \quad (7)$$

$\boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(m)}}$, *при соответствующем выборе* $f^{(j,m)}$, $j = 1,2$, $m \in \mathbb{N}$, *принадлежит классу* $C^2(\overline{Q})$, *является решением уравнения* (1) *и удовлетворяет условиям*

$$v_p(0, x_1) = \partial_{x_0} v_p(0, x_1) = 0, \quad (8)$$

$$\partial^2_{x_0} v_p(0, x_1) = f(0, x_1), \quad x_1 \in [0, l].$$

Теорема 2. *Пусть заданные функции задачи (1)–(3) удовлетворяют следующим условиям гладкости:* $f \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^3([0,l])$, $\psi \in C^1([0,l])$, $\mu^{(j)} \in C([0,\infty))$, $j = 1,2$, $b^{(0)}, b^{(1)} \in C^1([0,l])$. *При выполнении этих условий функция вида*

$$u(\boldsymbol{x}) = g^{(1)}(x_1 - ax_0) + g^{(2)}(x_1 + ax_0) + v_p(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \overline{Q}$$

является единственным классическим решением из класса $C^2(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда имеют место однородные условия согласования*

$$d^p g^{(1,k+1)}(-kl) = d^p g^{(1,k)}(-kl), \quad p = 0,1, \quad k = 0,$$

$$d^p g^{(2,k+1)}(kl) = d^p g^{(2,k)}(kl), \quad p = 0,1, \quad k = 1,$$

и условия согласования (4) и (5), где частное решение v_p *определяется формулами (6), (7), а функции* $g^{(j)}$, $j = 1,2$, *– формулами*

$$g^{(1)}(z) = g^{(1,k)}(z), \quad z \in [-kl, -(k-1)l],$$

$$g^{(2)}(z) = g^{(2,k)}(z), \quad z \in [kl, (k+1)l],$$

$$g^{(1)}(z) = g^{(1,0)}(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) - \frac{1}{2a} \int\limits_0^z \frac{1}{b^{(1)}(\xi)} [\psi - a^2 d^2 \varphi - b^{(0)} \varphi](\xi)\, d\xi - C,$$

$$g^{(2)}(z) = g^{(2,0)}(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) + \frac{1}{2a} \int\limits_0^z \frac{1}{b^{(1)}(\xi)} [\psi - a^2 d^2 \varphi - b^{(0)} \varphi](\xi)\, d\xi + C,$$

$$g^{(1,k)} = \int\limits_0^z (z-\xi) \mu^{(1)}\left(-\frac{\xi}{a}\right) d\xi - \int\limits_0^z (z-\xi) \partial^2_{x_1} v_p\left(-\frac{\xi}{a}, 0\right) d\xi -$$

$$- g^{(2,k-1)}(-z) + C^{(1,k)} z + C^{(2,k)}, \quad z \in [-kl, -(k-1)l],$$

$$g^{(2,k)} = \int\limits_0^z (z-\xi) \mu^{(2)}\left(\frac{\xi - l}{a}\right) d\xi - \int\limits_0^z (z-\xi) \partial^2_{x_1} v_p\left(\frac{\xi - l}{a}, l\right) d\xi -$$

$$- g^{(1,k-1)}(2l - z) + \tilde{C}^{(1,k)} z + \tilde{C}^{(2,k)}, \quad z \in [kl, (k+1)l].$$

Список литературы

1. Корзюк В.И., Козловская И.С., Наумовец С.Н. *Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши* // Весці. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 7-020.

2. Корзюк В.И., Наумовец С.Н. *Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с производными высокого порядка в граничных условиях* // Докл. НАН Беларуси. 2016. Т. 60. № 3. С. 11–17.

3. Корзюк В.И., Наумовец С.Н., Севастюк В.А. *О классическом решении второй смешанной задачи для одномерного волнового уравнения* // Тр. Ин-та математики. 2018. Т. 26, № 1. С. 35-42.

4. Корзюк В.И., Наумовец С.Н., Сериков В.П. *Метод характеристического параллелограмма решения второй смешанной задачи для одномерного волнового уравнения* // Тр. Ин-та математики. 2018. Т. 26. № 1. С. 43–53.

В. И. Корзюк, И. И. Столярчук

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА–ФОКА С УСЛОВИЕМ ПЕРВОГО РОДА И ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

В работах [1, 2] проведены исследования смешанных задач для гиперболических уравнений второго порядка, однако в этих исследованиях не были учтены условия согласования на начальные данные. Однако, в данном сообщении демонстрируется, что даже в случае с одним интегральным условием, условия согласования существенно влияют на гладкость решения. Данная задача является обобщением аналогичной задачи для волнового уравнения, которая рассматривается в работах [3, 4].

В области $Q = (0,\infty)\times\mathbb{R}$ задается одномерное уравнение типа Клейна–Гордона–Фока

$$\partial_t^2 u - a^2\partial_x^2 u - \lambda(t,x)u = f(t,x), \tag{1}$$

где $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, λ и f – функции, заданные на множестве $\overline{Q} = [0,\infty)\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

К уравнению (1) присоединяются начальные условия

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0,x) = \psi(x), \quad x\in[0,l], \tag{2}$$

$l\in\mathbb{R}$, $l<+\infty$, интегральное условия

$$u(t,0) = \int\limits_0^l K(t,s)u(t,s)\,ds + q^{(0)}(t), \tag{3}$$

а также условие первого рода

$$u(t,l) = q^{(l)}(t). \tag{4}$$

Теорема. *Пусть* $f\in C^1(\overline{Q})$, $\lambda\in C^1(\overline{Q})$, $q^{(j)}\in C^2([0,+\infty))$, $j\in\{0,l\}$, $\varphi\in$ $\in C^2([0,l])$, $\psi\in C^1([0,l])$, $K\in C^2(\overline{Q})$. *Классическое решение задачи (1)–(4), существует и единственно в классе* $C^2(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования*

$$\widetilde{q^{(0)}}(0) - \varphi(0) + \int\limits_0^l K(0,s)\varphi(s)\,ds = 0,$$