

МИНИСТЕРСТВО НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

БРЕСТСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра физики

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО. Часть 1

(методические указания к лабораторным работам)

- Э1 - Определение удельного сопротивления проводника,
- Э2 - Исследование электростатических полей

Утверждено Ученым советом
электронно-механического
факультета 2 июля 1990 г.
протокол № 6

БРЕСТ - 1990

УДК 53 (076.5)

Электричество. Часть I. Методические указания к лабораторным работам.

Брест, БрПИ, 1990.

В методических указаниях представлены описания лабораторных работ по курсу физики, раздел "Электричество":

- Э1 - Определение удельного сопротивления проводника,
- Э2 - Исследование электростатических полей.

Методические указания написаны в соответствии с программой дисциплины "Физика" для инженерно-технических специальностей ВУЗов и предназначены для всех специальностей и всех форм обучения в БрПИ.

Автор: Ирдюконея А.Н.

Рецензент: доцент БрПИ, к.ф.-м.н. Косарев В.М.

Рекомендовано кафедрой физики
к публикации на ротапринте БрПИ
05.04.90, протокол № 9.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА Э I
ОПРЕДЕЛЕНИЕ УДЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРОВОДНИКА

1. Цель работы: определение удельного сопротивления нихромовой проволоки, изучение методов обработки результатов эксперимента.
2. Приборы и принадлежности: прибор для измерения удельного сопротивления резистивного провода FPM - 01.
3. Введение.

Любой проводник обладает электрическим сопротивлением, которое зависит как от его состояния (температуры и т.д.), так и от его формы и размеров. Последняя зависимость особенно проста для проводников постоянного поперечного сечения (проволоки). Сопротивление R отрезка проводника длиной l и площадью поперечного сечения S определяется по формуле:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (I)$$

где коэффициент пропорциональности ρ зависит от рода вещества, его состояния и называется удельным электрическим сопротивлением данного вещества. Единица измерения удельного сопротивления есть Ом-метр (Ом·м).

В соответствии с (I) для определения ρ необходимо провести следующие измерения: измерить величину электрического сопротивления R отрезка проволоки, измерить длину отрезка l и площадь поперечного сечения S .

4. Описание установки.

Общий вид прибора FPM- 01 представлен на рисунке. Основание I оснащено регулируемыми ножками, которые позволяют произвести выравнивание положения прибора. К основанию прикреплена колонна 2 с нанесенной метрической шкалой 3. На колонне смонтированы два неподвижных кронштейна 4 и один подвижный кронштейн 5, который может передвигаться вдоль колонны и фиксироваться в любом положении. Между верхним и нижним кронштейнами натянут резистивный провод 6. На подвижном кронштейне имеется контактный зажим, который обеспечивает хорошее соединение с резистивным проводом, а также черта, позволяющая по шкале 3 определить длину отрезка

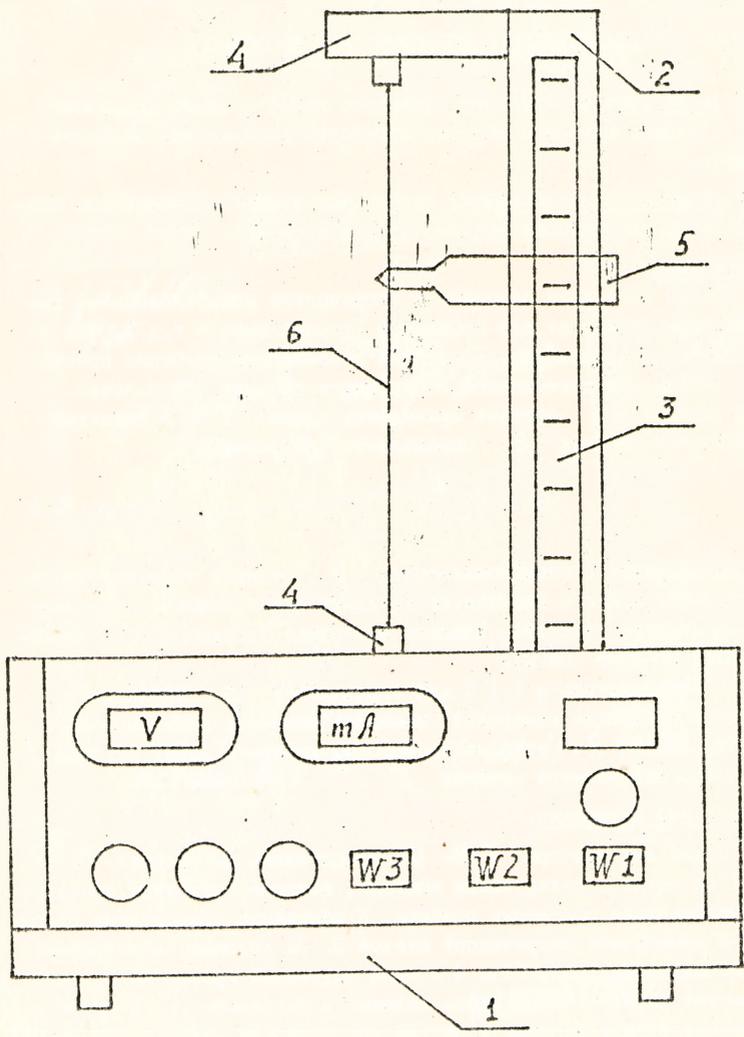


Рис. I.

провода между нижним и подвижным контактами. Нижний, верхний и центральный подвижные контакты резистивного провода подсоединены при помощи проводов низкого сопротивления к измерительной части прибора, основными элементами которой являются миллиамперметр mA и вольтметр V .

Примечание.

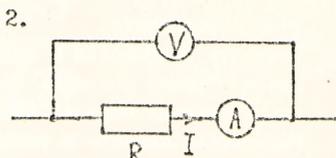
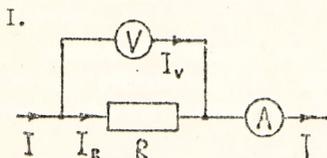
При измерениях силы тока и напряжения следует обратить внимание на зеркало, расположенное рядом со шкалой миллиамперметра и вольтметра соответственно. Для правильного отсчета необходимо совместить стрелку и ее изображение в зеркале. При этом обеспечивается прямой угол между линией зрения и шкалой прибора и уменьшается ошибка отсчета.

Установка позволяет измерить сопротивление отрезка провода, находящегося между нижним и центральным подвижными контактами. Величина сопротивления определяется из закона Ома для участка цепи:

$$R = \frac{U}{I}, \quad (2)$$

где U - напряжение на отрезке провода, I - сила тока в проводнике.

При измерениях силы тока I и напряжения U возможны два способа включения амперметра и вольтметра:



Способ включения определяется положением переключателя $W2$ на передней панели прибора: положению "Нажатый" соответствует первая схема включения, положению "Отжатый" - вторая. Очевидно, в обоих случаях непосредственная подстановка показаний амперметра и вольтметра в формулу (2) приводит к появлению систематической ошибки в определении сопротивления. Действительно, в первой схеме показания вольтметра соответствуют точному значению напряжения на сопротивлении R , тогда как амперметр измеряет суммарный ток I через вольтметр и сопротивление: $I = I_v + I_R$

Поэтому правильное значение сопротивления проводника при измерениях по первой схеме определяется по формуле:

$$R = \frac{U}{I_R} = \frac{U}{I} \cdot \frac{1}{1 - U/(I \cdot R_V)}, \quad (3)$$

где R_V - сопротивление вольтметра (сравните с формулой (2)).

Во втором случае амперметр измеряет точное значение силы тока I в проводнике, тогда как измеряемое вольтметром напряжение равно:

$$U = U_R + U_A = I (R + R_A)$$

Следовательно, в случае второй схемы включения приборов сопротивление проводника определяется по формуле:

$$R = \frac{U_R}{I} = \frac{U}{I} \left(1 - \frac{I \cdot R_A}{U} \right), \quad (4)$$

где R_A - сопротивление амперметра (сравните с формулой (2)).

5. Порядок выполнения работы.

1. Убедившись, что прибор заземлен, установить подвижный контакт на отметку, соответствующую длине отрезка провода 15 - 20 см.
2. Включить прибор, нажав клавишу $W1$, и установить значение силы тока по указанию преподавателя.
3. Переключатель $W2$ установить в положение "Нажатый", что соответствует схеме с точным измерением напряжения на отрезке проводника.
4. Измерить напряжение и силу тока при различных значениях длины отрезка провода. По формуле (3) рассчитать величину сопротивления отрезка проводника для каждого значения длины. Результаты занести в таблицу:

№ п-п	l , м	U , В	I , А	R , Ом	ΔR , Ом
1	!	!	!	!	!
2	!	!	!	!	!
п	!	!	!	!	!

5. Повторить все измерения при отжатом положении переключателя $W2$, что соответствует точному измерению силы тока в проводнике. Сопротивление при этом вычисляется по формуле (4). Результаты занести в таблицу.
6. Рассчитать погрешности измерения напряжения U , силы тока

- I и сопротивления R (см. формулы (5), (8), (9)).
Сравнить погрешности измерения сопротивления R для двух схем включения приборов.
7. Построить график зависимости сопротивления проводника от его длины. Указать для экспериментальных точек погрешности измерений.
 8. Используя метод наименьших квадратов, рассчитать параметры наилучшей прямой, проходящей через экспериментальные точки и оценить погрешности их определения (см. формулы (11), (12)).
 9. Определить удельное сопротивление никрома и оценить погрешность его определения (см. формулы (14), (15)).
6. Обработка результатов эксперимента.

Как известно, при любых измерениях неизбежно возникает ошибка, т.е. показания прибора по ряду причин не совпадают с истинным значением измеряемой величины. Количественной мерой отклонения результата измерения $X_{изм.}$ от истинного значения $X_{ист.}$ некоторой физической величины X является погрешность измерения ΔX . Она определяется из условия, что истинное значение измеряемой величины $X_{ист.}$ с некоторой вероятностью P лежит в интервале

$$X_{изм.} - \Delta X \leq X_{ист.} \leq X_{изм.} + \Delta X$$

(в учебных лабораториях ВрМ принимает $P = 0.95$).

Таким образом, измерить физическую величину X - это значит указать результат измерения $X_{изм.}$ и погрешность измерения ΔX , т.е. представить результат в виде:

$$X = X_{изм.} \pm \Delta X.$$

Если значение измеряемой величины находится непосредственно из отсчета по шкале прибора, т.е. производится прямое измерение, то погрешность измерения можно оценить по формуле:

$$\Delta X = \sqrt{(\Delta X_{пр.})^2 + (\Delta X_{окр.})^2 + (\Delta X_{разбр.})^2}, \quad (1)$$

где $\Delta X_{пр.}$ - погрешность используемого прибора,

$\Delta X_{окр.}$ - погрешность отсчета и округления,

$\Delta X_{разбр.}$ - погрешность разброса.

Примерами прямых измерений являются измерение напряжения на участке цепи вольтметром, измерение силы тока в цепи амперметром, измерение длины проводника линейкой.

Погрешность прибора определяется следующим образом. Все электроизмерительные приборы согласно ГОСТу по степени точности делятся на 3 класса точности: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. Число, обозначающее класс точности, равно предельному значению погрешности прибора, выраженному в процентах от диапазона величин, измеряемых прибором, согласно формуле:

$$\gamma = \frac{\Delta X_{пр.}}{X_{макс.}} \cdot 100 \% \quad (6)$$

где γ - класс точности прибора, $X_{макс.}$ - максимально возможное значение показания прибора (для приборов, имеющих нуль посередине шкалы, $X_{макс.}$ - арифметическая сумма конечных значений на шкале по обе стороны от нуля), $\Delta X_{пр.}$ - максимальная погрешность прибора. Класс точности прибора указывается на его шкале (если класс точности на приборе не указан, то он считается равным 4,0). Таким образом, определив по шкале прибора $X_{макс.}$ и γ , используя формулу (6), находим $\Delta X_{пр.}$.

Погрешность отсчета и округления $\Delta X_{окр.}$ является количественной мерой ошибки, возникающей при отсчете десятых долей деления по шкале прибора. При ширине делений меньших, чем 1 - 1,5 мм, и при ширине штрихов, больших 0,1 ширины деления, точность отсчета долей деления на глаз минимальна и равна не менее чем на 0,5 деления. В этом случае результат отсчета необходимо округлить до целого деления и принять $\Delta X_{окр.}$ равной половине цены деления шкалы прибора. При ширине делений больших, чем 1,5 мм, точность отсчета долей деления на глаз увеличивается. Однако и в этом случае погрешность отсчета следует принимать не меньшей, чем 0,3 цены деления.

Погрешность разброса $\Delta X_{разбр.}$ необходимо учитывать в том случае, если при многократном повторении опыта при одних и тех же условиях получаются различные значения измеряемой величины. Если же в пределах точности прибора получается один и тот же результат, необходимо положить $\Delta X_{разбр.} = 0$.

Итак, погрешности измерения напряжения, силы тока и длины проводника находятся по формуле (5).

При косвенных измерениях, когда интересующая нас физическая

величина y является функцией прямого образом измеряемых величин x_1, x_2, \dots, x_n : $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, погрешность измерения y вычисляется по формуле:

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x_i = x_{i \text{ изм.}}} \Delta x_i \right)^2}; \quad (7)$$

где $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x_i = x_{i \text{ изм.}}}$ - частная производная функции $f(x_1, \dots, x_n)$ по аргументу x_i , вычисленная при значении $x_i = x_{i \text{ изм.}}$, а Δx_i - погрешность измерения величины x_i .

Примером косвенных измерений в данной работе является измерение сопротивления проволоки. Если измерение сопротивления происходит по первой схеме включения приборов, то в соответствии с формулой (3) сопротивление является функцией напряжения, силы тока и сопротивления вольтметра:

$$R = f(u, I, R_v) = \frac{u}{I} \frac{R_v}{R_v - u/I}$$

Вычисляя частные производные функции $\partial f / \partial u, \partial f / \partial I, \partial f / \partial R_v$, в соответствии с (7) получаем:

$$\begin{aligned} \Delta R &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u} \Delta u \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial I} \Delta I \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial R_v} \Delta R_v \right)^2} = \quad (8) \\ &= R \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{R}{R_v} \right)^2 \left(\frac{\Delta u}{u} \right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I} \right)^2 + \left(1 - \frac{R \cdot I}{u} \right)^2 \left(\frac{\Delta R_v}{R_v} \right)^2}, \end{aligned}$$

где Δu , ΔI , ΔR_v - соответственно погрешности измерения напряжения, силы тока и сопротивления вольтметра.

При измерении сопротивления проволоки по второй схеме включения приборов в соответствии с формулой (4) имеем:

$$R = f(u, I, R_A) = \frac{u - I \cdot A}{I}$$

Поэтому погрешность измерения сопротивления в этом случае равна:

$$\begin{aligned} \Delta R &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u} \Delta u \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial I} \Delta I \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial R_A} \Delta R_A \right)^2} = \quad (9) \\ &= R \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{R_A}{R} \right)^2 \left(\frac{\Delta u}{u} \right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I} \right)^2 + \left(\frac{\Delta R_A}{R} \right)^2}. \end{aligned}$$

где ΔR_A - погрешность измерения сопротивления амперметра.

Из формулы (I) следует, что при постоянных значениях ℓ и S сопротивление отрезка проволоки R должно быть прямо пропорционально его длине ℓ . Соответствующий график зависимости R от ℓ должен представлять собой прямую, проходящую через начало координат. Поэтому если отложить результаты измерений сопротивления проволоки R при различных значениях ℓ на координатной плоскости R, ℓ , возникает задача построения наилучшей прямой, проходящей через экспериментальные точки. Для построения наилучшей прямой можно воспользоваться методом наименьших квадратов (МНК). Уравнение произвольной прямой на координатной плоскости R, ℓ имеет вид:

$$R = R(\ell) = a \cdot \ell + b,$$

где a, b - постоянные. Поэтому задача построения наилучшей прямой сводится к определению наилучших значений постоянных a и b .

Примечание.

Вообще говоря, искомая прямая должна проходить через начало координат в соответствии с формулой (I), т.е. ее уравнение должно иметь вид:

$$R = a \cdot \ell.$$

Однако, наличие сопротивления у подводящих проводов и контактного сопротивления может привести к тому, что даже при $\ell = 0$ измеренное сопротивление проводника окажется не равным нулю. Учет возможности такого добавочного сопротивления приводит к появлению постоянной b в уравнении прямой.

Согласно МНК наилучшей прямой соответствует минимум суммы

$$S = \sum_{i=1}^n (a \cdot \ell_i + b - R_i)^2,$$

где n - число экспериментальных точек, R_i - измеренное значение сопротивления отрезка проволоки длиной ℓ_i .

Условия минимума суммы

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

приводят к следующей системе из двух уравнений для определения неизвестных a и b :

$$\begin{cases} a \cdot X + b \cdot Y = Z_1 \\ a \cdot Y + b \cdot n = Z_2 \end{cases}$$

где

$$X = \sum_{i=1}^n l_i^2, \quad Y = \sum_{i=1}^n l_i, \quad (10)$$

$$Z_1 = \sum_{i=1}^n R_i \cdot l_i, \quad Z_2 = \sum_{i=1}^n R_i.$$

Решая систему, находим:

$$a = \frac{n \cdot Z_1 - Y \cdot Z_2}{n \cdot X - Y^2}, \quad b = \frac{X \cdot Z_2 - Y \cdot Z_1}{n \cdot X - Y^2}. \quad (11)$$

Поскольку значения сопротивлений R_i , используемые в (10), определены с погрешностью ΔR , то и постоянные a и b определяются с некоторой погрешностью. Погрешности в определении постоянных a и b вычисляются по формулам:

$$\Delta a = \frac{n}{n-2} \frac{\sum_{i=1}^n (a \cdot l_i + b - R_i)^2}{n \cdot X - Y^2}, \quad (12)$$

$$\Delta b = \left(\frac{1}{n} + \frac{X}{n \cdot X - Y^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^n (a \cdot l_i + b - R_i)^2}{n-2}.$$

В соответствии с формулой (1) мы предполагали, что экспериментальные точки на графике $R(l)$ должны "ложиться" на прямую, и нашли наилучшие значения параметров a и b , определяющих эту прямую. Возникает вопрос - а какова вероятность того, что наилучшей кривой, проходящей через экспериментальные точки, является прямая? Эту вероятность можно найти, используя, например, критерий согласия Пирсона (критерий Хи-квадрат). Для этого необходимо вычислить величину

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (a \cdot l_i + b - R_i)^2}{(\Delta R)^2}, \quad (13)$$

где ΔR - погрешность измерения сопротивления.
 Найденное значение χ^2 необходимо сопоставить с таблицей значений χ^2 , приведенной в работе [1]. Отметим, что величина N в этой таблице - это число степеней свободы распределения χ^2 , равное числу измерений n минус увеличенное на единицу число определяемых параметров (в данном случае $N = n - (2 + 1) = n - 3$).

Согласно формуле (1) постоянная a связана с удельным сопротивлением вещества, из которого изготовлена проволока, и площадью поперечного сечения проволоки S соотношением:

$$a = \rho / S$$

Поэтому удельное сопротивление ρ равно:

$$\rho = a \cdot S = \frac{1}{4} \pi d^2 a, \quad (14)$$

где учтено, что поперечное сечение проволоки - круг диаметра d . Очевидно, $\rho = \rho(a, d)$ - косвенно измеряемая величина. Поэтому погрешность измерения ρ определяется по формуле (7), которая с учетом (12) принимает вид:

$$\Delta \rho = \frac{1}{4} \pi d \sqrt{(d \Delta a)^2 + (2a \Delta d)^2}, \quad (15)$$

где Δd - погрешность измерения диаметра проволоки.

Примечание

Более подробно теория погрешности и методы обработки результатов эксперимента изложены в [1, 2]. Понятие электрического сопротивления проводника и методы его измерения рассматриваются в [3, 4].

7. Контрольные вопросы

1. Какие способы включения вольтметра и амперметра при измерении сопротивления проводника Вы знаете?
2. Как оценить погрешность измерения напряжения и силы тока?
3. Как оценить погрешность измерения сопротивления проводника?
4. Что такое метод наименьших квадратов и где он применяется в работе?
5. Используя критерий Пирсона, определить вероятность совпадения экспериментальных результатов для зависимости $R(l)$ с теорией.
6. Измерение R можно проводить при различных токах. Как в этом случае усреднять результаты? Какие значения силы тока

- лучше выбрать для проведения измерений: большие или малые?
7. Рассчитать сопротивление отрезка проводника, имеющего форму усеченного конуса. Параметры конуса выбрать самостоятельно.

Литература

1. Лабораторные работы по курсу физики. Часть I. Физические основы механики. Фронтальная лабораторная работа № I "Изучение теории погрешностей и кинематика материальной точки". (Методические указания). - Врест, ВИСИ, 1987. - 20с.
2. Сквайрс Дж. Практическая физика. - М.: Мир, 1971. - 246с.
3. Калашников С.Г. Электричество. - М.: Наука, 1985. - С. 106-127.
4. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2. - М.: Наука, 1978. - С. 99-100.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

1. Цель работы: Изучение методов моделирования и исследования электростатических полей; изучение законов электростатики.
2. Приборы и принадлежности: Установка для моделирования и изучения электростатических полей, набор электродов, линейка, циркуль, транспортир, миллиметровая бумага.
3. Введение

Всякий неподвижный электрический заряд создает в окружающем пространстве ве электростатическое поле, которое обнаруживается при внесении пробных зарядов в любую точку пространства, в которой существует поле. Силовой характеристикой поля является его напряженность. Напряженность поля \vec{E} численно равняется силе, с которой поле действует на единичный положительный заряд, помещенный в данную точку поля, то есть

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \quad (1)$$

где \vec{F} - сила, действующая со стороны поля на заряд q .
Направление вектора напряженности согласно (1) совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд.

Основной закон электростатики - закон Кулона - определяет силу взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2 в вакууме:

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}_1}{r}, \quad (2)$$

где \vec{F}_{21} - сила, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_1 , \vec{r}_1 - радиус-вектор, проведенный из точки, где находится заряд q_1 , в точку, где находится заряд q_2 ; $r = |\vec{r}_1|$ - расстояние между зарядами, ϵ_0 - электрическая постоянная.

В соответствии с (1), (2) напряженность электростатического поля, создаваемого в вакууме точечным зарядом q , определяется по формуле:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (3)$$

где \vec{r} - радиус-вектор, проведенный из точки, где находится заряд, в точку наблюдения; $r = |\vec{r}|$.

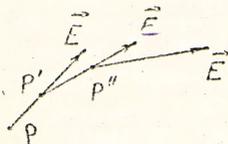
Электростатическое поле обладает важным свойством - оно подчиняется принципу суперпозиции. Согласно этому принципу напряженность поля \vec{E} , создаваемого совокупностью зарядов в какой-либо точке, равна сумме напряженностей полей $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots$, создаваемых в той же точке каждым зарядом в отдельности

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots = \sum_i \vec{E}_i \quad (4)$$

Используя (3), (4), можно вычислить напряженность электростатического поля, создаваемого любой совокупностью зарядов, если известно распределение зарядов в пространстве.

Для описания электростатического поля нужно задать вектор напряженности в каждой точке поля. Это можно сделать аналитически, выразив зависимость напряженности поля от координат в виде формул (например, формула (3) для поля точечного заряда), и графически, используя понятие силовых линий.

|| Силовой линией электростатического поля называется линия, касательные к которой в каждой ее точке совпадают по направлению с вектором напряженности поля \vec{E} в той же точке. Построить силовую линию можно следующим образом (см. рисунок).



В каждой точке поля, в которой $\vec{E} \neq 0$, вектор \vec{E} имеет вполне определенное направление. Рассмотрим какую-либо точку P , в которой $\vec{E} \neq 0$, и отложим из этой точки произвольный малый отрезок в направлении \vec{E} . При этом

мы придем в точку P' , в которой вектор \vec{E} может иметь другое направление, чем в точке P . Отложив из точки P' произвольно малый отрезок вдоль \vec{E} , мы придем в новую точку P'' , в которой повторим ту же операцию и т.д. В результате получим некоторую ломанную линию. Если далее неограниченно уменьшать составляющие ломанную отрезки, в пределе получим силовую линию, проходящую через точку P . Очевидно, через каждую точку поля, в которой $\vec{E} \neq 0$, можно провести только одну силовую линию.

Чтобы с помощью силовых линий изображать не только направление, но и величину напряженности поля, условились проводить силовые линии с определенной густотой, а именно так, чтоб число силовых линий, проходящих через поверхность единичной площади, перпендикулярную к силовым линиям, было пропорционально величине напряженности поля в данном месте. Таким образом, картина силовых линий наглядно показывает, чему равна напряженность в различных областях поля и как она изменяется в пространстве.

Из закона Кулона (2) и принципа суперпозиции (4) вытекает важное следствие - теорема Гаусса. Согласно этой теореме поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме через произвольную замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ϵ_0 :

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv. \quad (5)$$

Здесь ρ - объемная плотность заряда, распределенного в объеме V , ограниченном поверхностью S .

Применяя теорему (5) к бесконечно малому объему $V \rightarrow 0$, можно получить соотношение между напряженностью поля и объемной плотностью заряда, выражающее теорему Гаусса в дифференциальной форме:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6)$$

Величина, стоящая в левой части (6), называется дивергенцией вектора \vec{E} и, по определению, равна:

$$\text{div } \vec{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Примечание

Смысл слова дивергенция выясняется наиболее просто в гидродинамике при вычислении дивергенции скорости жидкости \vec{v} . Действительно, в каждой точке жидкости величина

$$\operatorname{div} \vec{v} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

равна отношению объема жидкости, вытекающей за I с из объема пространства ΔV , окружающего данную точку, к этому объему пространства. Название "дивергенция", что значит по-латыни расхождение или расходимость, было избрано для этой величины именно потому, что жидкость растекается или расходится из тех и только тех точек или участков занимаемого ею пространства, в которых $\operatorname{div} \vec{v} > 0$. Очевидно, что в этих точках должны быть расположены источники жидкости. По аналогии, те точки поля произвольного вектора \vec{a} , в которых $\operatorname{div} \vec{a} \neq 0$, принято называть истоками этого поля. Следовательно, можно сказать, что истоки электростатического поля находятся в тех и только тех точках поля, в которых находятся электрические заряды (т.е. $\rho \neq 0$).

В отличие от (5), соотношение (6) связывает различные физические величины - $\operatorname{div} \vec{E}$ и объемную плотность заряда ρ - в одной и той же точке пространства. Оно позволяет найти дивергенцию вектора напряженности в каждой точке поля по величине объемной плотности заряда в той же точке, вне зависимости от распределения заряда в других областях пространства. С другой стороны, чтобы определить объемную плотность заряда в данной точке поля, достаточно знать значение $\operatorname{div} \vec{E}$ в этой же точке поля.

Электростатическое поле обладает еще одним важным свойством - оно является потенциальным. Это значит, что работа сил такого поля при перемещении заряда q из точки 1 в точку 2 не зависит от формы кривой, по которой движется заряд, и определяется только положением точек 1 и 2, т.е.

$$A = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int E_t dl, \quad (7)$$

где криволинейный интеграл вычисляется вдоль произвольной кривой L , соединяющей точки 1 и 2, $E_t = |\vec{E}| \cos(\vec{E}, d\vec{l})$ - проекция вектора \vec{E} на направление $d\vec{l}$.

Указанное свойство позволяет ввести понятие потенциала поля, который является его энергетической характеристикой. По определению потенциал электростатического поля φ в данной точке равен отношению работы A , совершаемой силами поля при перемещении заряда q из этой точки в точку вне поля (обычно на бесконечность), к величине этого заряда:

$$\varphi = \frac{A}{q} \quad (8)$$

Тогда работу, совершаемую силами поля при перемещении заряда q из точки 1 в точку 2, можно представить также в виде:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU_{12}, \quad (9)$$

где $U_{12} = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$ - разность потенциалов точек 1 и 2, L - любая кривая, соединяющая точки 1 и 2.

Если заряд перемещается в электростатическом поле по замкнутому контуру, то работа, совершаемая силами поля, будет равна нулю (так как $\varphi_1 = \varphi_2$). Пользуясь формулой (9), можно выразить это свойство электростатического поля в следующей форме:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \quad (10)$$

т.е. циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю. Уравнение (10) является необходимым и достаточным условием потенциальности поля \vec{E} .

Как следует из закона Кулона (2), потенциал поля точечного заряда в вакууме выражается формулой:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (11)$$

Если электростатическое поле создается совокупностью зарядов, то, согласно принципу суперпозиции, потенциал этого поля равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых отдельными зарядами:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (12)$$

Здесь φ - потенциал результирующего поля в рассматриваемой точке, r_i - расстояние от этой точки до i -го заряда, а суммирование производится по всем точечным зарядам.

Напряженность электростатического поля и его потенциал связаны между собой соотношением:

$$\vec{E} = -q \vec{\text{grad}} \varphi, \quad (13)$$

где $q \vec{\text{grad}} \varphi = \vec{\nabla} \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ - градиент φ - вектор, направленный в сторону максимального возрастания функции

$\varphi(x, y, z)$ и численно равный изменению φ при перемещении на единицу длины в этом направлении. Поэтому для характеристики электростатического поля достаточно задать одну скалярную функцию - потенциал $\varphi(x, y, z)$. При этом в соответствии с (6) и (13) функция $\varphi(x, y, z)$ в любой точке пространства должна удовлетворять уравнению

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (14)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Соответственно, в тех областях поля, где заряды отсутствуют ($\rho = 0$), уравнение (14) будет иметь вид:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (15)$$

Множество точек поля, в которых потенциал один и тот же, называют эквипотенциальной поверхностью. Аналитически эта поверхность определяется уравнением: $\varphi(x, y, z) = \text{const}$. Для поля точечного заряда эквипотенциальные поверхности, согласно (12), имеют вид концентрических сфер.

Эквипотенциальные поверхности также применяются для графического изображения электростатических полей. Обычно их чертят так, чтобы разность потенциалов для двух соседних поверхностей была всюду одна и та же, например, $\Delta \varphi = 1 \text{ В}$. Тогда по густоте эквипотенциальных поверхностей можно судить о величине напряженности электростатического поля: там, где эквипотенциальные поверхности располагаются теснее друг к другу, напряженность поля больше и наоборот, в местах, где расстояния между соседними эквипотенциальными поверхностями велики, напряженность поля будет мала.

Градиент функции $\varphi(x, y, z)$ в любой точке поля направлен перпендикулярно эквипотенциальной поверхности, проходящей через данную точку. Поэтому напряженность электростатического поля, а следовательно, и силовые линии перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям. Зная эквипотенциальные поверхности, можно всегда построить силовые линии данного поля и наоборот. Таким образом, любое электростатическое поле можно изобразить графически как с помощью эквипотенциальных поверхностей, так и с помощью силовых линий.

4. Метод моделирования электростатических полей

На практике, как правило, имеет дело с электростатическими полями, создаваемыми заряженными проводниками. Распределение зарядов по поверхностям проводников при этом неизвестно. Известны лишь форма и расположение всех проводников и поте диал или полный заряд каждого проводника. При таких условиях расчет поля по формулам (3), (4), (12) практически невозможен, и задача определения поля в пространстве между проводниками сводится к поиску решения уравнения Лапласа (15). При этом граничные условия - значения потенциала на поверхности каждого проводника - заданы.

В соответствующем разделе математической физики доказываются, что данная задача имеет только одно решение. Поэтому, хотя поиск решения уравнения (15) представляет собой довольно трудную задачу, но если удалось угадать функцию $U(x, y, z)$, удовлетворяющую всем условиям задачи, то можно утверждать, что она и будет искомым решением. С другой стороны, решение уравнения (15) при заданных потенциалах всех проводников может быть найдено экспериментальным путем с помощью метода моделирования. Сущность метода заключается в следующем. Заполним пространство между проводниками однородной слабопроводящей средой, а сами проводники будем рассматривать в качестве электродов, причем потенциалы проводников будем поддерживать постоянными. При этом в пространстве между электродами возникает электрический ток, плотность которого \vec{j} в любой точке определяется из закона Ома:

$$\vec{j} = \lambda \vec{E} \quad (16)$$

где λ - удельная электропроводность среды, \vec{E} - напряженность электрического поля в данной точке. В случае постоянного тока его плотность удовлетворяет уравнению непрерывности: $div \vec{j} = 0$. Тогда из формулы (16) следует, что в однородной среде (т.е. при $\lambda = const$) $div \vec{E} = 0$. Таким образом, электрическое поле \vec{E} в проводящей среде удовлетворяет такому же уравнению, что и напряженность электростатического поля в вакууме при отсутствии свободных зарядов (см. уравнение (6)). С другой стороны, можно показать, что электрическое поле в проводящей среде, как и электростатическое поле, является потенциальным. Следовательно, потенциал электрического поля в пространстве между электродами, как и потенциал электростатического поля в вакууме, должен удовлетворять уравнению Лапласа (15).

Вообще говоря, при наличии электрического тока потенциал проводника не одинаков в различных точках. Однако, если электроды находятся в среде, удельная электропроводность которой значительно меньше электропроводности вещества, из которого сделаны электроды, то изменениями потенциала внутри электродов можно пренебречь, т.е. считать, что потенциал во всех точках каждого электрода один и тот же. Поэтому граничные условия для потенциала электрического поля в проводящей среде — задание значений потенциала каждого электрода — совпадают с аналогичными условиями для потенциала электростатического поля в вакууме. Ввиду единственности решения уравнения Лапласа электрическое поле внутри проводящей среды при наличии тока совпадает с электростатическим полем, которое существовало бы в пространстве между данными электродами, если бы их потенциалы были такими же, что и при наличии тока, а вместо проводящей среды был бы вакуум.

Используя токоизмерительную аппаратуру, можно легко построить систему эквипотенциальных поверхностей электрического поля в проводящей среде. Тем самым получают картину эквипотенциальной электростатического поля в пространстве между проводниками.

5. Описание установки и методики построения эквипотенциальных поверхностей

В данной работе моделируются и исследуются электростатические поля, создаваемые двумя параллельными бесконечно длинными цилиндрическими проводниками, заряженными разноименно с одинаковой линейной плотностью заряда. Эквипотенциальные поверхности таких полей представляют собой цилиндры, оси которых параллельны осям цилиндрических проводников. Поэтому распределение потенциала электростатического поля в любой плоскости, перпендикулярной осям проводников, будет одним и тем же, а силовые линии, проходящие через любую точку рассматриваемой плоскости, лежат в этой плоскости. Таким образом, в рассматриваемых случаях достаточно исследовать распределение потенциала в одной плоскости, перпендикулярной осям проводников.

Для моделирования электростатического поля возьмем два кольца образных электрода, радиусы которых равны радиусам рассматриваемому цилиндрическим проводникам, и поместим их в ванну с тонким слоем слабо проводящей жидкости (например, родопроводной воды). Ванна должна быть расположена таким образом, чтобы дно ее было горизонтально. Тогда верхняя и нижняя поверхности жидкости в ванне будут

параллельны друг другу и перпендикулярны осям кольцеобразных электродов. При протекании тока между электродами вектор напряженности электрического поля в любой точке на поверхности жидкости будет параллелен этой поверхности. Внутри жидкости потенциал электрического поля удовлетворяет уравнению Лапласа (15), принимая на поверхности электродов заданные значения. При этих условиях распределение потенциала электрического поля в ванне между электродами воспроизводит распределение потенциала электростатического поля в плоскости, перпендикулярной осям бесконечных цилиндрических проводников.

Принципиальная схема установки изображена на рисунке 2.1. В ванну с тонким слоем воды, на дно которой нанесена координатная сетка, погружают электроды различной формы, на которые подается переменное напряжение. Аналогичную координатную сетку наносят на миллиметровую бумагу и отмечают на ней положение электродов. Форма электродов должна соответствовать сечению рассматриваемых бесконечных заряженных проводников.

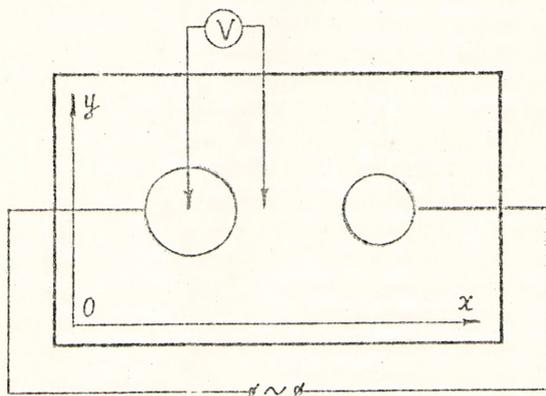


Рис. 2.1

Для изучения распределения потенциалов в ванне берут два острых металлических щупа, соединенных с вольтметром. Входное сопротивление вольтметра должно быть достаточно большим, чтобы изменение распределения потенциала в ванне в процессе измерения было мало. Один из щупов, называемый далее первым, устанавливают в ванне рядом с одним из электродов. С помощью второго щупа отис-

квиваются все точки в ванне, для которых вольтметр показывает, например, 1 В. Совокупность всех таких точек образует эквипотенциальную линию $\varphi = 1$ В, которая является сечением эквипотенциальной поверхности плоскостью чертежа. Используя координатную сетку на дне ванны, наносят найденные точки на миллиметровую бумагу. Далее через эти точки проводят гладкую кривую. Затем, не изменяя положения первого щупа, подвижным щупом отыскиваются точки, для которых вольтметр показывает 2 В и т.д. Процедура повторяется до тех пор, пока подвижный щуп не достигнет второго электрода. В результате на миллиметровой бумаге оказывается построенной совокупность эквипотенциальных линий электростатического поля.

Примечание

В электростатике все точки проводника имеют одинаковый потенциал. Это значит, что поверхность проводника является одной из эквипотенциальных поверхностей. Поэтому линии на миллиметровой бумаге, соответствующие поверхностям используемых электродов, являются эквипотенциальными линиями.

Если металлические щупы, используемые в работе, закрепить между собой так, чтобы расстояние между ними было фиксировано и равно 1 см, то получится двухэлектродный зонд, который позволяет непосредственно измерить напряженность поля в любой точке между электродами. Для измерения \vec{E} один из щупов зонда располагают в точке наблюдения и, рассматривая его в качестве оси вращения, поворачивают зонд, следя за показаниями вольтметра. В соответствии с (13) вольтметр покажет максимальное значение, когда второй щуп зонда будет находиться на прямой, проходящей через точку наблюдения в направлении \vec{E} . Таким образом, определяя положение второго щупа зонда, соответствующее максимальному показанию вольтметра, устанавливает направление вектора \vec{E} в точке наблюдения. При этом показании вольтметра равняется величине напряженности поля \vec{E} , измеряемой в В/см (Вольт на см).

В комплект установки входит набор колец бразных электродов различного радиуса и плоские электроды. Это позволяет исследовать электростатические поля следующих конфигураций:

а) Поле создается двумя параллельными бесконечными цилиндрическими проводниками (радиусы цилиндров R_1 и R_2 , расстояние между осями цилиндров d), заряженными разноименно с одинаковой линейной плотностью заряда. При этом возможны два варианта взаимного расположения проводников:

- 1) один цилиндр расположен внутри другого (случай $d < |R_1 - R_2|$);
- 2) цилиндры расположены на некотором расстоянии друг от друга (случай $d > (R_1 + R_2)$).

Для исследования поля в ванне соответствующим образом располагают два кольцеобразных электрода, присоединяя их к разным клеммам источника питания λ .

б). Поле создается бесконечным цилиндрическим проводником и проводящей плоскостью, причем ось цилиндра параллельна плоскости и удалена от нее на некоторое расстояние $r > R$, где R - радиус цилиндра. Проводники заряжены разноименно с одинаковой линейной плотностью заряда. Для исследования поля в ванне соответствующим образом располагают кольцеобразный и плоский электроды, присоединяя их к разным клеммам источника питания.

6. Задания для самостоятельной работы

1. Ознакомившись с экспериментальной установкой, установить в ванне набор электродов, указанный преподавателем.
2. Включить установ γ . Используя двухэлектродный зонд, определить напряженность электростатического поля в нескольких точках между проводниками. Убедиться в том, что в любой точке вблизи проводника напряженность электростатического поля направлена по нормали к его поверхности.
3. Используя двухэлектродный зонд, построить силовую линию электростатического поля, проходящую через точку, указанную преподавателем (см. определение силовой линии).
4. Используя координатную сетку на дне ванны, отметить на миллиметровой бумаге положение электродов. На этом же рисунке начертить между электродами произвольный прямоугольник или треугольник. Рассматривая его в качестве замкнутого контура, рассчитать вдоль него циркуляцию вектора \vec{E} (см. Приложение 1) и проверить выполнение условия потенциальности электростатического поля (10).
5. В соответствии с процедурой, описанной в разделе 5, построить на миллиметровой бумаге систему эквипотенциальных линий электростатического поля. По картине эквипотенциалей определить напряженность электростатического поля в нескольких точках между проводниками (см. Приложение 2).
6. Используя теорему Гаусса, найти линейную плотность заряда на проводниках, определяя напряженность поля по картине эквипотенциалей (см. Приложение 3).

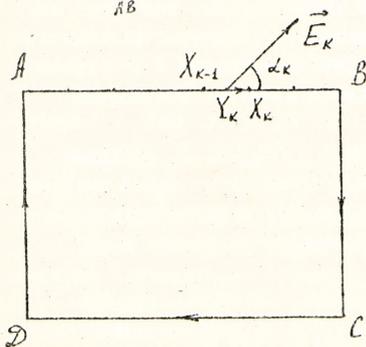
7. Выбрать параметр, определяющий положение точек на поверхности проводника (например, в случае цилиндра - это полярный угол). Найти поверхностную плотность заряда на проводнике как функцию этого параметра и построить график найденной функции (см. Приложение 4).
8. Используя формулы, приведенные в Приложении 6, рассчитать теоретическую зависимость поверхностной плотности заряда на проводнике от выбранного параметра. Построить график найденной функции и сравнить его с результатами эксперимента.
9. Определить емкость системы проводников на единицу длины (см. Приложение 5).
10. Используя формулы из Приложения 6, найти теоретическое значение емкости системы проводников на единицу длины и сравнить его с экспериментальным значением.

Приложение I. Вычисление циркуляции вектора напряженности электростатического поля по замкнутому контуру

Выберем в качестве замкнутого контура, по которому будем вычислять циркуляцию вектора \vec{E} , произвольный прямоугольник ABCD (см. Рис. 2.2), причем положительным направлением обхода контура будем считать направление по ходу часовой стрелки. Тогда циркуляция Γ будет равна сумме четырех интегралов вдоль сторон прямоугольника:

$$\Gamma = \oint \vec{E} d\vec{l} = I_{AB} + I_{BC} + I_{CD} + I_{DA}, \quad (17)$$

где $I_{AB} = \int_{AB} \vec{E} d\vec{l}$, $I_{BC} = \int_{BC} \vec{E} d\vec{l}$ и т.д..



Вычислим вначале I_{AB} . Для этого разобьем отрезок AB на N равных отрезков $[X_{k-1}, X_k]$ длиной $\Delta l = |AB|/N$ ($k = 1, 2, \dots, N$; $X_0 = A$, $X_N = B$). Обозначим через Y_k точки, расположенные в серединах отрезков $[X_{k-1}, X_k]$. Далее с помощью двухэлектродного зонда найдем значения напряженности электростатического поля E_k в точках Y_k и проведем через эти точки прямые в направлении векторов E_k . С помощью

Рис. 2.2.

транспортира измерим углы \angle_k между векторами \vec{E}_k и $\vec{\chi}_{k-1}\vec{\chi}_k$. Тогда, заменяя интеграл интегральной суммой, получаем:

$$I_{AB} = \sum_{k=1}^N E_k \Delta l \cos \angle_k \quad (18)$$

Интегралы I_{BC} , I_{CA} , I_{BA} вычисляются аналогично. Затем по формуле (17) вычисляем искомую циркуляцию.

Примечание.

Для более точного вычисления циркуляции Γ необходимо итервал разбиения Δl выбирать достаточно малым: $\Delta l \rightarrow 0$. Однако измеренные с помощью зонда значения E_k в формуле (18) являются приближенными. Поэтому при вычислении циркуляции достаточно разбить контур на отрезки длиной $\Delta l = 1$ см.

Приложение 2. Определение напряженности электростатического поля по картине эквипотенциалей

Имея набор эквипотенциальных линий (см. Рис. 2.3), можно определить величину и направление напряженности поля в любой точке. Если рассматриваемая точка лежит на эквипотенциальной линии, например, точка А, то напряженность поля в этой точке направлена

вдоль нормали к эквипотенциальной линии в сторону уменьшения потенциала и равна:

$$E_A = \frac{U_1 - U_3}{|BC|}, \quad (19)$$

где $|BC|$ - длина отрезка, проведенного перпендикулярно эквипотенциальной линии в точке А.

Для точки, расположенной между эквипотенциальными линиями, например, точка К, напряженность поля будет направлена вдоль вектора $\vec{MN} = \vec{MK} + \vec{KN}$,

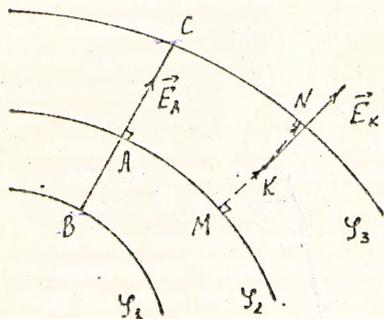


Рис. 2.3

где \vec{MK} и \vec{KN} - отрезки перпендикуляров, проведенных из точки К к соседним эквипотенциальным линиям, и равна:

$$E_K = \frac{U_2 - U_3}{|\vec{MK}| + |\vec{KN}|} \quad (20)$$

Примечание

Соотношения (19), (20) определяют приближенные значения напряженности поля в точках А и К. Более точное определение напряженности поля, требует построения дополнительных эквипотенциальных поверхностей, проходящих на достаточно малых расстояниях от рассматриваемой точки, в соответствии с соотношением (13):

$$E_A = |\text{grad } \varphi|_A = \lim_{|BC| \rightarrow 0} \frac{\varphi_B - \varphi_C}{|BC|}$$

Приложение 3. Определение линейной плотности заряда на проводнике

Для определения линейной плотности заряда на проводнике используют теорему Гаусса:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0},$$

где левая часть равенства соответствует потоку вектора напряженности электростатического поля \vec{E} через некоторую замкнутую поверхность S , q - суммарный заряд, находящийся внутри поверхности S , ϵ_0 - электрическая постоянная.

При вычислении потока поверхность S разбивают на множество малых площадок ΔS_k ($k = 1, 2, \dots, N$) и заменяют интеграл интегральной суммой, т.е.

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} \rightarrow \sum_{k=1}^N E_k \Delta S_k \cos \alpha_k,$$

где E_k - значение напряженности в любой точке Y_k , принадлежащей площадке ΔS_k , α_k - угол между вектором \vec{E}_k и нормалью, проведенной к поверхности S в точке Y_k .

Рассмотрим фрагмент чертежа, на котором изображен один из проводников, например, кольцообразный, и несколько эквипотенциальных линий (Рис. 2.4). Для определения линейной плотности заряда на проводнике удобно в качестве поверхности S выбрать прямоугольную призму высотой $h = 1$ м, расположенную таким образом, чтобы основания призмы были параллельны плоскости чертежа, а проводник находился внутри нее (на рисунке основание призмы - прямоугольник ABCD). Тогда внутри призмы будет содержаться отрезок проводника длиной 1 м и заряд на нем будет равен искомой линейной плотности заряда. Поскольку в рассматриваемых случаях

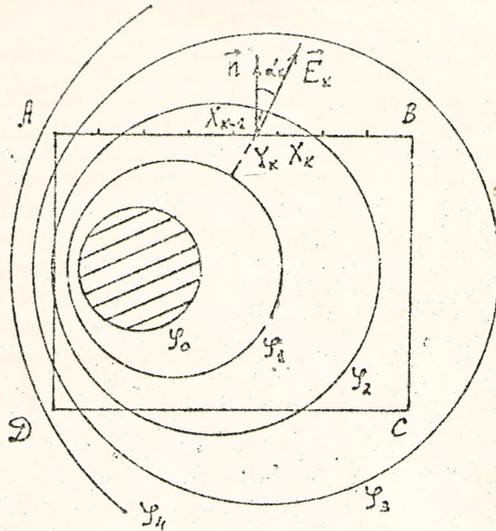


Рис. 2.4

вектор \vec{E} всегда параллелен плоскости чертежа, а следовательно, и основанием призмы, то для любой точки основания призмы справедливо равенство: $\vec{E} d\vec{S} = 0$, так как вектор $d\vec{S}$ направлен в каждой точке вдоль нормали к поверхности призмы. Поэтому для определения линейной плотности заряда τ достаточно найти поток вектора напряженности поля через боковую поверхность призмы, который равен сумме потоков вектора \vec{E} через боковые грани призмы.

Рассчитаем поток вектора \vec{E} через грань, изображением которой на рисунке является отрезок AB. Разобьем AB на N равных отрезков $[X_{k-1}, X_k]$ длиной $\Delta x = |AB|/N$ ($k = 1, 2, \dots, N$, $X_0 = A$, $X_N = B$). Такое разбиение отрезка AB соответствует разбиению грани призмы на прямоугольные полоски длиной $h = \text{Им}$ и шириной Δx , т.е. площадью $\Delta S = h \cdot \Delta x = \Delta x (h^2)$. Обозначим через

Y_k точки, расположенные в середине отрезков $[X_{k-1}, X_k]$. Используя формулы (19), (20), найдем в точках Y_k значения напряженности поля E_k . Тогда поток Φ_{AB} вектора напряженности электростатического поля \vec{E} через грань AB будет равен:

$$\Phi_{AB} = \sum_{k=1}^N E_k \Delta x \cos \alpha_k, \quad (21)$$

где $\mathcal{L}_k = (\vec{E}_k; \vec{n})$ - угол между вектором \vec{E}_k и нормалью к отрезку АВ, проведенному в точке Y_k .

Аналогично вычислится поток вектора \vec{E} через остальные боковые грани призмы ВС, СД, ДА. В результате найдем поток вектора напряженности электростатического поля через поверхность призмы

$$\Phi = \Phi_{AB} + \Phi_{BC} + \Phi_{CD} + \Phi_{DA} \quad (22)$$

линейную плотность зарядов на проводнике

$$\tau = \epsilon_0 (\Phi) \quad (23)$$

Примечание

Заметим, что

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Phi.$$

Выбирая достаточно малое значение интервала разбиения Δx по формулам (21), (22) можно вычислить поток вектора \vec{E} с необходимой точностью. Поскольку в данном случае значения E_k находятся приближенно по формулам (19), (20), при вычислении потока достаточно ограничиться значением $\Delta x = 1$ см.

Приложение 4 Определение поверхностной плотности заряда на проводниках

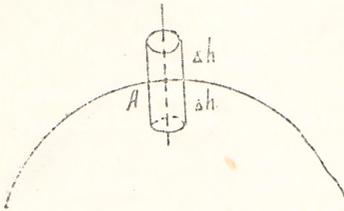
Пусть А - произвольная точка на поверхности проводника.

Рассмотрим тонкий цилиндр, ось которого совпадает с перпендикуляром, проведенным к поверхности проводника в точке А, а основания удалены от точки А на одинаковые расстояния Δh . Поток вектора напряженности электростатического поля \vec{E} через поверхность этого цилиндра равен:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{бок.},$$

где Φ_1 , Φ_2 , $\Phi_{бок.}$ - потоки вектора \vec{E} через верхнее, нижнее основания и боковую поверхность цилиндра соответственно.

Поскольку внутри проводника электростатическое поле отсутствует, т.е. $\vec{E} = 0$, поток вектора \vec{E} через нижнее основание цилиндра $\Phi_2 = 0$. Если $\Delta h \rightarrow 0$, то $\Phi_{бок.} \rightarrow 0$, так как площадь боковой поверхности цилиндра $S_{бок.} \rightarrow 0$. Таким образом, при



$\Delta h \rightarrow 0$ поток вектора \vec{E} через поверхность рассматриваемого цилиндра равен его потоку через верхнее основание цилиндра, т.е.

$$\Phi = \Phi_2 = \int_{S_{осн.}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \approx E_A \cdot \Delta S,$$

где E_A - значение напряженности электростатического поля в точке А, ΔS - площадь основания цилиндра. Здесь учтено, что в точке А вектор \vec{E} перпендикулярен к поверхности проводника, а величина ΔS по условию мала.

В соответствии с теоремой Гаусса $\Phi = q / \epsilon_0$, где q - заряд, находящийся внутри цилиндра. Разделив обе части этого равенства на ΔS и перейдя к пределу при $\Delta S \rightarrow 0$, получаем:

$$E_A = \frac{1}{\epsilon_0} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{q}{\Delta S} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (24)$$

где σ - поверхностная плотность заряда в точке А.

Определяя напряженность электростатического поля в различных точках на поверхности проводника по картине эквипотенциалей (формулы (19), (20)) или с помощью двухэлектронного зонда, из формулы (24) находим в этих точках поверхностную плотность заряда σ . В результате находим распределение зарядов по поверхности проводника.

Приложение 5 Определение емкости системы проводников

В данной работе исследуются электростатические поля, создаваемые двумя параллельными бесконечными проводниками, заряженными разноименно с одинаковой линейной плотностью. Все силовые линии таких полей исходят из положительно заряженного проводника и заканчиваются на отрицательно заряженном проводнике. Такая пара проводников называется конденсатором, а сами проводники называются обкладками конденсатора. Разность потенциалов $\Delta \varphi$ между обкладками конденсатора всегда пропорциональна величине заряда обкладок, т.е.

$$q = C \Delta \varphi.$$

Коэффициент пропорциональности C в этой формуле называют электрической емкостью конденсатора.

В случае бесконечно длинных проводников определяют емкость единицы длины конденсатора:

$$C = \frac{q}{\Delta \varphi}, \quad (25)$$

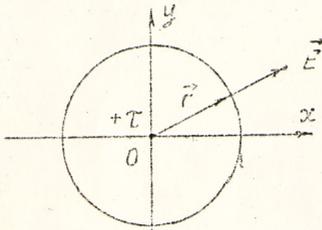
где τ — линейная плотность заряда на обкладках конденсатора.

Определяя по картине эквипотенциалей разность потенциалов между проводниками и вычисляя по формуле (24) линейную плотность заряда на проводниках, по формуле (25) находим емкость системы проводников на единицу длины.

Приложение 6. Результаты теоретического исследования

В случае электростатических полей, создаваемых двумя бесконечными параллельными цилиндрическими проводниками, заряженными разноименно с одинаковой линейной плотностью заряда, решение уравнения Лапласа (15) с соответствующими граничными условиями может быть довольно просто найдено. Для получения такого решения рассмотрим электростатическое поле в следующих случаях.

а) Электростатическое поле создается бесконечной тонкой нитью, заряженной с линейной плотностью



заряда τ (нить проходит через точку 0 перпендикулярно плоскости рисунка). Из условий симметрии ясно, что напряженность поля как функция координат должна иметь вид:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

где $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Вычисляя поток вектора \vec{E} через поверхность цилиндра высотой $h = 1$ м и радиусом r , ось которого совпадает с нитью, из теоремы Гаусса (5) получаем:

$$E(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$$

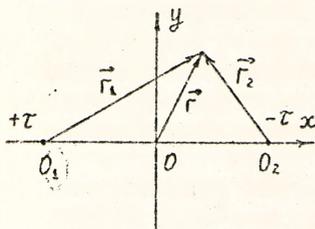
Соответственно потенциал электростатического поля равен:

$$\varphi(\vec{r}) = - \int \vec{E} d\vec{r} + C = + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C, \quad (26)$$

где C — произвольная константа, а эквипотенциальные линии такого поля представляют собой окружности с центром в точке 0.

Легко убедиться в том, что потенциал (26) удовлетворяет уравнению Лапласа (15).

б) Электростатическое поле создается двумя бесконечными параллельными тонкими нитями, заряженными разноименно с одинаковой линейной плотностью заряда τ (нити проходят через точки O_1 и O_2 на рас-



стоянии $l = |O_1 O_2|$ друг от друга перпендикулярно плоскости чертежа). В соответствии с принципом суперпозиции потенциал электростатического поля в произвольной точке \vec{r} равен сумме потенциалов (26), создаваемых каждой из заряженных нитей в отдельности т.е.

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (27)$$

Очевидно, функция $\varphi(\vec{r})$ как сумма потенциалов (26) удовлетворяет уравнению Лапласа (15).

Учитывая, что

$$r_1^2 = \left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + y^2, \quad r_2^2 = \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + y^2,$$

перепишем (27) в виде:

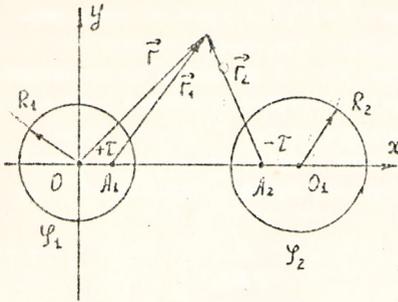
$$\left(x - \frac{l}{2} \frac{1+B}{1-B}\right)^2 + y^2 = l^2 \frac{B}{(1-B)^2}, \quad (28)$$

где $B = \epsilon k p (4\pi\epsilon_0 \varphi / \tau)$.

Из (28) следует, что эквипотенциальные поверхности данного поля представляют собой цилиндры радиусов $R = l\sqrt{B}/|1-B|$, оси которых проходят параллельно заряженным нитям через точки с координатами $x = \frac{l}{2} \frac{1+B}{1-B}$ соответственно.

в). Поле создается двумя бесконечными параллельными цилиндрическими проводниками, заряженными разноименно с одинаковой линейной плотностью заряда τ (радиусы цилиндров R_1 и R_2 , расстояние между осями $d > (R_1 + R_2)$). На рисунке проводники изображены в виде окружностей радиусов R_1 и R_2 с центрами в точках O и O_1 соответственно ($d = |OO_1|$). Поскольку распределение заряда по поверхностям проводников неизвестно, определение потенциала электростатического поля в пространстве между проводниками сводится к поиску решения уравнения Лапласа $\varphi(x, y)$, для которого поверхности цилиндрических проводников являются эквипотенциальными поверхностями, соответствующими значениям потенциала φ_1 и φ_2 .

Заметим, что эквипотенциальные поверхности представляют собой цилиндры в случае полей, создаваемых двумя параллельными тонкими



нитями, заряженными разноименно с одинаковой линейной плотностью заряда (см. (28)). При этом нити можно расположить таким образом, чтобы поверхности цилиндрических проводников совпадали с эквипотенциальными поверхностями электростатического поля, создаваемого нитями. Следовательно, ввиду единственности решения уравнения Лапласа, электростатическое поле, создаваемое нитями в пространстве между проводящими цилиндрами,

будет совпадать с полем, создаваемым двумя цилиндрами. При этом линейные плотности зарядов на нитях и цилиндрах должны совпадать.

Обозначим точки, через которые проходят заряженные нити, через \$A_1\$ и \$A_2\$ (\$|OA_1|=d_1\$, \$|OA_2|=d_2\$). Тогда потенциал поля, создаваемого заряженными цилиндрами, будет равен (см. (27)):

$$\varphi(x, y) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (29)$$

где

$$r_1^2 = (x - d_1)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x - d_2)^2 + y^2.$$

При этом эквипотенциальные поверхности определяются уравнением:

$$\left(x - \frac{B d_1 - d + d_2}{B - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{B(d - d_1 - d_2)^2}{(B - 1)^2} = R^2, \quad (30)$$

т.е. являются цилиндрами радиуса \$R\$, оси которых проходят через точки с координатами

$$x = (B d_1 - d + d_2) / (B - 1), \quad B = \exp(1/\tau \epsilon_0 \varphi / \tau).$$

Как следует из (30), чтобы поверхности цилиндрических проводников совпадали с эквипотенциальными поверхностями \$\psi_1\$ и \$\psi_2\$, расстояния \$d_1\$ и \$d_2\$ должны удовлетворять соотношениям:

$$d_1(d - d_2) = R_1^2, \quad d_2(d - d_1) = R_2^2.$$

Отсюда находим

$$d_1 = X_1 - \sqrt{X_1^2 - R_1^2}, \quad X_1 = \frac{d^2 + R_1^2 - R_2^2}{2d},$$

$$d_2 = X_2 - \sqrt{X_2^2 - R_2^2}, \quad X_2 = \frac{d^2 + R_2^2 - R_1^2}{2d}.$$

При этом потенциалы проводников равны

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_1}{d_1}, \quad \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d_2}{R_2}$$

и разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln(X + \sqrt{X^2 - 1}), \quad X = \frac{d^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1R_2}.$$

С учетом (25) получаем выражение для емкости системы проводников на единицу длины в виде:

$$C = 2\pi\epsilon_0 / \ln(X + \sqrt{X^2 - 1}). \quad (31)$$

Если в формуле (31) положить $d = r + R_2$ и перейти к пределу $R_2 \rightarrow \infty$, то получим выражение для емкости системы, состоящей из цилиндра радиуса R_1 , находящегося на расстоянии r от проводящей плоскости:

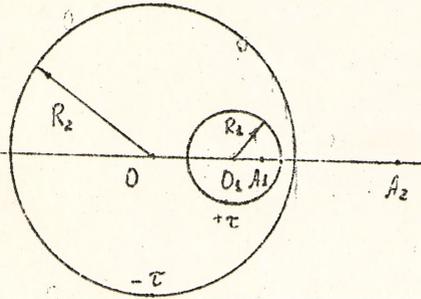
$$C = 2\pi\epsilon_0 / \ln\left(\frac{r}{R_1} + \sqrt{\left(\frac{r}{R_1}\right)^2 + 1}\right) \quad (32)$$

Знание потенциала электростатического поля (29) как функции координат позволяет найти распределение зарядов по поверхностям проводников. Действительно, переходя в (29) к полярным координатам $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$, с учетом (13), (21) получаем для поверхностной плотности заряда на цилиндре радиуса R_1 следующее выражение:

$$\sigma_1(\alpha) = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = \frac{\tau}{2\pi R_1} \frac{R_1^2 - d_1^2}{R_1^2 + d_1^2 - 2R_1 d_1 \cos \alpha} \quad (33)$$

Аналогичное выражение для поверхностной плотности заряда на цилиндре радиуса R_2 получается из (33) при замене: $R_1 \rightarrow R_2$, $d_1 \rightarrow d_2$. r). Поле создается двумя бесконечными цилиндрическими проводниками, заряженными разноименно с одинаковой линейной плотностью заряда τ , причем один из цилиндров находится внутри другого (расстояние

между осями цилиндров $d < R_2 - R_1$).



В этом случае электростатическое поле существует только в пространстве между проводниками, причем оно совпадает с полем, которое создавалось бы двумя тонкими заряженными нитями, проходящими через точки A_1 и A_2 .

Повторяя вычисления пункта в), получим для емкости единицы длины двух цилиндрических проводников следующее выражение:

$$C = 2\pi\epsilon_0 / \ln(Y + \sqrt{Y^2 - 1}), \quad Y = \frac{R_1^2 + R_2^2 - d^2}{2R_1R_2} \quad (34)$$

Распределение заряда по поверхностям цилиндрических проводников радиусов R_1 и R_2 имеет вид:

$$\sigma_1(\alpha) = \frac{\tau}{2\pi R_1} \frac{R_1^2 - d_1^2}{R_1^2 + d_1^2 - 2R_1d_1 \cos \alpha}, \quad (35)$$

$$\sigma_2(\alpha) = -\frac{\tau}{2\pi R_2} \frac{d_2^2 - R_2^2}{R_2^2 + d_2^2 - 2R_2d_2 \cos \alpha}, \quad (36)$$

где

$$d_1 = |O_1 A_1| = Y_1 - \sqrt{Y_1^2 - R_1^2}, \quad Y_1 = \frac{R_2^2 - R_1^2 - d^2}{2d},$$

$$d_2 = |O_2 A_2| = Y_2 + \sqrt{Y_2^2 - R_2^2}, \quad Y_2 = \frac{R_2^2 - R_1^2 + d^2}{2d}.$$

Контрольные вопросы

1. Напряженность и потенциал электростатического поля. Связь между ними.
2. Принцип суперпозиции для электростатического поля.
3. Теорема Гаусса. Условие потенциальности электростатического поля.
4. Сущность метода моделирования электростатических полей.

Литература

1. Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Т.3. Электричество. -М.: Наука, 1977. - С.14-109, 203-209.
2. С.Г. Калашников. Электричество. -М.: Наука, 1964. -С.28-91, 140-143.
3. А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. Курс физики. -М.: Высшая школа, 1989. - С.164-168, 182-189.

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Лабораторная работа 31. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УДЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРОВОДНИКА	3
Лабораторная работа 32. ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ	13

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: Прокопеня Александр Николаевич

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО. Часть I.

Методические указания к лабораторным работам

Ответственный за выпуск А.Н.Прокопеня

Редактор Стрсакач Т.В.

Подписано к печати 02.07.90 г. Формат 60x84/16. Бумага писч. №1.
Усл.п.л. 1,98. Уч. изд. л. 2,1. Тираж 500 экз. Заказ № 527.
Бесплатно. Отпечатано на роталпринте Брестского политехнического
института. 224017, Брест, ул. Московская, 267.