

А. В. Чичурин, Е. Н. Защук

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ МОДЕЛИ ХЕМОСТАТА,  
ОПИСЫВАЮЩИХ КОНКУРЕНЦИЮ МЕЖДУ  
МИКРООРГАНИЗМАМИ

Рассмотрим модель хемостата Михаэлиса–Ментена [1], которая описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$s'(t) = 1 - s(t) - \sum_{i=1}^3 \frac{m_i x_i(t) s(t)}{a_i + s(t)}, \quad x'_i(t) = \left( \frac{m_i s(t)}{a_i + s(t)} - 1 \right) x_i(t) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где  $s(t)$ ,  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  обозначают плотности питательного субстрата и микроорганизмов в момент времени, параметры  $m_i$ ,  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) модели (1) являются заданными положительными числами. Рассмотрим решение системы (1) при условии, что начальные концентрации неотрицательны

$$s(t) = s_0(0), \quad x_1(t) = x_1^0(0), \quad x_2(t) = x_2^0(0), \quad x_3(t) = x_3^0(0). \quad (2)$$

Данная работа является продолжением работ [2, 3], где сформулированная задача Коши (1), (2), рассматривалась как модель хемостата для двух конкурирующих микроорганизмов. Такая модель описывается системой вида (1) и состоит из трех дифференциальных уравнений, когда ( $i = 1, 2$ ). В работах [2, 3] рассмотрен случай, когда константы Михаэлиса–Ментен ( $a_1, a_2$ ) для обеих конкурирующих популяций микроорганизмов равны. Такие задачи возникают при производстве в медицинской и пищевой промышленности, микробиологической промышленности, экологии, а также при производстве генетически модифицированных продуктов. Поставленная задача сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения первого порядка. Для некоторых значений параметров моделей найдены решения в аналитической форме. Используя возможности системы Mathematica, построен программный модуль, позволяющий находить решение в явном виде системы вида (1) при различных значениях параметров ( $m_1, a_1, m_2, a_2$ ) [3, 4].

Для задачи Коши (1), (2) построены программные модули, использующие численные процедуры, которые позволяют осуществить моделирование процессов хемостатного культивирования при изменяющихся параметрах системы, а также визуализировать динамику процесса развития каждого микроорганизма. Проведено исследование поведения микроорганизмов для различных значений параметров при малых значениях времени  $t$ . На основе полученных результатов можно сделать прогнозы о поведении модели на рассматриваемых временных интервалах.

Список литературы

1. Smith H.L. *The theory of chemostat: dynamics of microbial competition*. Cambridge University Press, 1995.
2. Чичурин А.В., Швычкина Е.Н. *О построении решений с заданными предельными свойствами у систем, описывающих модели хемостата* // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 1. С. 69–76.
3. Chichurin A.V., Shvychkina H.N. *Computer simulation of two chemostat models for one nutrient resource* // Math. Biosciences. 2016. № 278. P. 30–36.
4. Чичурин А.В., Швычкина Е.Н. *Применение системы Mathematica при решении дифференциальных уравнений и в задачах математического моделирования: курс лекций для студентов специальности 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)»: в 3 ч.* Мн.: БГУ, 2017. Ч. 3.