где $\zeta(x)$ – срезающая функция, где $\partial p/\partial\overline{n}|_{\widetilde{S}_T}$ – производная по направлению вектора $\overline{n}$ внутренней нормали к $\widetilde{S}_T$, α_i – угол между вектором $\overline{n}$ и осью Ox_i, $\widetilde{\Omega}$ – область, ограниченная кривой $\widetilde{S}$, $\overline{\widetilde{\Omega}} = \widetilde{\Omega}\bigcup\widetilde{S}$, $\widetilde{S} = \widetilde{S}_1\bigcup\widetilde{S}_2\bigcup\widetilde{S}_3\bigcup\widetilde{S}_4$, где

$$\widetilde{S}_1 = [0 \leqslant x_1 \leqslant \tfrac{\delta}{2}, x_2 = \theta_1(x_1)]\bigcup[\tfrac{\delta}{2} \leqslant x_1 \leqslant L - \tfrac{\delta}{2}, x_2 = 0]\bigcup[L - \tfrac{\delta}{2} \leqslant x_1 \leqslant L, x_2 = \phi_1(x_1)],$$

$$\widetilde{S}_2 = [0 \leqslant x_1 \leqslant \tfrac{\delta}{2}, x_2 = \theta_2(x_1)]\bigcup[\tfrac{\delta}{2} \leqslant x_1 \leqslant L - \tfrac{\delta}{2}, x_2 = H]\bigcup[L - \tfrac{\delta}{2} \leqslant x_1 \leqslant L, x_2 = \phi_2(x_1)],$$

$$\widetilde{S}_3 = [x_1 = 0, \theta_1(0) \leqslant x_2 \leqslant \theta_2(0)], \quad \widetilde{S}_4 = [x_1 = L, \phi_1(L) \leqslant x_2 \leqslant \phi_2(L)],$$

$$S_1 = [0 \leqslant x_1 \leqslant L, x_2 = 0], \quad S_2 = [0 \leqslant x_1 \leqslant L, x_2 = H], \quad S_\cup = S_1 + S_2,$$

$$S_{\cup T} = S_\cup \times (0, T], \quad \Omega_1 = [0 \leqslant x_1 \leqslant L, 0 < x_2 \leqslant \varepsilon],$$

$$\Omega_2 = [0 \leqslant x_1 \leqslant L, H - \varepsilon \leqslant x_2 < H], \quad \Omega_{iT} = \Omega_i \times [0, T], \quad i = 1, 2,$$

$$\Omega' = [0 \leqslant x_1 \leqslant L, \varepsilon_1 < x_2 < H - \varepsilon_1], \quad \widetilde{\Omega}'_T = \widetilde{\Omega}' \times [0, T], \quad \widetilde{\Omega}_T = \widetilde{\Omega} \times [0, T],$$

$$S'_1 = [0 \leqslant x_1 \leqslant L, x_2 = \epsilon_1], \quad S'_2 = [0 \leqslant x_1 \leqslant L, x_2 = H - \epsilon_1], \quad S'_{iT} = S'_i \times [0, T], \quad i = 1, 2,$$

$$\widetilde{S}_T = \widetilde{S} \times [0, T], \quad \overline{\widetilde{\Omega}}_T = \overline{\widetilde{\Omega}} \times [0, T],$$

ε, δ – малые положительные числа, $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$.

В работе [1] доказано существование решений этой модели на каждом временном слое $t_m = m\tau$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, M)$. В работе [2] найдены априорные оценки этих решений, которые не зависят от τ и позволяют выполнить предельный переход при $\tau \to 0$ (там же определена срезающая функция). Из результатов, полученных в [2], вытекает

Теорема. *Пусть $\bar{b}(x)$ есть функция, непрерывная в $\bar{\bar{\Omega}}$ (см. условия (4)), и выполнены условия гладкости, указанные в [2]. Тогда задача (1)–(6) имеет классическое решение, которое является единственным.*

Литература

1. Каянович С. С. *Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 52–59.

2. Каянович С. С. *Краевая задача для стержневого течения в канале* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2016. № 4. С. 55–66.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В КЛАССЕ ГЛАДКИХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ФУНКЦИЙ

В.И. Корзюк, И.С.Козловская, С.Н. Наумовец

На множестве $\overline{Q} = [0, \infty) \times [0, l]$ рассмотрим волновое уравнение

$$(\partial^2_{x_0} - a^2\partial^2_{x_1})u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \overline{Q}, \tag{1}$$

относительно искомой функции $u : \mathbb{R}^2 \supset \overline{Q} \in \mathbf{x} \to u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$. В (1) $a^2, l \in \mathbb{R}$ и $a^2, l^2 > 0$, $\partial_{x_j} = \partial^2/\partial x_j^2$, $j = 0, 1$. К уравнению (1) присоединяются условия Коши

$$u(0, x_1) = \varphi(x_1), \quad \partial_{x_0}u(0, x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0, l], \tag{2}$$

и условия Дирихле

$$u(x_0,0)=\mu^{(1)}(x_0),\quad u(x_0,l)=\mu^{(2)}(x_0),\quad x_0\in[0,\infty). \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия гладкости на заданные функции задачи (1)–(3):* $f\in C^1(\overline{Q})$, $\varphi\in C^2([0,l])$, $\psi\in C^1([0,l])$, $\mu^{(j)}\in C^2([0,\infty))$, $j=1,2$. *Существует классическое решение* u *из класса* $C^2(\overline{Q})$ *задачи (1)–(3) тогда и только тогда, когда выполняются следующие однородные условия согласования:*

$$\varphi(0)-\mu^{(1)}(0)=0,\quad d\mu^{(1)}(0)-\psi(0)=0,\quad a^2d^2\varphi(0)-d^2\mu^{(1)}(0)+f(0,0)=0,$$

$$\mu^{(2)}(0)-\varphi(l)=0,\quad d\mu^{(2)}(0)-\psi(l)=0,\quad d^2\mu^{(2)}(0)-a^2d^2\varphi(l)-f(0,l)=0,$$

где d *– оператор дифференцирования обыкновенной производной.*

Доказательство теоремы приведено в [1].

Рассмотрим решение u задачи (1)–(3) не только в классе $C^2(\overline{Q})$, но и в классе $C^k, k>2$, более гладких функций.

Теорема 2. *Пусть правая часть уравнения (1)* f *принадлежит множеству* $C^{k-1}(\overline{Q})$. *Тогда функция* v_p, *определяема формулами*

$$v_p^{(m)}(\boldsymbol{x})=f^{(1,m)}(x_1-ax_0)+f^{(2,m)}(x_1+ax_0)-$$

$$-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{l-ml}^{x_1-ax_0}dy\int\limits_{ml}^{x_1+ax_0}f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{a}\right)dx,\quad x_1\in[0,l],$$

$$v_p(\boldsymbol{x})=v_p^{(m)}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in Q^{(m)},\quad m\in\mathbb{N},$$

при соответствующем выборе $f^{(j,m)}$, $j=1,2$, $m\in\mathbb{N}$, *принадлежит классу* $C^k(\overline{Q})$, *является решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям*

$$v_p(0,x_1)=\partial_{x_0}v_p(0,x_1)=0,\quad \partial_{x_0}^2v_p(0,x_1)=f(0,x_1),\quad x_1\in[0,l],$$

$$\partial_{x_0}^sv_p(0,x_1)=\partial_{x_0}^{s-2}f(0,x_1)+a^2\partial_{x_1}^2\partial_{x_0}^{s-4}f(0,x_1)+\ldots+a^{s-3}\partial_{x_1}^{s-3}\partial_{x_0}f(0,x_1),\quad s=3,5,7,\ldots,$$

$$\partial_{x_0}^sv_p(0,x_1)=\partial_{x_0}^{s-2}f(0,x_1)+a^2\partial_{x_1}^2\partial_{x_0}^{s-4}f(0,x_1)+\ldots+a^{s-2}\partial_{x_1}^{s-2}f(0,x_1),$$

$$s=4,5,6,\ldots,\quad s\leqslant k.$$

Теорема 3. *Пусть выполняются следующие условия гладкости на заданные функции задачи (1)–(3):* $f\in C^{k-1}(\overline{Q})$, $\varphi\in C^k([0,l])$, $\psi\in C^{k-1}([0,l])$, $\mu^{(j)}\in C^2([0,\infty))$, $j=1,2$. *Существует единственное классическое решение* u *из класса* $C^k(\overline{Q})$, $k\geqslant 2$ *задачи (1)–(3) тогда и только тогда, когда выполняются следующие однородные условия согласования:*

$$\mu^{(1)}(0)-\varphi(0)=0,\quad d\mu^{(1)}(0)-\psi(0)=0,$$

$$d^s\mu^{(1)}(0)-a^sd^s\varphi(0)=\partial_{x_0}^{s-2}f(0,0)+a^2\partial_{x_1}^2\partial_{x_0}^{s-4}f(0,0)+\ldots+a^{s-2}\partial_{x_1}^{s-2}f(0,0),$$

$$s=2,4,\ldots,\quad s\leqslant k,$$

$$d^s\mu^{(1)}(0)-a^{s-1}d^{s-1}\psi(0)=\partial_{x_0}^{s-2}f(0,0)+a^2\partial_{x_1}^2\partial_{x_0}^{s-4}f(0,0)+\ldots+a^{s-3}\partial_{x_1}^{s-3}\partial_{x_0}f(0,0),$$

$$s=3,5,7,\ldots,\quad s\leqslant k,$$

$$\mu^{(2)}(0)-\varphi(l)=0, \quad d\mu^{(2)}(0)-\psi(l)=0,$$
$$d^s\mu^{(2)}(0)-a^sd^s\varphi(l)=\partial_{x_0}^{s-2}f(0,l)+a^2\partial_{x_1}^2\partial_{x_0}^{s-4}f(0,l)+\ldots+a^{s-2}\partial_{x_1}^{s-2}f(0,l),$$
$$s=2,4,\ldots, \quad s\leqslant k,$$
$$d^s\mu^{(2)}(0)-a^{s-1}d^{s-1}\psi(l)=\partial_{x_0}^{s-2}f(0,l)-a^2\partial_{x_1}^2\partial_{x_0}^{s-4}f(0,l)-\ldots-a^{s-3}\partial_{x_1}^{s-3}\partial_{x_0}f(0,l),$$
$$s=3,5,7,\ldots, \quad s\leqslant k.$$

Литература

1. Корзюк В. И., Козловская И. С. *Классические решения задач для гиперболических уравнений.* Курс лекций в 10 частях. Ч. 2. Мн., 2017.

2. Корзюк В. И., Козловская И. С., Наумовец С. Н. *Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши* // Весцi Нац. акад. навук Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 7–20.

3. Корзюк В. И., Наумовец С. Н. *Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с производными высокого порядка в граничных условиях* // Докл. НАН Беларуси. 2016. Т. 60. № 3. С. 11–17.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННЫМИ УСЛОВИЯМИ

В.И. Корзюк, И.С. Козловская, В.Ю. Соколович

В работе в аналитическом виде представлено классическое решение задачи со смешанными граничными условиями в четверти плоскости для волнового уравнения. Граница области состоит из двух перпендикулярных полупрямых. На одной из них задаются условия Коши. Вторая полупрямая разделена на две части: конечный отрезок и оставшаяся часть в виде полупрямой. На отрезке задается условие Дирихле, на второй части в виде полупрямой – условие Неймана. В классе дважды непрерывно дифференцируемых функций в четверти плоскости определяется классическое решение рассматриваемой задачи. Для построения этого решения выписывается частное решение исходного волнового уравнения без продолжения заданной функции неоднородного уравнения. Для заданных функций задачи выписываются условия согласования, которые являются необходимыми и достаточными, чтобы решение задачи было классическим и единственным.

Постановка задачи. В замыкании $\bar{Q}=[0,\infty)\times[0,\infty)$ двух независимых переменных $\boldsymbol{x}=(x_0,x_1)$ рассматривается одномерное волновое уравнение

$$(\partial_{x_0}^2-a^2\partial_{x_1}^2)u(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\bar{Q}, \tag{1}$$

где a^2 – положительное число. На части границы ∂Q области Q к уравнению (1) присоединяются условия Коши

$$u(0,x_1)=\varphi(x_1), \quad \partial_{x_0}u(0,x_1)=\psi(x_1), \quad x_1\in[0,\infty), \tag{2}$$

на другой полупрямой – граничные условия

$$u(x_0,0)=\mu^{(1)}(x_0), \quad x_0\in[0,\tau]. \tag{3}$$

$$\partial u(x_0,0)=\mu^{(2)}(x_0), \quad x_0\in(\tau,\infty), \tag{4}$$

где $0<\tau<+\infty$, f, φ, ψ, $\mu^{(j)}$, $j=1,2,$ – заданные функции.